

Quantenpunktkontakte als aktive Ladungssensoren zur Untersuchung der spektralen Eigenschaften von Quantenpunkten

Dissertation

der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard Karls Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Christoph Dieter
aus Reutlingen

Tübingen
2017

Gedruckt mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard Karls Universität Tübingen.

Tag der mündlichen Qualifikation:

26. Juli 2018

Dekan

Prof. Dr. Wolfgang Rosenstiel

1. Berichterstatter

Prof. Dr. David A. Wharam

2. Berichterstatter

Prof. Dr. Monika Fleischer

Inhalt

1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	5
2.1. Niederdimensionale Elektronensysteme	5
2.2. Quantenpunktkontakte	7
2.2.1. Theorie des quantisierten Ladungstransports	8
2.2.2. Quantenpunktkontakte als Ladungssensoren	12
2.3. Quantenpunkte	13
2.3.1. Kapazitätsmodell	14
2.3.2. Coulomb–Blockade–Oszillationen	16
2.3.3. Stabilitätsdiagramm	18
2.3.4. Spektrale Eigenschaften von Quantenpunkten	19
2.4. Simulation gekoppelter Quantensysteme	25
2.4.1. Motivation	25
2.4.2. Modell	25
2.4.3. Übergangswahrscheinlichkeiten	25
2.4.4. Mastergleichung	27
2.4.5. Programmablauf	29
2.4.6. Beispielsimulation	30
2.5. Quanten–Hall–Effekt	33
2.5.1. Landau–Quantisierung	34
2.5.2. Randzustände	36
3. Probenherstellung	39
3.1. Halbleiter–Heterostrukturen	39
3.1.1. Bandstruktur von GaAs/AlGaAs–Heterostrukturen	40
3.2. Herstellungsprozess	42
3.2.1. Vorbereitung	42
3.2.2. Optische Lithographie	44
3.2.3. Elektronenstrahlolithographie	52
3.2.4. Bonden	53
3.2.5. Probleme	54
4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie	59
4.1. Motivation	59

4.2.	Modell	61
4.3.	Simulationsergebnisse	62
4.4.	Anwendung	66
4.5.	Ausblick	74
5.	Elektrostatistische Simulation zweidimensionaler Elektronengase	77
5.1.	Motivation	77
5.2.	Programmbeschreibung	77
5.2.1.	Elektrostatistisches Modell	77
5.2.2.	Grundannahmen	79
5.2.3.	Programmablauf	80
5.2.4.	Potentialberechnung	81
5.3.	Simulation eines Quantenpunktkontakts	83
5.4.	Fazit	85
6.	Messaufbau	87
6.1.	Kryotechnik	87
6.1.1.	Eigenschaften von Helium	87
6.1.2.	^4He -Kryostat	90
6.1.3.	$^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostat	92
6.1.4.	Durchgeführte Wartungsarbeiten	98
6.2.	Messelektronik	105
6.2.1.	Hardware	105
6.2.2.	Messtechniken	107
6.2.3.	Messdatenerfassung	111
7.	Probencharakterisierung	113
7.1.	Flächenwiderstand des 2DEGs	114
7.1.1.	Spezifischer Flächenwiderstand	114
7.1.2.	Numerische Berechnung von Flächenwiderständen komplexer Geometrien	115
7.2.	Ohmsche Kontakte	120
7.2.1.	Diskussion der Ergebnisse	122
7.2.2.	Widerstandskennlinien	123
7.3.	2DEG-Charakterisierung	125
7.3.1.	Vergleich mit Herstellerangaben	128
8.	Messungen	129
8.1.	QPC-Kennlinien	131
8.2.	Leitwertmessungen an Quantenpunkten	133
8.2.1.	Nichtlineare Messung	134
8.3.	Charakterisierung des Sensor-QPCs	139
8.3.1.	Prinzip einer Elektrometermessung	139

8.3.2.	Wechselwirkung zwischen Sensor und Quantenpunkt	140
8.3.3.	Empfindlichkeit	144
8.4.	Aktive Sensormessung am Einzeldot	146
8.4.1.	Vergleich zu direkter Leitwertmessung	146
8.4.2.	Auswirkung der Drain–Source–Wechselspannung auf die Sensormessung	153
8.4.3.	Untersuchung des Energiespektrums	155
8.4.4.	Nichtlineare Sensormessung	164
9. Zusammenfassung		169
A. Bestimmung der Kondensatorladungen in Quantenpunktsystemen		I
A.1.	Aufstellen des linearen Gleichungssystems	I
A.2.	Lösungsstrategie	III
B. Parameter Probenherstellung		V
C. Technische Zeichnungen		IX
C.1.	Probendeckel	IX
C.2.	Erdungsklammer	IX
C.3.	IGH–Ventil	IX
Symbolverzeichnis		XXI
Literatur		XXIII

1

Kapitel 1.

Einleitung

Die Erfindung des ersten integrierten Schaltkreises im Jahr 1958 kann gewissermaßen als Startschuss für einen lawinenartigen Entwicklungsprozess angesehen werden, welcher aufgrund seiner immensen Auswirkung auf fast alle Bereiche des täglichen Lebens heute gemeinhin als *digitale Revolution* bezeichnet wird. Das seitdem fortwährende Bestreben nach Miniaturisierung führte schließlich zur Erschließung eines völlig neuen Forschungsgebiets – der sogenannten Nanotechnologie. Längst nicht mehr beschränkt sich die gezielte Herstellung und Nutzung kleinster Strukturen dabei allein auf elektronische Komponenten. Die immer noch beständig wachsende Zahl neuer Anwendungsfelder reicht mittlerweile von der Erzeugung funktionaler Beschichtungen („Lotuseffekt“) bis in die Lebensmittelindustrie („Nanofood“).

Bemerkenswert ist dabei vor allem der rasante Fortschritt auf dem Gebiet der mesoskopischen Halbleiterphysik. Neue Herstellungsverfahren, wie beispielsweise die Molekularstrahlepitaxie zur Erzeugung einkristalliner Schichten oder die Elektronenstrahl-lithographie zur Strukturierung auf Nanometerskala bildeten den Grundstein für eine Vielzahl bahnbrechender Entdeckungen. Hervorzuheben sind dabei vor allem der erstmals 1988 erbrachte Nachweis einer Leitwertquantisierung in Quantenpunktkontakten, sowie die nur zwei Jahre später gemessene Coulomb-Blockade in 2DEG-basierten Quantenpunkten. Hierunter versteht man quasi-nulldimensionale elektronische Systeme, welche sowohl zur Erforschung quantenmechanischer Phänomene, als auch zur Definition eines Stromstandards eingesetzt werden können. Ein hierbei verfolgter Ansatz beruht auf einer Art Ladungspumpe, durch welche einzelne Elektronen sequentiell mit einer definierten Taktrate geschleust werden. Damit ließe sich die noch offene Verbindung im Quanten-Metrologischen Dreieck schließen, welches die fundamentale Beziehung zwischen den elektrischen Grundgrößen Spannung, Strom und Widerstand herstellt. Eine zukünftige praktische Anwendungsmöglichkeit von Quantenpunkten erhofft man sich in deren Einsatz als Grundbausteine von Quantencomputern. Als Quantenbit-Information dient in diesem Fall der Elektronenspin, welcher beim Auslesevorgang zunächst in eine messbare

1. Einleitung

Größe gewandelt werden muss. Der Übergang von simplen Demonstratoren zu komplex verschalteten Baugruppen stellt in Anbetracht der enormen Anforderungen an die Herstellung und die Messumgebung dabei immer noch eine enorme Hürde dar und ist Gegenstand aktueller und intensiver Forschung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Anwendung von QPC-Ladungssensoren zur spektroskopischen Vermessung von Quantenpunkten im Regime kleiner Besetzungszahlen. Die dabei untersuchten Proben basieren auf einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur, innerhalb derer sich bei niedrigen Temperaturen ein zweidimensionales Elektronengas ausbildet. Durch lokale, elektrostatische Verarmung mittels Top-Gate-Strukturen wird die Bewegungsfreiheit der Elektronen weiter eingeschränkt und somit quasi beliebige Quantensysteme definiert. Das angewandte Prinzip zur Ladungsdetektion beruht auf der hohen Empfindlichkeit des Leitwerts eines Quantenpunktkontakts auf kleinste Potentialänderungen im Kanalbereich. Ein großer Vorteil dieses Verfahrens besteht in der geringen Rückwirkung des Sensors auf den vermessenen Dot. Darüber hinaus können Umladungen auch in Konfigurationen mit schwacher Reservoirankopplung erfasst werden, bei denen ein „klassischer“ Nachweis über Leitwertpeaks aufgrund zu geringer Tunnelströme ausscheidet. Ein Abzählen der Sensorstufen bis zur vollständigen Entvölkerung des Dots erlaubt insbesondere eine eindeutige Zuordnung der absoluten Ladungszahl.

Die Idee einer indirekten Erfassung der Quantenpunktladung über einen kapazitiv gekoppelten QPC-Sensor ist dabei nicht neu¹. Berichtete Anwendungsmöglichkeiten eines solchen Elektrometers sind vielseitig und reichen von der Detektion des Spins von Dot-Elektronen² über Messungen von Elektronentunnelraten³ bis hin zur Thermometrie zweidimensionaler Elektronengase⁴. Ein wesentlicher Unterschied der vorliegenden Arbeit besteht in der bereits von D. Schefzyk⁵ angewandten aktiven Regelung des Sensor-QPCs. Durch eine permanente Nachführung des Leitwerts auf einen fixen Arbeitspunkt ergibt sich eine quasi unbegrenzte Ausweitung des zur Verfügung stehenden Messbereichs bei annähernd gleichbleibend hoher Sensorempfindlichkeit. Als eigentliches Messsignal dient die hierbei jeweils erforderliche Potentialänderung am QPC-Gate.

In Kapitel 2 dieser Dissertation sind zunächst die relevanten theoretischen Grundlagen zusammengefasst. Dabei werden die fundamentalen elektronischen Eigenschaften niederdimensionaler Strukturen, sowie ein numerisches Verfahren zur Simulation von Transporteigenschaften beliebig vernetzter Quantenpunktsysteme vorgestellt. Die einzelnen Schritte der Probenherstellung sind in Kapitel 3 ausführlich dargelegt. Eine tabellarische Kurzanleitung inklusive der jeweiligen Prozessparameter findet sich in Anhang B. Kapitel

¹FIELD u. a., „Measurements of Coulomb blockade with a noninvasive voltage probe“.

²ELZERMAN u. a., „Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot“.

³MACLEAN u. a., „Energy-Dependent Tunneling in a Quantum Dot“.

⁴TORRESANI u. a., „Nongalvanic primary thermometry of a two-dimensional electron gas“.

⁵SCHFZYK, „Quantenbauelemente als aktive Sensoren zur Ladungsbestimmung in elektronischen Nanostrukturen“.

6 widmet sich dem verwendeten Versuchsaufbau, wobei sowohl die zur Anwendung kommenden Kühlmechanismen, als auch die verschiedenen Messtechniken explizit erläutert werden. Im Anschluss an die elektrische Charakterisierung des Probenmaterials in Kapitel 7 werden schließlich die durchgeführten Tieftemperaturmessungen in Kapitel 8 präsentiert und detailliert ausgewertet.

Neben der spektroskopischen Untersuchung von Quantenpunkten wurden im Rahmen dieser Arbeit konzeptionelle Verbesserungen bezüglich der Probenherstellung und dem Strukturdesign erzielt. Kapitel 4 thematisiert die Berechnung effektiver Dosisverteilungen bei der Elektronenstrahlolithographie. Mit Hilfe von Simulationen werden unter Berücksichtigung des Proximity-Effekts und Hardware-bedingter Formverzerrungen Vorhersagen über die resultierenden Lackstrukturen getroffen und entsprechende Korrekturfaktoren abgeleitet. In Kapitel 5 wird ein Computerprogramm zur Berechnung der Potentiale und Ladungsverteilungen in elektrostatisch verarmten, zweidimensionalen Elektronengasen vorgestellt, welches auf einer iterativen Lösung der Poisson-Gleichung basiert.

2

Kapitel 2.

Theoretische Grundlagen

2.1. Niederdimensionale Elektronensysteme

Das Gebiet der *mesoskopischen Physik* (griechisch: μέσος = „mittig“) stellt gewissermaßen eine Brücke zwischen dem klassischen Regime großer Längenskalen und der atomaren Physik dar, welche durch die Gesetze der Quantenmechanik beschrieben wird. Dieser Übergangsbereich ermöglicht die Realisierung experimentell zugänglicher Quantenstrukturen bzw. Analoga für eine Vielzahl theoretischer Modellsysteme. Die physikalischen Eigenschaften sind dabei maßgeblich durch die Dimensionalität des Elektronengases bestimmt. Hierunter versteht man im Allgemeinen die Anzahl der Raumrichtungen, innerhalb derer sich die Ladungsträger „frei“ bewegen können. Eine zentrale Größe, aus welcher sich unter anderem elektronische Transporteigenschaften ableiten lassen, stellt die sogenannte Zustandsdichte $D(E)$ eines Systems dar. Diese gibt anschaulich die Anzahl besetzbarer Elektronenzustände innerhalb eines infinitesimalen Energieintervalls $[E : E + dE]$ an.

$$D_d(E) = \frac{1}{V_d} \frac{\partial N_d(E)}{\partial E} = c_d \cdot E^{\frac{d}{2}-1} \quad \text{für } d = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

N_d bezeichnet die Anzahl besetzter Zustände bis zur (Fermi-) Energie E in einem Volumen V_d , d die Dimensionalität und c_d einen dimensionsabhängigen Vorfaktor. In Abhängigkeit der Dimensionalität ergeben sich letztlich die in Abbildung 2.1 dargestellten, charakteristischen Kurvenverläufe¹. Die Lokalisierung der Elektronen in einer Raumdimension bewirkt eine Diskretisierung der korrespondierenden Energiekomponente. Bedingt durch die stets endlichen Abmessungen realer Nanostrukturen entstehen dabei Serien aus mehreren überlagerten, energetisch verschobenen Subbändern. Für die „freien Dimensionen“ kann jeweils in guter Näherung eine parabolische Energiedispersion $E_i = \hbar^2 k_i^2 / 2m^*$ mit effektiver Elektronenmasse m^* angenommen werden.

¹DAVIES, *The Physics of Low-dimensional Semiconductors: An Introduction*.

2. Theoretische Grundlagen

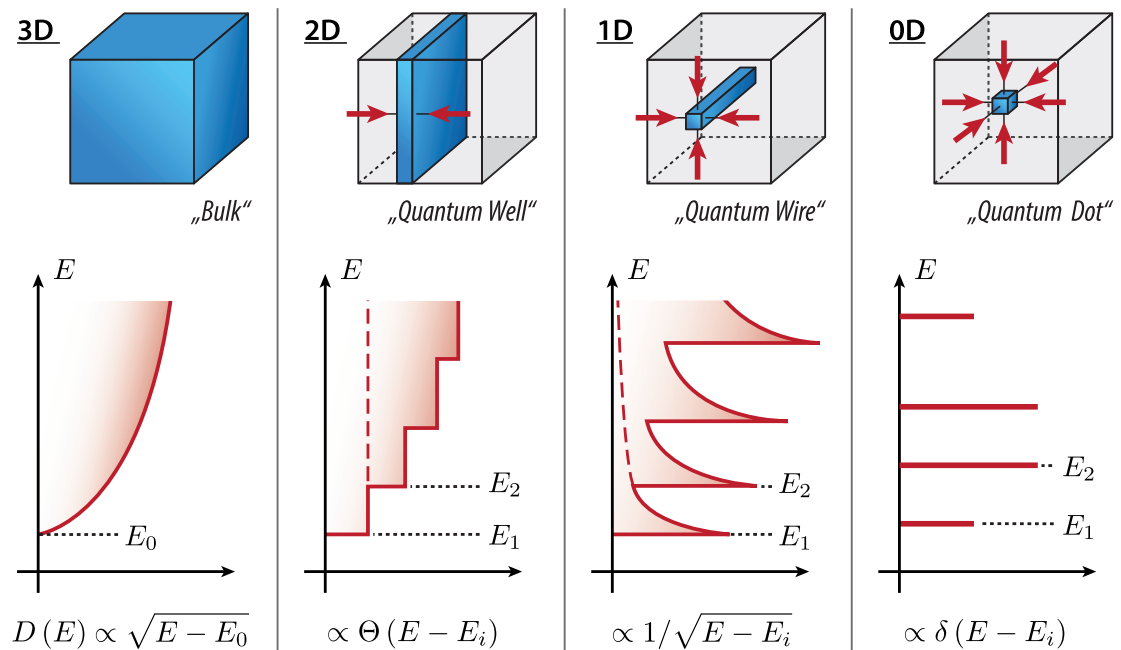


Abb. 2.1.: Zustandsdichte in Abhängigkeit der Dimensionalität des Systems (nach ²)

Abhängig von der Dimensionalität lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen spezifische Quantisierungsphänomene, wie beispielsweise die Coulomb-Blockade an Quantenpunkten beobachten. Als notwendiges Kriterium dürfen die Systemabmessungen hierfür höchstens im Bereich der intrinsischen elektronischen Längenskalen liegen. Diese sind vor allem durch die Fermiwellenlänge λ_F , die mittlere freie Weglänge l_m , sowie die Phasenrelaxationslänge l_ϕ gegeben. In diesem Regime zeigen die Leitungselektronen sowohl das ballistische Transportverhalten klassisch stoßender Teilchen, als auch ihre quantenmechanische Wellennatur bei der Besetzung stationärer Quantenpunktzustände. Die Größenordnung der untersuchten Nanostrukturen liegt abhängig von den jeweiligen Materialparametern meist zwischen wenigen Nanometern und einigen Mikrometern. Von praktischer Relevanz sind dabei vor allem Halbleiter-basierte Proben, da diese im Vergleich zu Metallen eine bis zu 100-fach größere Fermiwellenlänge aufweisen und folglich deutlich größere Strukturabmessungen erlauben.

Die im Rahmen dieser Arbeit hergestellten und untersuchten Proben basieren auf einem zweidimensionalen Elektronengas (kurz: *2DEG*), welches durch ein Einschlusspotential an der Materialgrenzfläche in einer Halbleiter-Heterostruktur definiert wird. Mittels elektrostatischer Verarmung werden innerhalb dieser leitfähigen Schicht Quantensysteme erzeugt, die aus null- (Quantenpunkte) und eindimensionalen (Quantenpunktkontakte) Elementen bestehen. In den folgenden Abschnitten wird die Physik dieser Grundbausteine mit Fokus auf deren elektronischen Transporteigenschaften näher beleuchtet.

²SURESH, „Semiconductor Nanomaterials, Methods and Applications: A Review“.

2.2. Quantenpunktkontakte

Ein *Quantenpunktkontakt* (kurz: QPC) bezeichnet einen eindimensionalen Leitungskanal zwischen zwei elektronischen Reservoirs, dessen Abmessungen im Bereich der Fermiwellenlänge liegen. In Abhängigkeit des Größenverhältnisses zwischen Kanalbreite d und -länge l lassen sich derartige Strukturen in „Drähte“ ($d < l$) und „Punktkontakte“ ($d > l$) klassifizieren. Für hinreichend große Geometrien skaliert der elektrische Widerstand des Kontakts entsprechend einem klassischen, ohmschen Verhalten linear mit dem Quotienten l/d (siehe Abschnitt 7.1). Im ballistischen Regime ($l \ll l_m$) erfolgt der Ladungstransport durch den Kanal über einzelne Energiesubbänder. Eine damit verbundene Quantisierung des Leitwerts konnte erstmals im Jahr 1988 durch zwei unabhängige Gruppen^{3,4} experimentell nachgewiesen werden.

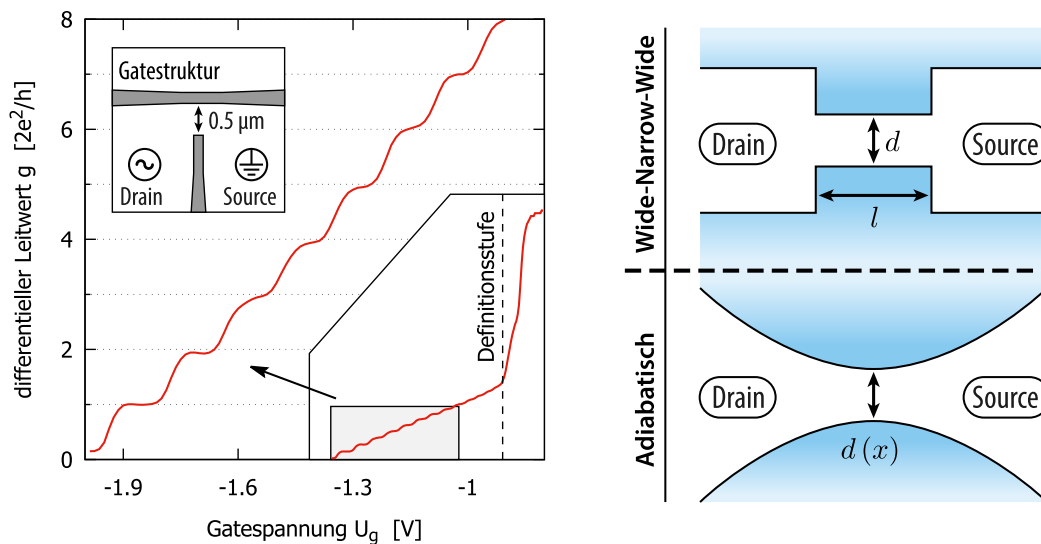


Abb. 2.2.: Links: Typische Kennlinie eines Split-Gate-Quantenpunktkontakts mit ausgeprägter Leitwertquantisierung; rechts: Geometrien unterschiedlicher Modellansätze zur theoretischen Beschreibung des Ladungstransports.

Abbildung 2.2 zeigt links den gemessenen differentiellen Leitwert eines 2DEG-basierten, elektrostatisch definierten Quantenpunktkontakts. Über die Potentiale der im Inset dargestellten Top-Gate-Struktur wird die Ausdehnung der sich darunter ausbildenden Verarmungszonen und somit die effektive Kanalbreite variiert (siehe Kapitel 5). Hinter der sogenannten Definitionsstufe⁵ bilden sich charakteristische Plateaus im QPC-Leitwert bei ganzzahligen Vielfachen von $2e^2/h$ aus.

³WHARAM u. a., „One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance“.

⁴WEES u. a., „Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas“.

⁵Kennlinienbereich, in dem das Elektronengas unterhalb der Gates noch nicht vollständig verarmt ist

2.2.1. Theorie des quantisierten Ladungstransports

Eine formale Beschreibung des Transportmechanismus im quantenmechanischen Bild liefert der *Landauer-Büttiker-Formalismus*⁶. Dieser basiert auf der Annahme eines nicht-wechselwirkenden Fermigas. Im Folgenden werden die Grundprinzipien des Ladungstransports anhand zweier idealisierter Modelle im einfachen Grenzfall verschwindender Temperatur $T \rightarrow 0$ K skizziert. Für eine allgemeine Betrachtung thermisch verbreiteter Systeme sei auf weiterführende Literatur verwiesen⁷.

Wide-Narrow-Wide-Modell:

Bei diesem Ansatz wird der Quantenpunktkontakt als Aneinanderreihung unterschiedlich breiter Leitersegmente mit abrupten Übergängen modelliert (siehe Abbildung 2.2, r. o.). Der Ladungstransport über die Einschnürung kann durch unabhängige Tunnelprozesse einzelner Elektronen an einem Streuzentrum beschrieben werden. Dieses ist über zwei eindimensionale, ballistische Kanäle jeweils an ein Reservoir angekoppelt. Innerhalb der Zuleitungen können Elektronen frei über sogenannte Transportmoden propagieren. Dabei kann gezeigt werden, dass für hinreichend breite äußere Leitersegmente eine quasi reflexionsfreie Einkopplung in die Quellen erfolgt⁸. Im entsprechenden k -Halbraum ist die Fermienergie der Kanäle durch das angebundene Reservoir bestimmt. Das Streuzentrum kann bei Beteiligung mehrerer Leitungsmoden durch eine Transmissionsmatrix T_{ds} parametrisiert werden. Abbildung 2.3 illustriert den beschriebenen Transportmechanismus. Im unteren Bereich sind jeweils die Energiebänder sowie deren Besetzung für die unterschiedlichen Segmente dargestellt. Unter Annahme eines in x -Richtung orientierten, eindimensionalen Leiters folgt aus der Translationssymmetrie für die Lösungen der Schrödingergleichung⁹:

$$\Psi_{n,\pm k_x}(x,y) = e^{\pm i k_x x} \cdot \Phi_{n,\pm k}(y) \quad \text{mit} \quad E_n(k_x) = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + E_{n,0} \quad (2.2)$$

Dabei handelt es sich jeweils um eine Überlagerung aus einer laufenden Welle in Kanalrichtung und einer davon unabhängigen Transversalkomponente $\Phi_{n,\pm k}$. Letztere wird durch die Kanalbreite, sowie den Potentialverlauf im Randbereich bestimmt. Das resultierende Energiespektrum entspricht einer Schar von Parabeln, welchen verschiedene Moden bzw. Energiesubbänder zugeordnet werden können. Diese sind bis zur Fermienergie der jeweils einkoppelnden Elektronenquelle besetzt. Im linearen Grenzfall ($U_{ds} \simeq 0$) tragen nur Zustände aus einem kleinen Energieintervall $[\varepsilon_{F,d} : \varepsilon_{F,s}]$ zum Ladungstransport bei. Außerhalb dieses Bereichs sind die Niveaus entweder auf beiden Kanalseiten vollständig besetzt

⁶BÜTTIKER, „Four-Terminal Phase-Coherent Conductance“.

⁷DATTA, *Quantum Transport: Atom to Transistor*.

⁸SZAFER und STONE, „Theory of Quantum Conduction through a Constriction“.

⁹BÜTTIKER, „Transmission, Reflection and the Resistance of Small Conductors“.

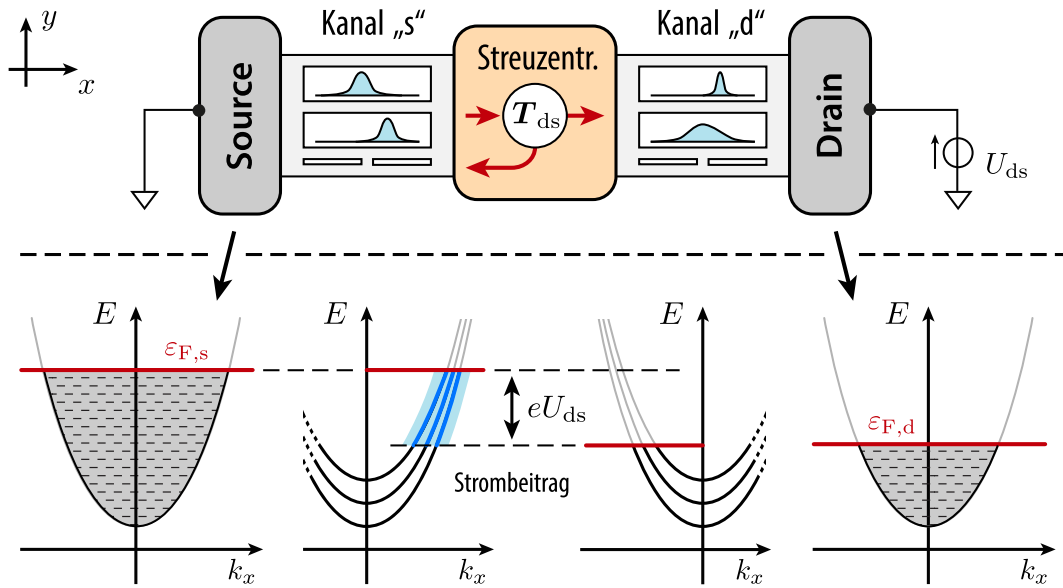


Abb. 2.3.: Visualisierung des Landauer–Büttiker–Formalismus zur theoretischen Beschreibung des Ladungstransports durch einen Quantenpunktkontakt.

oder unbesetzt und folglich keine Übergänge möglich. Es genügt daher, die Lösungen der Schrödingergleichung an der Fermikante zu betrachten. Für die Geschwindigkeiten der vom Source–Reservoir injizierten Elektronen gilt:

$$v_{F,n} = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{dE_n(k_x)}{dk_x} \right|_{k_x = k_{x,n}(\varepsilon_F)} \quad (2.3)$$

Der von einer beliebigen Transportmode n getragene Strom I_n ergibt sich bei verschwindender thermischer Verbreiterung durch Integration über das Fermienergieintervall:

$$I_n = \int_{\varepsilon_{F,d}}^{\varepsilon_{F,s}} e \cdot g_s \cdot D_{1D}(E) \cdot v_{F,n}(E) dE \quad \text{mit} \quad D_{1D} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{dE_n(k_x)}{dk_x} \right]^{-1} \\ = \frac{2e}{h} \left(\overbrace{\varepsilon_{F,s} - \varepsilon_{F,d}}^{\equiv \Delta\varepsilon_F} \right) \stackrel{(2.3)}{=} \hbar v_{F,n} \quad (2.4)$$

Dabei bezeichnet D_{1D} die eindimensionale Zustandsdichte (siehe Gleichung 2.1) und $g_s = 2$ den Spinartungsfaktor. Der Gesamtstrom zwischen den Reservoirs setzt sich im Allgemeinen aus Beiträgen verschiedener Subbänder zusammen. Der Transmissionskoeffizient t_{nm} der Streumatrix T_{ds} gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Elektron aus Mode n des Source–Kanals in Mode m des Drain–Kanals gestreut wird. Somit gilt bei einer Gesamtzahl von jeweils N leitfähigen Energiebändern:

$$I_{ds} = \frac{2e}{h} \cdot \Delta\varepsilon_F \sum_{n,m=1}^N |t_{nm}|^2 \quad (2.5)$$

2. Theoretische Grundlagen

Für den Leitwert g folgt daraus die sogenannte „Zwei-Terminal-Landauergleichung“:

$$g = \frac{e}{\Delta\varepsilon_F} \cdot I_{\text{ds}} = \frac{2e^2}{h} \sum_{n,m=1}^N |t_{nm}|^2 \quad (2.6)$$

Im Spezialfall einer perfekten Transmission zwischen beiden Kanalseiten gilt $|t_{nm}|^2 = \delta_{nm}$. Die Leitfähigkeit ist dann gegeben durch das Leitwertquantum $g_0 = 2e^2/h = 1/(12,9064 \text{ k}\Omega)$, multipliziert mit der Anzahl N am Transport beteiligter Moden. Diese hängt sowohl von der Fermienergie der Reservoirs, als auch vom energetischen Abstand der Subbänder ab: $N(E) = \sum_i \Theta(E - E_{i,0})$. Letzterer wird maßgeblich durch die geometrische Breite des Quantenpunktkontakts bestimmt.

Adiabatisches Modell

Das adiabatische Modell geht von einer stetigen, glatten Verjüngung des Leiterquerschnitts in Richtung des QPC-Zentrums aus (siehe Abbildung 2.2, r. u.). Die Änderung der Kanalbreite $d(x)$ wird auf der Größenskala der Fermiwellenlänge dabei als klein angenommen. Dies bedeutet eine kontinuierliche Anpassung der Elektronen-Wellenfunktionen¹⁰ bei der Propagation durch den eindimensionalen Leiter, sodass quasi keine Streuung zwischen den einzelnen Transportmoden stattfindet. Für die Lösungen der Schrödingergleichung lässt sich folglich eine Variablenseparation, analog zu Gleichung 2.2 ansetzen. Unter der Annahme eines „Hard-Wall“-Einschlusspotentials folgt schließlich für die Transversalkomponente der Eigenenergien¹¹:

$$E_{n,y}(x) = \frac{\hbar^2 k_{n,y}^2}{2m^*} \quad \text{mit} \quad k_{n,y} = \frac{\pi n}{d(x)} \quad (2.7)$$

Diese kann jeweils als effektive potentielle Energie aufgefasst werden, welche zur Kanalmitte hin ansteigt. Abbildung 2.4 illustriert dies am Beispiel eines quadratisch abhängigen Leiterquerschnitts $d(x) = d_0 + ax^2$ mit minimaler Breite d_0 . Übertrifft das Maximum die Energie der injizierten Elektronen $E_{n,y}(d_0) < \varepsilon_F$, so fällt die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozess über das betreffende Energiesubband signifikant ab. Der absolute

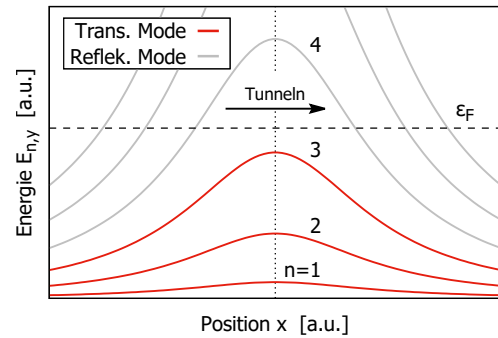


Abb. 2.4.: Transversalkomponente der Modenenergie entlang des Kanals

¹⁰unter Beibehaltung der Quantenzahlen

¹¹GLAZMAN u. a., „Reflectionless quantum transport and fundamental ballistic-resistance steps in microscopic constrictions“.

Transmissionskoeffizient T entspricht somit der Zahl propagierender Moden im Bereich der Kanalengstelle N und ist für einen idealen, adiabatischen QPC gegeben durch¹²:

$$T(\varepsilon_F, d_0) \simeq N = \left\lfloor \frac{k_F d_0}{\pi} \right\rfloor \quad (2.8)$$

Tunnelströme durch die Potentialbarriere im Kanalzentrum (siehe Abb. 2.4) führen letztlich zu einer Verbreiterung der Übergangsbereiche zwischen den Leitwertstufen. Eine gute Approximation für das Einschlusspotential elektrostatisch definierter QPCs in zweidimensionalen Elektronengasen ist durch eine Sattelpunktfunktion mit Krümmungsparametern $\omega_{x,y}$ gegeben¹³.

$$U(x, y) = U_0 - \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2 \quad (2.9)$$

Nichtlineares Transportregime

Im nichtlinearen Regime wird mit betragsmäßig zunehmender Drain–Source–Spannung eine Verschmälerung der Leitwertstufen beobachtet, bis diese schließlich komplett verschwinden. Gleichzeitig bilden sich neue Plateaus auf den Zwischenwerten $g_n = (n - \frac{1}{2}) g_0$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ aus¹⁴. Auf großer Skala wechseln sich in Abhängigkeit von U_{ds} Regionen mit ganz- und halbzahliger Leitwertquantisierung gegenseitig ab. Eine anschauliche Erklärung für dieses Verhalten liefert eine Betrachtung der Energiesubbänder und deren Besetzung innerhalb des Kanals. Während bei linearem Transport die Anzahl besetzter Moden auf beiden Kanalseiten gleich ist, kann sich diese im Fall $|eU_{ds}| > 0$ unterscheiden (siehe Abbildung 2.5).

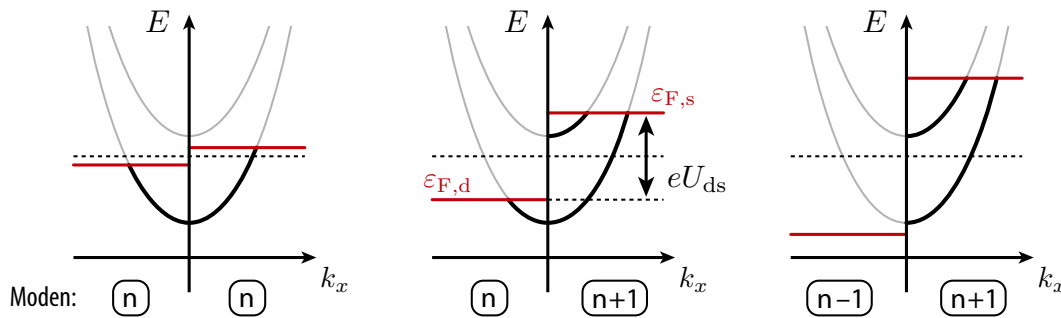


Abb. 2.5.: Besetzung der Energiesubbänder im Quantendraht für unterschiedliche Source–Drain–Spannungen (nach ¹⁴)

¹²YACOBY und IMRY, „Quantization of the conductance of ballistic point contacts beyond the adiabatic approximation“.

¹³BÜTTIKER, „Quantized transmission of a saddle-point constriction“.

¹⁴KOUWENHOVEN u. a., „Nonlinear conductance of quantum point contacts“.

2. Theoretische Grundlagen

Es kann gezeigt werden, dass der Leitwert eines symmetrisch an die Reservoirs gekoppelten Kanals mit perfekter Transmission gegeben ist durch:

$$g(U_{ds}) = \frac{e^2}{h} [N_+(U_{ds}) + N_-(U_{ds})] \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnen N_{\pm} die Anzahl besetzter Moden im entsprechenden k_x -Halbraum. Die Lage der Leitwertplateaus ändert sich demnach, sobald die Fermienergie einer Quelle ein Subbandminimum über- bzw. unterschreitet.

0,7-Anomalie

In Messungen taucht häufig ein weiteres, deutlich schwächer ausgeprägtes Plateau unterhalb der ersten Leitwertstufe auf. Dieses wird aufgrund seiner Lage als *0,7-Anomalie* bezeichnet. Die lokale Kennlinienabflachung wird für gewöhnlich mit steigender Temperatur markanter¹⁵. Wenngleich die Ursache für diesen Effekt noch nicht vollständig verstanden ist, so wird ein direkter Zusammenhang mit dem sogenannten *Kondo-Effekt* vermutet¹⁶. Dieser kann unter bestimmten Voraussetzungen an Quantenpunkten beobachtet werden und bewirkt einen Elektronentransport im gesperrten Coulomb-Blockade Regime über Spin-Flip-Prozesse. Eine theoretische Beschreibung dieses Transportmechanismus basiert auf der Wechselwirkung zwischen lokalisierten magnetischen Zuständen – dem Spin der gebundenen Inselektronen – und der Umgebung.

2.2.2. Quantenpunktkontakte als Ladungssensoren

QPCs reagieren im Übergangsbereich zwischen den untersten Leitwertplateaus äußerst sensibel auf ihr elektrostatisches Umfeld und eignen sich daher prinzipiell für die Verwendung als Elektrometer¹⁷. Erhöht oder verringert sich die Ladung auf einem benachbarten Quantenpunkt um ein Elektron, so führt die damit einhergehende Potentialänderung zu einer Variation der QPC-Kanalbreite und folglich zu einer sprunghaften Modifikation des Leitwerts. Auf Grundlage dieser Wechselwirkung können selbst dann noch Umladungsprozesse detektiert werden, wenn keine Messung über den Leitwert am Dot möglich bzw. erwünscht ist. Dies betrifft vor allem Konfigurationen mit schwacher Reservoiran-kopplung, in denen der Tunnelstrom bei aufgehobener Coulomb-Blockade unterhalb der Nachweisgrenze liegt. Durch aktive Regelung des Sensorleitwerts auf einen festen Biaspunkt lässt sich der effektive Messbereich quasi beliebig ausweiten. Dies ermöglicht eine Untersuchung der spektralen Eigenschaften von Quantenpunkten bis hin zu deren vollständigen Entvölkerung. Die hohe Sensitivität des QPCs im steilen Kennlinienbereich bedeutet dabei eine geringe Rückwirkung der Messung auf das untersuchte System.

¹⁵CRONENWETT u. a., „Low-Temperature Fate of the 0.7 Structure in a Point Contact: A Kondo-like Correlated State in an Open System“.

¹⁶GOLDHABER-GORDON u. a., „Kondo effect in a single-electron transistor“.

¹⁷ELZERMAN u. a., „Few-electron quantum dot circuit with integrated charge read out“.

2.3. Quantenpunkte

Als Quantenpunkt (Englisch: „*quantum dot*“) wird eine von ihrer Umgebung abgegrenzte Ladungsinsel mit kleiner räumlicher Ausdehnung bezeichnet. Aufgrund der in allen drei Raumrichtungen beschränkten Bewegungsfreiheit der darauf befindlichen Elektronen stellt dies im physikalischen Sinne ein quasi-nulldimensionales System dar. Abhängig von den Symmetrieeigenschaften der äußeren Form kann unter Umständen eine Entartung einzelner Zustände beobachtet werden, die zu charakteristischen Strukturen im Energiespektrum führt¹⁸. Die Analogie zum Schalen- bzw. Orbitalmodell in Atomen führt zur verbreiteten Auffassung von Quantenpunkten als „*künstliche Atome*“.

Zur Untersuchung von Transporteigenschaften wird die Ladungsinsel über Tunnelkontakte an elektronische Reservoirs gekoppelt. Eine Variation der elektrostatischen Dotenergie, und damit auch Größe, kann kapazitiv über Steuergates erfolgen. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich dabei Quantisierungsphänomene beobachten. Hierzu zählt insbesondere das Verschwinden der Leitfähigkeit für bestimmte Dotpotentiale, was erstmals 1987 experimentell nachgewiesen werden konnte¹⁹. Für eine Auflösung dieses als *Coulomb-Blockade* bezeichneten Effekts müssen folgende Bedingungen erfüllt sein²⁰:

Temperatur: Die thermische Energie, welche letztlich eine Linienverbreiterung bewirkt, muss kleiner als die Ladeenergie E_C des Quantenpunkts sein. Diese entspricht der Änderung des elektrostatischen Inselfentials beim Hinzufügen eines zusätzlichen Elektrons:

$$E_C = \frac{e^2}{C_\Sigma} \gg k_B T \quad (2.11)$$

Um Coulomb-Blockade-Oszillationen bei Raumtemperatur beobachten zu können sind demnach Gesamtkapazitäten C_Σ von nur wenigen Attifarad und folglich Strukturgrößen unter 10 nm erforderlich²¹. Für gewöhnlich werden daher die Messungen bei extrem kalten Temperaturen durchgeführt, wie sie beispielsweise in ³He/⁴He-Entmischungskryostaten erreicht werden.

Heisenbergsche Unschärferelation: Die Unbestimmtheit der Dotenergie infolge einer Ladungsfluktuation durch Tunnelprozesse muss kleiner als die Ladeenergie sein. Daraus ergibt sich schließlich eine Untergrenze für die Kopplungswiderstände zu den Reservoirs R_i , ab denen die Elektronen ausreichend stark innerhalb des Quantensystems lokalisiert sind:

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \frac{e^2}{C_\Sigma} \cdot R_i \gg h$$

¹⁸TARUCHA u. a., „Electronic states in quantum dot atoms and molecules“.

¹⁹FULTON und DOLAN, „Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions“.

²⁰SOHN, KOUWENHOVEN und SCHÖN, *Mesoscopic Electron Transport*.

²¹LI u. a., „Fabrication of a germanium quantum-dot single-electron transistor with large Coulomb-blockade oscillations at room temperature“.

2. Theoretische Grundlagen

$$\Rightarrow R_i \gg \frac{h}{e^2} = 25,813 \text{ k}\Omega \quad (2.12)$$

Die Zeitunschärfe Δt wurde dabei mit der Ladezeit der Kapazität C_Σ über den Widerstand R_i abgeschätzt.

Bei Halbleiter-basierten Dots haben sich vor allem zwei Herstellungsverfahren bzw. Bauformen etabliert, welche in der Praxis eine breite Anwendung finden. Hierbei unterscheidet man zwischen schichtbasierten, vertikalen Quantenpunkten mit einer Säulenform²² und lateralen Strukturen, basierend auf einer dünnen leitfähigen Ebene in einer Heterostruktur²³. Mit Hilfe sogenannter Splitgates auf der Probenoberfläche kann mittels Einschlusspotentialen die Elektronenbeweglichkeit innerhalb der Schicht eingeschränkt und somit quasi beliebige Quantensysteme definiert werden. Letztere Methode bieten den Vorteil, zahlreiche Parameter, wie beispielsweise die Kopplungsstärke an Reservoirs oder die Form des Quantenpunkts direkt über externe Potentiale beeinflussen zu können. Durch entsprechende Wahl der Materialparameter (Dotierung, Schichtfolge, -dicke) lassen sich Proben herstellen, die bei niedrigen Temperaturen eine mittlere freie Weglänge der Elektronen von bis zu $120 \mu\text{m}$ ²⁴ aufweisen. Dies entspricht einem Vielfachen der Strukturabmessungen und stellt die Voraussetzung für einen ballistischen Ladungstransport dar. In der vorliegenden Arbeit werden elektrostatisch definierte Quantensysteme innerhalb einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur untersucht.

2.3.1. Kapazitätsmodell

Abbildung 2.6 zeigt den schematischen Aufbau eines seriell verschalteten, allgemeinen Quantenpunktsystems mit zwei elektronischen Reservoirs, *Source* und *Drain*. Tunnelkontakte zwischen den einzelnen Elementen werden dabei als Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und eines Kondensators modelliert. Die Ankopplung der Dots an ihre (idealerweise) galvanisch isolierten Steuergates erfolgt rein kapazitiv. Im Falle eines einzigen Quantenpunkts entspricht diese Anordnung einem sogenannten *Single Electron Transistor* (kurz *SET*). Im leitenden Zustand erfolgt der Stromfluss in Form sequentieller Tunnelprozesse einzelner Elektronen über die Ladungsinsel.

Die elektronischen Zustände eines Quantenpunkts lassen sich in guter Näherung durch das *Constant-Interaction-Modell*²⁵ beschreiben. Dieses basiert auf der Annahmen, dass die Coulomb-Wechselwirkung eines Elektrons auf dem Dot mit seiner Umgebung durch eine konstante Kapazität parametrisiert werden kann. Des Weiteren wird von einem

²²REED u. a., „Observation of discrete electronic states in a zero-dimensional semiconductor nanostructure“.

²³MEIRAV, KASTNER und J. WIND, „Single-electron charging and periodic conductance resonances in GaAs nanostructures“.

²⁴UMANSKY, DE-PICCIOTTO und HEIBLUM, „Extremely high-mobility two dimensional electron gas: Evaluation of scattering mechanisms“.

²⁵KOUWENHOVEN, AUSTING und TARUCHA, „Few-electron quantum dots“.

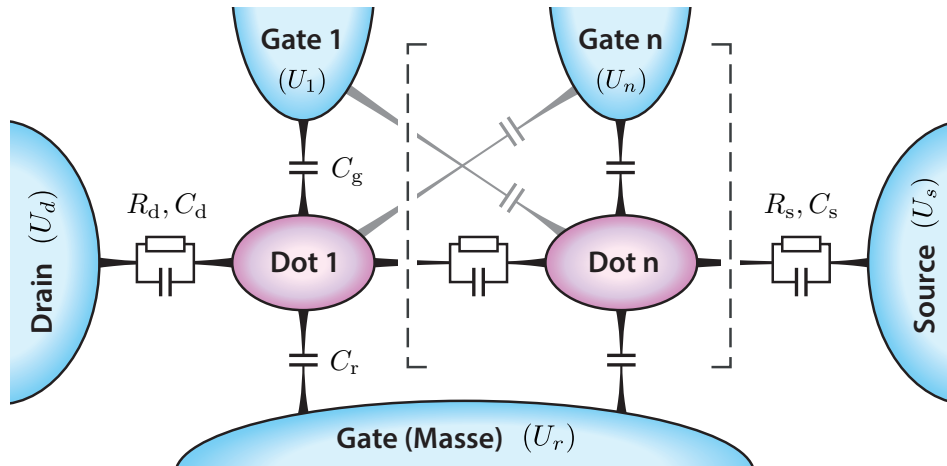


Abb. 2.6.: Schematische Darstellung eines seriellen Quantendot-Systems bzw. eines Single Electron Transistors (einzelne Ladungsinsel).

verschwindenden Einfluss der Coulomb-Wechselwirkung auf das Einteilchenenergiespektrum ausgegangen. Die elektrostatische Gesamtenergie E eines Dots mit n Elektronen im Grundzustand ist dann gegeben durch:

$$E(n) = \frac{(-e(n - n_0) + \sum_i C_i U_i)^2}{2C_\Sigma} + \sum_{j=1}^n E_n \quad \text{mit} \quad C_\Sigma = \sum_i C_i \quad (2.13)$$

dabei bezeichnet n_0 die Offsetladung des Dots bei geerdeten Reservoirpotentialen und E_n die magnetfeldabhängigen Lösungen der Einteilchen-Schrödingergleichung für die einzelnen besetzten Zustände. Die Gesamtkapazität des Quantenpunkts C_Σ ergibt sich aus der Summe über die Einzelbeiträge aller Kopplungen. Für das chemische Potential des Quantenpunkts folgt per Definition:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{dot}}(n) &\equiv E(n) - E(n-1) \\ &\stackrel{(2.13)}{=} E_C \left(n - n_0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{E_C}{e} \sum_i C_i U_i + E_n \end{aligned} \quad (2.14)$$

mit E_n als Energie des höchst besetzten Einteilchenzustands und der in Gleichung 2.11 eingeführten Ladeenergie E_C . Die zu verrichtende Arbeit, um dem Quantenpunkt ein weiteren Elektron hinzuzufügen lässt sich als elektrochemische Potentialdifferenz zwischen dem höchsten besetzten und dem niedrigsten unbesetzten Zustand berechnen:

$$\begin{aligned} E_{\text{add}} &= \mu_{\text{dot}}(n+1) - \mu_{\text{dot}}(n) \\ &= E_C + \underbrace{E_{n+1} - E_n}_{\Delta E} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei kann gemäß dem Pauli-Prinzip jedes Energieniveau bei unterschiedlicher Spinausrichtung der Elektronen doppelt besetzt werden. In diesen Fällen wird $\Delta E = 0$.

2.3.2. Coulomb-Blockade-Oszillationen

Betrachtet wird zunächst der Ladungstransport bei kleinen Drain-Source-Spannungen $V_{ds} \simeq 0$ (lineares Regime) und Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts. Über das Gatepotential U_g kann gemäß Gleichung 2.14 die elektrostatische Energie des Dots und somit dessen diskreten Energieniveaus relativ zu den Quellpotentialen verschoben werden. Ein Stromfluss über den Quantenpunkt ist nur dann möglich, wenn ein freier, besetzbarer Zustand zwischen den Fermienergien der angekoppelten Reservoirs liegt $\varepsilon_d \leq \mu_{\text{dot}} \leq \varepsilon_s$. Einzelne Elektronen können in diesem Fall über den Source-QPC auf den Dot tunneln, und diesen anschließend in Richtung Drain verlassen (siehe Abbildung 2.8 unten). Die Besetzungszahl der Ladungsinsel fluktuiert bei dieser sequentiellen Abfolge zweier Systemzustände zwischen n und $n + 1$. Liegt hingegen kein Energieniveau des Quantenpunkts im Bereich der Fermienergien $\mu_{\text{dot}}(n) < \varepsilon_d \simeq \varepsilon_s < \mu_{\text{dot}}(n + 1)$, so ist der Ladungstransport blockiert und der Strom sinkt bei hinreichend schwacher Reservoirankopplung (siehe Gleichung 2.12) auf Null ab. Dieser Effekt wird als *Coulomb-Blockade* bezeichnet. Die thermische Verbreiterung bewirkt letztlich die Ausbildung periodischer Oszillationen im Leitwert bei einer kontinuierlichen Variation des Gatepotentials. In Abhängigkeit des Größenverhältnisses der relevanten Energieskalen unterscheidet man drei verschiedene Transportregime²⁶:

Keine Coulomb-Blockade: $\Delta E, E_C \ll k_B T$; Aufgrund starker thermischer Verbreiterung treten keine Quantisierungsphänomene in Erscheinung. Der Leitwert des Gesamtsystems ergibt sich aus den einzelnen ohmschen Widerständen der in Reihe geschalteten Koppel-QPCs:

$$g \simeq \left[\frac{1}{g_s} + \frac{1}{g_d} \right]^{-1} = \frac{1}{R_s + R_d} \quad (2.16)$$

Metallisches Regime: $\Delta E \ll k_B T \ll E_C$; Die thermische Verbreiterung ist kleiner als die Ladeenergie E_C , sodass Coulomb-Blockade beobachtet wird. Der Ladungstransport erfolgt dabei jeweils über mehrere Energieniveaus. Die Form der einzelnen, nicht-überlappenden Leitwertpeaks ist gegeben durch:

$$\frac{g(\delta, T)}{g_{\text{max}}} = \frac{\frac{\delta}{k_B T}}{2 \sinh\left(\frac{\delta}{k_B T}\right)} \simeq \frac{1}{2 \cosh^2\left(\frac{\delta}{2,5 k_B T}\right)} \quad (2.17)$$

Quanten-Regime: $k_B T \ll \Delta E \ll E_C$; Durch die Transportbeteiligung von jeweils nur einem Übergang pro Leitwertpeak können einzelne Energieniveaus des Anregungsspektrums aufgelöst werden. Dies führt zu einer leicht modifizierten Peakform:

$$\frac{g(\delta, T)}{g_{\text{max}}} \simeq \frac{\Delta E}{4 k_B T} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\delta}{2 k_B T}\right)} \quad (2.18)$$

²⁶BEENAkker, „Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot“.

dabei bezeichnet $\delta = e \frac{C_g}{C_\Sigma} (U_g - U_{\max})$ den energetischen Abstand zur Maximumstelle U_{\max} . Während im metallischen Regime alle Leitwertpeaks ungefähr gleich stark ausgeprägt sind, hat im Fall der Quanten-Coulomb-Blockade die individuelle Ankopplung der einzelnen Energieniveaus einen maßgeblichen Einfluss auf die jeweilige Peakhöhe. Zudem zeichnet sich dieses Regime durch eine Temperaturabhängigkeit der Maxima nicht-überlappender Leitwertpeaks aus.

Aus der Form der Coulomb-Blockade-Oszillationen lässt sich auf Grundlage von Gleichung 2.17 bzw. 2.18 auf die Elektronentemperatur des Systems zurück schließen. Dies setzt jedoch Kenntnis über das Kapazitätsverhältnis $\alpha = C_g/C_\Sigma$ voraus, welches mittels einer nichtlinearen Messung bestimmt werden kann. Im Fall ultrakalter Temperaturen bzw. großer Tunnelströme muss ein zusätzlicher Beitrag durch die (dominierende) natürliche Linienverbreiterung berücksichtigt werden²⁷. Abbildung 2.7 zeigt den simulierten Strom I_{ds} durch einen metallischen Quantenpunkt, sowie die mittlere Elektronenbesetzung n in Abhängigkeit der Gatespannung U_g für unterschiedliche Temperaturen. Für das Kapazitätsverhältnis wurde ein typischer Wert von $\alpha = 10\%$ angesetzt.

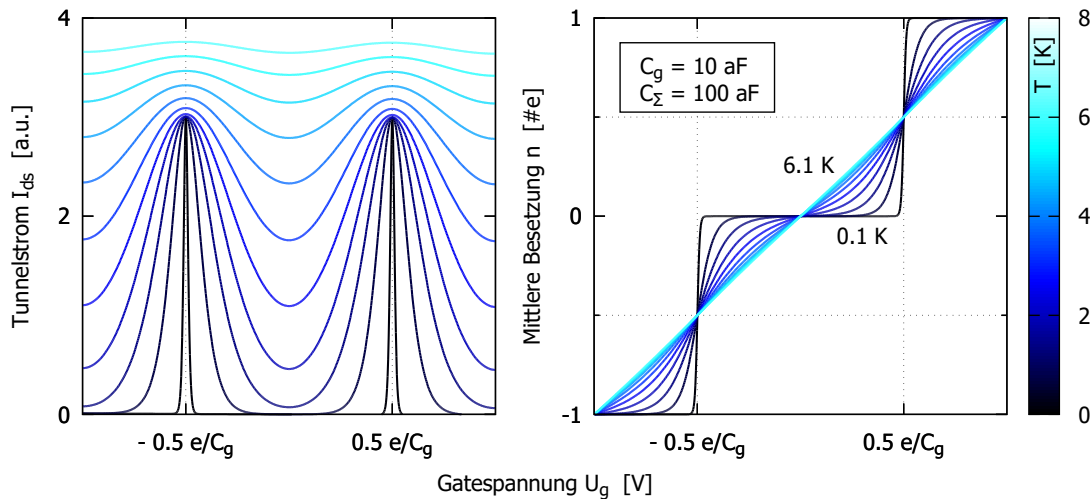


Abb. 2.7.: Tunnelstrom I_{ds} (links) und mittlere Elektronenbesetzung des Quantenpunkts (rechts) in Abhängigkeit der Gatespannung für verschiedene Temperaturen

Die Kapazität des Steuergates C_g kann direkt aus dem relativen Abstand der Leitwertpeaks bestimmt werden. Dabei gilt für $\Delta E \ll E_C$:

$$C_g \simeq \frac{e}{\Delta U_g} \quad (2.19)$$

²⁷FOXMAN u. a., „Effects of quantum levels on transport through a Coulomb island“.

2.3.3. Stabilitätsdiagramm

Wird zusätzlich eine Potentialdifferenz zwischen den angekoppelten Reservoirs angelegt, so führt dies infolge eines größeren Intervalls $[\varepsilon_{F,s} : \varepsilon_{F,d}]$ zu einer Verbreiterung der Leitwertpeaks. Im Grenzfall $|\varepsilon_{F,s} - \varepsilon_{F,d}| \geq E_C$ ist die Coulomb-Blockade vollständig aufgehoben, da für jedes Inselpotential mindestens ein unbesetztes Energieniveau zwischen den Fermienergien der Reservoirs liegt. Die Anzahl am Ladungstransport beteiligter Zustände kann in Form eines sogenannten Stabilitätsdiagramms illustriert werden. Das in Abbildung 2.8 dargestellte $U_{ds}-U_g$ -Kennlinienfeld weist ein charakteristisches Rautenmuster auf. Innerhalb der schwarz eingefärbten Flächen ist der Ladungstransport durch Coulomb-Blockade vollständig unterbunden und die Ladungszahl des Quantenpunkts jeweils konstant. Die Begrenzungslinien markieren die Ausrichtung eines Dot-Energieniveaus mit der Fermienergie eines Reservoirs.

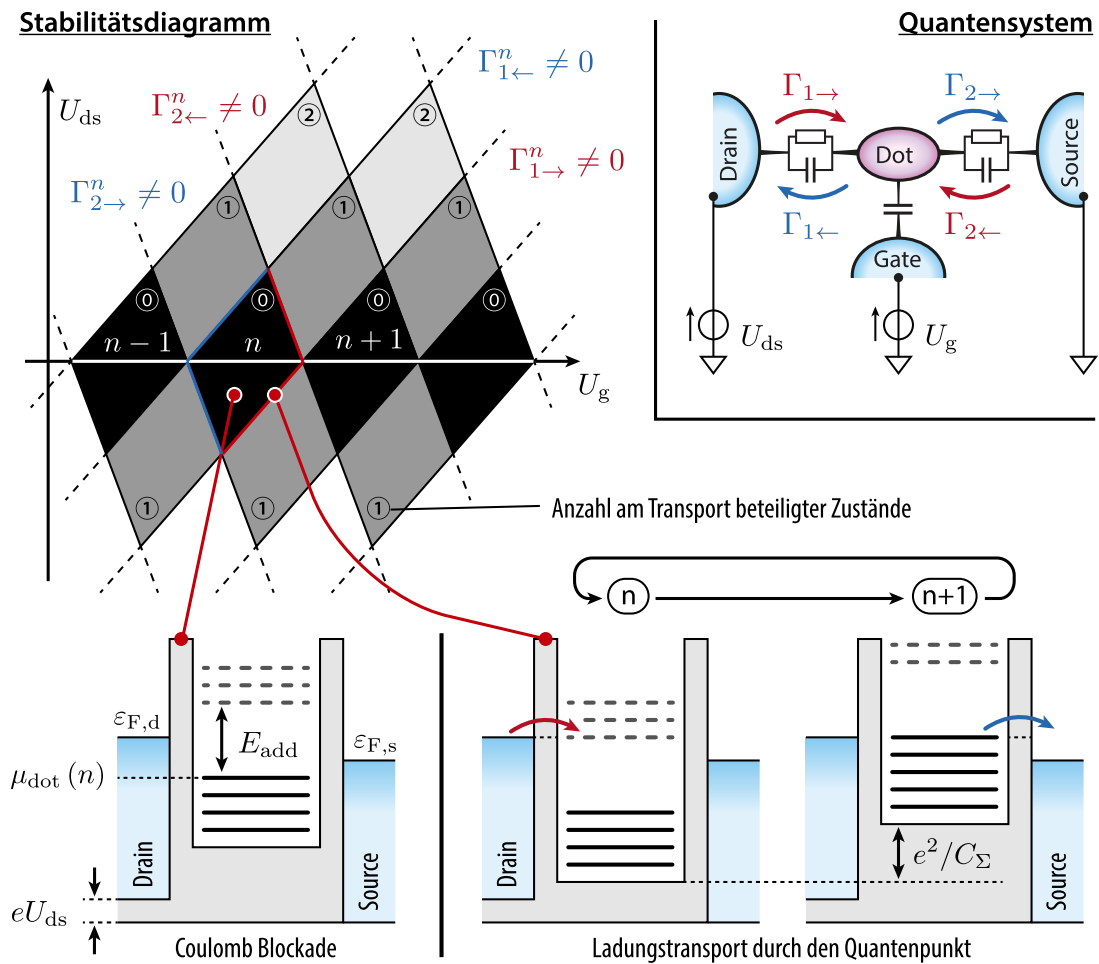


Abb. 2.8.: Oben: Rautenmuster der am Transport durch einen Quantenpunkt beteiligten Zustände; unten: Energiespektrum im Blockade- und Transport-Regime

Im quantenmechanischen Transportregime bilden sich weitere Abstufungen des Leitwerts innerhalb der Nebenrauten²⁸ aus. Die Kanten dieser Feinstruktur sind parallel zu den Rautengrenzen ausgerichtet und haben ihren Ursprung in der zusätzlichen Auflösung des überlagerten, diskreten Anregungsspektrums des Quantenpunkts.

Die Form der Rauten wird durch das Verhältnis der Koppelkapazitäten bestimmt. Über das elektrochemische Potential des Quantenpunkts lassen sich ausgehend von Gleichung 2.14 die Steigungen der Begrenzungsgeraden berechnen. Im Falle eines geerdeten Source-Kontakts erhält man schließlich²⁹:

$$\frac{dU_g^+}{dU_{ds}} = \frac{C_\Sigma - C_s}{C_g} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} = -\frac{C_s}{C_g} \quad (2.20)$$

Aus dem Verhältnis von Rautenhöhe ΔU_g und -breite ΔU_{ds} lässt sich direkt der Konvertierungsfaktor α ableiten. Dieser verknüpft eine Variation des Gatepotentials dU_g mit der einhergehenden elektrostatischen Energieänderung am Quantenpunkt dE_g :

$$\alpha = \left[\frac{dU_g^+}{dU_{ds}} - \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right]^{-1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta U_{ds}}{\Delta U_g} \quad (2.21)$$

$$dE_g = e\alpha \cdot dU_g \quad (2.22)$$

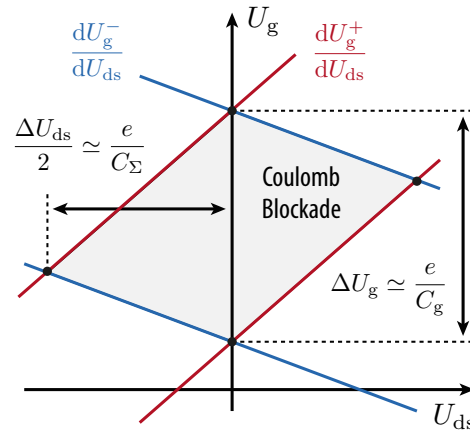


Abb. 2.9.: Coulomb-Blockade-Raute

2.3.4. Spektrale Eigenschaften von Quantenpunkten

Bei einer genaueren Untersuchung der Leitwertkennlinien zeigt sich eine leichte Variation der einzelnen Peakabstände auf kleiner Skala. Gemäß Gleichung 2.15 setzt sich die Additionsenergie für ein Elektron im *Constant-Interaction-Modell* (kurz CIM) aus einem konstanten Beitrag durch die Ladeenergie E_C und ggf. einer zu überwindenden Energiedifferenz zum nächsthöheren, freien Einteilchenzustand zusammen. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Quantenpunkt stets seinen elektronischen Grundzustand einnimmt. Die Verteilung der Eigenenergien ist maßgeblich durch die Form der Ladungsinsel bestimmt, was in Abhängigkeit der Symmetrieeigenschaften zum Teil grundverschiedene Ansätze für eine mathematische Beschreibung der Spektren erforderlich macht. Im Folgenden werden zwei Konzepte vorgestellt.

²⁸Kennlinienbereiche mit endlichem Leitwert

²⁹DURRANI, *Single-electron Devices and Circuits in Silicon*.

Symmetrische Systeme

Die Spektren rotationssymmetrischer Quantenpunkte weisen in der Regel eine geordnete Struktur mit energetisch entarteten Elektronenzuständen auf. Unter bestimmten Voraussetzungen lassen sich solche Systeme zumindest näherungsweise analytisch beschreiben. Hierzu wird gemäß dem CIM die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Ladungsträgern zunächst vernachlässigt und später in Form einer konstanten Dotkapazität berücksichtigt. Als konkretes Beispiel wird ein rotationssymmetrisches, parabolisches Einschlusspotential der Form $U(r) = \frac{1}{2}m^*\omega_0^2r^2$ betrachtet, welches einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator darstellt. Im Falle eines senkrecht zur Einschlussebene orientierten B -Feldes sind die Lösungen der Schrödingergleichung durch die sogenannten *Fock-Darwin-Zustände* gegeben^{30,31}. Die Wellenfunktionen haben dabei die folgende Form^{32,33}:

$$\Psi_{n,l}(r,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} \sqrt{\frac{n!}{(n+|l|)!}} \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{4l_B^2} + il\phi\right) \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{2}l_B}\right)^{|l|} \cdot L_n^{|l|}\left(\frac{r^2}{2l_B^2}\right) \quad (2.23)$$

Hierbei bezeichnen $L_n^{|l|}$ die zugeordneten Laguerre-Polynome und $l_B = \sqrt{\hbar/m^*\Omega}$ die sogenannte Landau'sche magnetische Länge mit $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}/2$ und der Zyklotron-Kreisfrequenz $\omega_c = eB/m^*$. Die entsprechenden Eigenenergien lauten:

$$E_{n,l} = (2n + |l| + 1) \cdot \hbar\Omega - \frac{1}{2}l\hbar\omega_c \quad (2.24)$$

Abbildung 2.10 illustriert die Betragsquadrate der Wellenfunktionen für ausgewählte Zustände bei abgeschaltetem Magnetfeld. Diese können als Orbitale (Elektronenaufenthaltswahrscheinlichkeitsräume), analog zur Elektronenhülle von Atomen interpretiert werden. Die radiale Quantenzahl $n \in \mathbb{N}_0$ bestimmt die Anzahl von Knoten in radialer Richtung, während $l \in \mathbb{Z}$ den Drehimpuls des Oszillators quantisiert. Jeder Zustand ist bei vernachlässigbarer Zeeman-Aufspaltung zweifach spinentartet. Das im unteren Bereich dargestellte Spektrum weist eine äquidistante Schalenstruktur auf. Die gruppierten Zustände sind gemäß Gleichung 2.24 energetisch entartet³⁴, was auf die Rotationssymmetrie des gewählten Einschlusspotentials zurückzuführen ist.

Da im Grundzustand des Systems stets die energetisch niedrigsten Orbitale besetzt werden, liegt für Elektronenzahlen $n_e = s(s+1) = 2, 6, 12, \dots$ mit $s \in \mathbb{N}_{>0}$ jeweils eine Konfiguration mit abgeschlossener äußerer Schale s vor. Zum Hinzufügen eines weiteren Elektrons muss folglich neben der Ladeenergie e^2/C_Σ (siehe Gleichung 2.11) zusätzlich die Energiedifferenz $\Delta E = \hbar\omega_0$ bis zum nächsten freien Einteilchenzustand aufgebracht werden. Dies äußert sich in entsprechend größeren Abständen der betreffenden Leitwertpeaks.

³⁰FOCK, „Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld“.

³¹DARWIN, „The Diamagnetism of the Free Electron“.

³²ETO, „Electronic Structures of Few Electrons in a Quantum Dot under Magnetic Fields“.

³³KOUWENHOVEN, AUSTING und TARUCHA, „Few-electron quantum dots“.

³⁴Die einzelnen Niveaus sind aus Darstellungsgründen separiert dargestellt

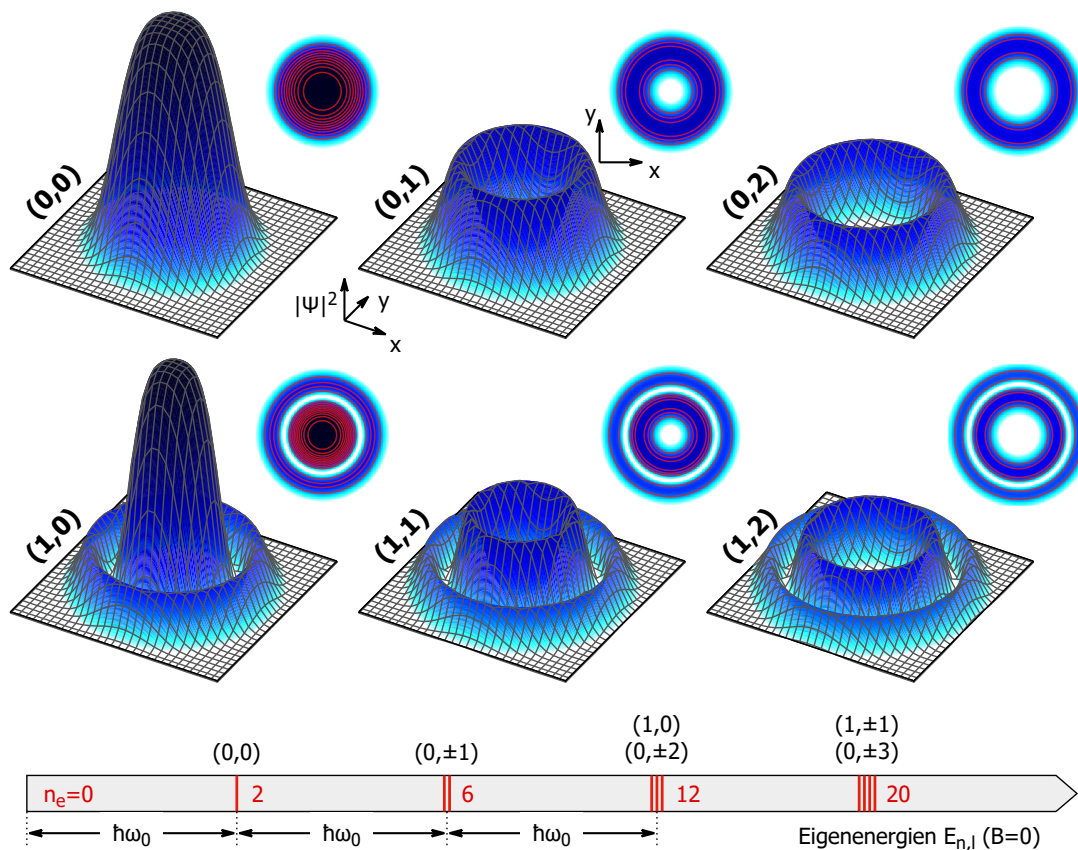


Abb. 2.10.: Visualisierung der Orbitale zu ausgewählten Fock–Darwin–Zuständen und zugehöriges Energiespektrum in Abwesenheit eines externen Magnetfeldes

Für $B \neq 0$ wird die Entartung der Niveaus aufgehoben und die Zustände fächern in Abhängigkeit ihrer Quantenzahlen mit zunehmender Magnetfeldstärke immer weiter auf. Schneiden sich die Energien eines besetzten und unbesetzten Zustands, so findet ein Orbitalübergang des betreffenden Elektrons statt³⁵. Ab einer gewissen Magnetfeldstärke sind schließlich nur noch die Niveaus $(0, l)$ mit $l \geq 0$ besetzt, was als „niedrigster Landau-Zustand“ bezeichnet wird. Bei realen Atomen sind derartige Übergänge erst für sehr viel größere, im Labor nicht realisierbare Magnetfelder zu erwarten³⁶, weshalb Quantenpunkte als Modellsysteme von besonderem Interesse sind.

Gemessene Energiespektren von kreisförmigen Quantenpunkten zeigen eine gute Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen³⁷. Rotationssymmetrische Dotgeometrien lassen sich besonders gut mittels vertikaler Säulenstrukturen realisieren. Diese bieten gegenüber 2DEG–basierten Systemen den Vorteil, die Dotgröße mittels umschließender Side–Gates variieren zu können, ohne dabei die Form des Einschlusspotentials maßgeblich

³⁵ ASHOORI u. a., „N-electron ground state energies of a quantum dot in magnetic field“.

³⁶ ROSNER u. a., „Hydrogen atoms in arbitrary magnetic fields. I. Energy levels and wavefunctions“.

³⁷ TARUCHA u. a., „Electronic states in quantum dot atoms and molecules“.

2. Theoretische Grundlagen

zu verändern. Zudem wird die Reservoirankopplung nur schwach durch das Steuergate beeinflusst. Die Tunnelströme sind somit auch im Regime kleiner Besetzungszahlen ausreichend groß, um Ladungsänderungen über Leitwertpeaks erfassen zu können.

Chaotische Systeme

Bereits kleine Abweichungen von einer rotationssymmetrischen Quantenpunktform führen zu einem Übergang des geordneten Energiespektrums zu unstrukturierten, chaotischen Verteilungen. Diese Eigenschaft ist typisch für laterale Systeme, welche elektrostatisch mittels Splitgates definiert werden. Eine Änderung der Gatespannung bewirkt hier zwangsläufig eine Verformung des Einschlusspotentials und folglich eine stetige Modifikation des Einteilchenenergiespektrums.

Aufgrund der Nichteignung analytischer Methoden, werden zur Beschreibung und Charakterisierung des quantenchaotischen Regimes in der Regel statistische Ansätze verfolgt. Ein in diesem Zusammenhang intensiv erforschtes Modellsystem, welches Analogien zu realen Quantenpunkten aufweist, stellt das *dynamische Billard* dar³⁸. Hierbei werden Trajektorien von nicht-wechselwirkenden, ballistischen Teilchen untersucht, welche an den Rändern eines Hardwall-Potentialtopfes elastisch stoßen. Im Fall perfekt kreisförmiger „Wände“ ergeben sich stabile, geschlossene Bahnen, die bei einer leichten Deformation – beispielsweise durch Übergang zu einem stadionförmigen Potential – chaotisch werden. Ein mathematisches Konzept mit welchem sich unter anderem die Verteilung der Eigenenergien³⁹ sowie die Transporteigenschaften⁴⁰ solcher Systeme beschreiben lässt ist die in den 60er Jahren entwickelte *Random Matrix Theorie*⁴¹ (kurz *RMT*). Deren Grundidee und zentrale Aussagen werden im Folgenden skizziert.

Random Matrix Theorie: Die RMT basiert auf einer statistischen Beschreibung von chaotischen Systemen mittels Ensembles von $N \times N$ Hamiltonmatrizen $\mathbf{H} = (h_{ij})$ mit zufälligen, gaußverteilten Elementen im Grenzfall $N \rightarrow \infty$. Im Gegensatz zu alternativen stochastischen Ansätzen wird dabei nicht von einer Unkenntnis des exakten dynamischen Systemzustandes ausgegangen, sondern vielmehr von einer prinzipiellen Unsicherheit des beschreibenden Hamiltonoperators. Fundamentale Symmetrieeigenschaften spiegeln sich in der Form der Zufallsmatrizen wider. Die Klasse der sogenannten *Gaußschen Ensembles* unterscheidet drei allgemeine Fälle:

- **Orthogonal:** Zeitumkehrinvariantes System mit zusätzlicher Erhaltung des Elektrospins oder ganzzahligem Gesamtdrehimpuls $\Rightarrow h_{ij} = h_{ji} ; h_{ij} \in \mathbb{R}$
- **Unitär:** Systeme mit gebrochener Zeitumkehrinvarianz $\Rightarrow h_{ij} = \overline{h_{ji}} ; h_{ij} \in \mathbb{C}$

³⁸ROBNIK, „Quantising a generic family of billiards with analytic boundaries“.

³⁹ALHASSID, „The statistical theory of quantum dots“.

⁴⁰BEENAKKER, „Random-matrix theory of quantum transport“.

⁴¹MEHTA, *Random Matrices*.

- **Symplektisch**⁴²: Zeitumkehrinvariantes System mit gebrochener Spin-Rotationsinvarianz und halbzahligem Gesamtdrehimpuls $\Rightarrow h_{ij} \in \mathbb{H}$

Die Ensembles können durch einen Symmetrie-Index $\beta = 1, 2, 4$ charakterisiert werden, welcher die jeweils charakteristische Dimensionalität der einzelnen Matrixelemente ($h_{ij} \in \mathbb{R}^\beta$) widerspiegelt. Sei $P(\mathbf{H})d\mathbf{H}$ die Wahrscheinlichkeit, eine Matrix \mathbf{H} mit Elementen im Intervall $h_{ij} \pm dh_{ij}$ vorzufinden. Die Verteilungsfunktion muss dabei zwei Voraussetzungen erfüllen:

$$P(\mathbf{H}) \stackrel{!}{=} P(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{W}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{W} = \begin{cases} \text{orthogonal} & \text{für } \beta = 1 \\ \text{unitär} & \text{für } \beta = 2 \\ \text{symplektisch} & \text{für } \beta = 4 \end{cases} \quad (2.25a)$$

$$P(\mathbf{H}) \stackrel{!}{=} \prod_{i \leq j} P_{ij}(h_{ij}) \quad (2.25b)$$

Gleichung 2.25a bedeutet eine Invarianz der Wahrscheinlichkeit bezüglich einer beliebigen Basistransformation und somit die statistische Äquivalenz verschiedener Basissysteme. Die zweite Bedingung kann als stochastische Unabhängigkeit der einzelnen Matrixelemente interpretiert werden. Ein allgemeines Ensemble, welches beide Forderungen gleichzeitig erfüllt ist gegeben durch:

$$P(\mathbf{H}) \propto \exp \left[-\frac{\beta}{2a^2} \text{Spur}(\mathbf{H}^2) \right] \quad (2.26)$$

Durch Diagonalisieren des Hamiltonoperators erhält man die Eigenwerte des Systems. Zur Berechnung deren Verteilung muss Gleichung 2.26 mit der Jacobi-Determinante der entsprechenden Basistransformation multipliziert werden:

$$\mathbf{E} \equiv \text{diag}(E_1, \dots, E_N) = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{W} \quad (2.27)$$

$$P(E_1, \dots, E_N) \propto \underbrace{\prod_{m < n} |E_m - E_n|^\beta}_{\propto J(\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E})} \cdot \underbrace{\exp \left[-\frac{\beta}{2a^2} \sum_i E_i^2 \right]}_{\propto P(\mathbf{H})} \quad (2.28)$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Spur der diagonalisierbaren Matrix \mathbf{H}^2 der Summe ihrer Eigenwerte $\sum_i E_i^2$ entspricht. Aus der Verteilungsfunktion lassen sich universelle Eigenschaften des Systems ableiten. So wird beispielsweise die mittlere Zustandsdichte, welche auch als Spektralmaß der Eigenwerte bezeichnet wird, durch das *Wignersche Halbkreisgesetz* beschrieben⁴³. Im Limes großer Matrizen gilt für Gaußsche Ensembles:

$$\langle \rho(E) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi a^2 \beta} \sqrt{4Na^2\beta - E^2}, & \text{für } |E| \leq 2a\sqrt{N\beta} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.29)$$

⁴²Eine symplektische Matrix ist unitär und besitzt reelle Quaternionen als Elemente

⁴³WIGNER, „On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices“.

2. Theoretische Grundlagen

Eine statistische Beschreibung der Leitwertpeakabstände in Quantenpunkten kann durch eine Kombination der Random Matrix Theorie mit dem Constant–Interaction–Modell erfolgen. Die Verteilungsfunktion der normierten Abstände benachbarter Eigenenergieniveaus im Einteilchenspektrum $\Delta\varepsilon = \Delta E / \langle \Delta E \rangle$ konvergiert für $N \rightarrow \infty$ gegen die sogenannte *Wigner–Vermutung*. Im Falle eines Gaußschen orthogonalen Ensembles (verschwindendes Magnetfeld⁴⁴) lautet diese⁴⁵:

$$P(\Delta\varepsilon) = \frac{\pi}{2} (\Delta\varepsilon) \cdot \exp\left[-\frac{\pi}{4} (\Delta\varepsilon)^2\right] \quad (2.30)$$

Für die mittlere Fluktuation der Additionsenergie $E_{\text{add}} = e\alpha\Delta U_g$ folgt schließlich:

$$\delta(E_{\text{add}}) \equiv \sqrt{\langle E_{\text{add}}^2 \rangle - \langle E_{\text{add}} \rangle^2} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \cdot \langle \Delta E \rangle \simeq 0,52 \cdot \langle \Delta E \rangle \quad (2.31)$$

Grenzen der Random Matrix Theorie: Einige Experimente zeigen zum Teil deutliche statistische Abweichungen der gemessenen Quantenpunktspektren von den Vorhersagen der RMT. Als mögliche Ursache für die im Vergleich zu große Streuung der Leitwertpeakabstände wird eine dominierende Fluktuation der Ladeenergie in Abhängigkeit der Quantenpunktbesetzung vermutet^{46,47}. Eine theoretische Beschreibung kann durch Berücksichtigung einer nicht konstanten Coulomb–Wechselwirkung der Inselekttronen erfolgen. Dabei werden zufällig verteilte Abstände zwischen den unterschiedlich dicht gepackten Ladungsträgern innerhalb des begrenzten Quantenpunktvolumens angenommen. Numerische Simulationen prognostizieren einen Übergang zu einer näherungsweise gaußförmigen Verteilung der Additionsenergien. Weitere Untersuchungen deuten darüber hinaus auf einen signifikanten Einfluss des Einschusspotentialprofils im Randbereich auf die spektralen Eigenschaften eines Quantenpunkts hin⁴⁸.

⁴⁴Ein externes Magnetfeld führt zu einer Aufhebung der Zeitumkehrinvarianz

⁴⁵SOHN, KOUWENHOVEN und SCHÖN, *Mesoscopic Electron Transport*.

⁴⁶SIVAN u. a., „Mesoscopic Fluctuations in the Ground State Energy of Disordered Quantum Dots“.

⁴⁷SIMMEL u. a., „Statistics of the Coulomb-blockade peak spacings of a silicon quantum dot“.

⁴⁸BERGGREN und JI, „Quantum chaos in nano-sized billiards in layered two-dimensional semiconductor structures“.

2.4. Simulation gekoppelter Quantensysteme

2.4.1. Motivation

Eine Berechnung der Transporteigenschaften von Einzelelektronen-Schaltungen kann im Allgemeinen nicht analytisch erfolgen, sondern erfordert den Einsatz numerischer Methoden⁴⁹. Zur Simulation von Systemen aus mehreren vernetzten Ladungsinseln wurde daher ein Computerprogramm geschrieben, welches auf einem iterativen Lösungsverfahren der sogenannten *Mastergleichung* beruht. Mit Hilfe des im Folgenden vorgestellten Algorithmus können Ströme durch beliebige Tunnelkontakte, sowie die mittlere Besetzung der einzelnen Quantenpunkte in Abhängigkeit der Reservoirpotentiale berechnet werden. Dabei lassen sich insbesondere die Auswirkungen unterschiedlicher Kopplungsparameter (ohmsche Widerstände, Kapazitäten) und Temperaturen untersuchen und somit elektronisch vermessene, reale Quantensysteme parametrisieren. Unter der Annahme eines metallischen Transportregimes erfolgt keine quantenmechanische Berücksichtigung von Anregungsspektren ($\Delta E \ll k_B T$).

2.4.2. Modell

Die Beschreibung des zu simulierenden Quantensystems erfolgt in einer externen Parameterdatei, welche beim Programmaufruf zur Initialisierung geladen wird. Hierin kann eine beliebige Anzahl von externen Quellen und Quantenpunkten angelegt werden, die jeweils alle über Tunnelkontakte mit frei definierbarer Kapazität und ohmschem Widerstand miteinander verbunden sind. Durch eine entsprechende Wahl der Kopplungsparameter kann somit festgelegt werden, ob ein Reservoir entweder als Gate ($R \rightarrow \infty$) oder als Zuleitung (*Source / Drain*) fungiert. Abbildung 2.11 illustriert diesen allgemeinen Ansatz am Beispiel von zwei Quantenpunkten und vier Reservoirs.

Im Folgenden wird ein universelles System, bestehend aus d Quantenpunkten und r Reservoirs betrachtet. Dessen Basiszustände⁵⁰ können in Form eines Vektors $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ beschrieben werden. Dabei stellt der Eintrag n_i die Elektronenbesetzung des i -ten Quantenpunkts dar. Die Gesamtladung aller Dots ist dann durch die Summe aller Vektorkomponenten $N = \sum_{i=1}^d n_i$ gegeben.

2.4.3. Übergangswahrscheinlichkeiten

Eine Zustandsänderung des Systems $\mathbf{n}_1 \rightarrow \mathbf{n}_2$ kann grundsätzlich nur über den Transport von Ladungsträgern durch einen der Tunnelkontakte erfolgen. Dabei werden in diesem

⁴⁹ AMAKAWA u. a., „Single-electron circuit simulation“.

⁵⁰ Zustände mit ganzzahliger Besetzung jedes einzelnen Quantenpunkts

2. Theoretische Grundlagen

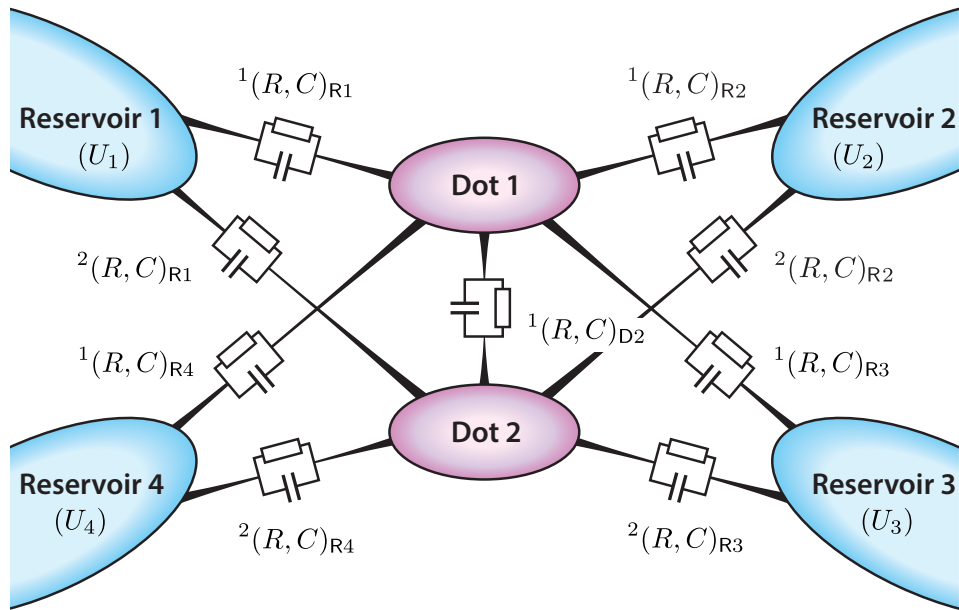


Abb. 2.11.: Schematische Darstellung eines Quantensystems, bestehend aus mehreren gekoppelten Quantenpunkten und Reservoirs.

vereinfachten Modell ausschließlich nicht gekoppelte Übergänge einzelner Elektronen berücksichtigt. Die Änderung der Systemgesamtladung ist demnach pro Transmissionsprozess auf $\Delta N = 0, \pm 1$ beschränkt. Die Tunnelrate bzw. -wahrscheinlichkeit über einen beliebigen Kontakt i ist gegeben durch⁵¹:

$$\Gamma_i(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) = \frac{1}{R_i e^2} \left(\frac{-\Delta E(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)}{1 - \exp\left[\frac{\Delta E(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1)}{k_B T}\right]} \right) \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnet $\Delta E(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1) = E_2 - E_1 + w_s$ die Energiedifferenz der durch den Übergang miteinander verbundenen Systemzustände \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_2 . Diese setzt sich zusammen aus Beiträgen der elektrostatischen Ladeenergien und der von den Spannungsquellen (Reservoirs) verrichteten Arbeit w_s .

$$\Delta N = \pm 1 \quad \rightarrow \quad \Delta E_{n_j \rightarrow n_{j \pm 1}} = \frac{e^2}{j C_\Sigma} \left(\frac{1}{2} \pm n_j \right) + w_s \quad (2.33a)$$

$$\Delta N = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta E_{\substack{n_j \rightarrow n_{j+1} \\ n_k \rightarrow n_{k-1}}} = \frac{e^2}{j C_\Sigma} \left(\frac{1}{2} + n_j \right) + \frac{e^2}{k C_\Sigma} \left(\frac{1}{2} - n_k \right) + w_s \quad (2.33b)$$

In der gewählten Nomenklatur wird der als Bezugspunkt fungierende Quantenpunkt stets in Form einer Hochstellung (Symbol bzw. Zahl) vor dem betreffenden Parameter indiziert.

⁵¹GRABERT UND DEVORET, *Single Charge Tunneling: Coulomb Blockade Phenomena In Nanostructures*.

${}^j C_\Sigma$ bezeichnet demnach die Summe aller Koppelkapazitäten des j -ten Quantenpunkts. Die von den Quellen verrichtete Arbeit ist gegeben durch:

$$w_s = - \sum (\Delta Q_i U_i) + e U_j \cdot \Delta N \quad (2.34)$$

Hierbei wird über die Beiträge aller mit einem Reservoir verbundenen Koppelkapazitäten aufsummiert. ΔQ_i bezeichnet die mit dem Konfigurationsübergang verbundene Ladungsänderung an Kondensator i . Diese hängt sowohl von der Quantenpunktbesetzung, als auch von den jeweils anliegenden Quellpotentialen ab. Die Berechnung der Kondensatorladungen erfolgt unter Anwendung der Kirchhoffschen Maschenregel durch Aufstellen und Lösen eines linearen Gleichungssystems und wird in Anhang A näher erläutert.

2.4.4. Mastergleichung

Die Wahrscheinlichkeiten $\sigma(\mathbf{n})$ mit denen die einzelnen Systemzustände eingenommen werden können iterativ durch Aufstellen und Lösen der sogenannten *Mastergleichung*⁵² berechnet werden. Dieser Ansatz beruht auf einer Bilanzierung sämtlicher Übergangsraten Γ_i zwischen „benachbarten“ Zuständen⁵³. Dabei wird als Stabilitätsbedingung angenommen, dass im dynamischen Gleichgewicht die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Systemzustände konstant sind. Im Falle eines d -dimensionalen Zustandsraumes lautet die zu lösende Ratengleichung:

$$\sigma(\mathbf{n}) \cdot \sum_i \Gamma_i(\mathbf{n}) = \sum_{i=1}^d \left[\underbrace{\sigma(\mathbf{n} - \hat{e}_i) \oplus \Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \hat{e}_i)}_{\Delta N=+1} + \underbrace{\sigma(\mathbf{n} + \hat{e}_i) \ominus \Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \hat{e}_i)}_{\Delta N=-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^d \underbrace{\sigma(\mathbf{n} - \hat{e}_i + \hat{e}_j) \odot \Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \hat{e}_i + \hat{e}_j)}_{\Delta N=0} \right] \quad (2.35)$$

Die linke Seite der Gleichung summiert über die Raten aller möglichen Pfade, über die das Quantensystem Zustand \mathbf{n} verlassen kann. Dem gegenüber stehen sämtliche Tunnelprozesse, welche von einem beliebigen Nachbarzustand ausgehend zurück führen. Jede Rate ist dabei mit der Besetzung des jeweiligen Ausgangszustands zu multiplizieren, woraus letztlich eine gegenseitige Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten resultiert. Die mit einer Ladungsänderung ΔN verbundenen Übergangsraten verstehen sich jeweils als Summe der Einzelbeiträge aller Reservoirkopplungen, da der Elektronentransport im Allgemeinen über mehrere Quellen erfolgen kann. Die Superskripte \oplus , \ominus und \odot indizieren,

⁵²BEENAKKER, „Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot“.

⁵³als benachbart werden Zustände bezeichnet, die über einen einzelnen Transmissionsprozess direkt ineinander überführt werden können

2. Theoretische Grundlagen

ob bei einem Übergang die Gesamtladung zunimmt, abnimmt oder unverändert bleibt (*Interdot-Tunneling*). Für ein System mit r Reservoirs gilt:

$$\oplus/\ominus \Gamma(\mathbf{n}, \mathbf{n} \mp \hat{e}_i) = \sum_{k=1}^r \Gamma_k(\mathbf{n}, \mathbf{n} \mp \hat{e}_i) \quad (2.36)$$

Die Gesamtheit der Besetzungswahrscheinlichkeiten muss gleichzeitig der folgenden Normalisierungsbedingung genügen:

$$\sum_{\forall \mathbf{n}_i} \sigma(\mathbf{n}_i) = 1 \quad (2.37)$$

Abbildung 2.12 illustriert die beschriebenen Zusammenhänge für einen zweidimensionalen Zustandsraum (zwei Quantenpunkte). Zugunsten einer besseren Übersichtlichkeit wurde nur eine Auswahl aller erlaubten Übergänge dargestellt. Diese sind grundsätzlich entlang der gestrichelt eingezeichneten Pfade erlaubt.

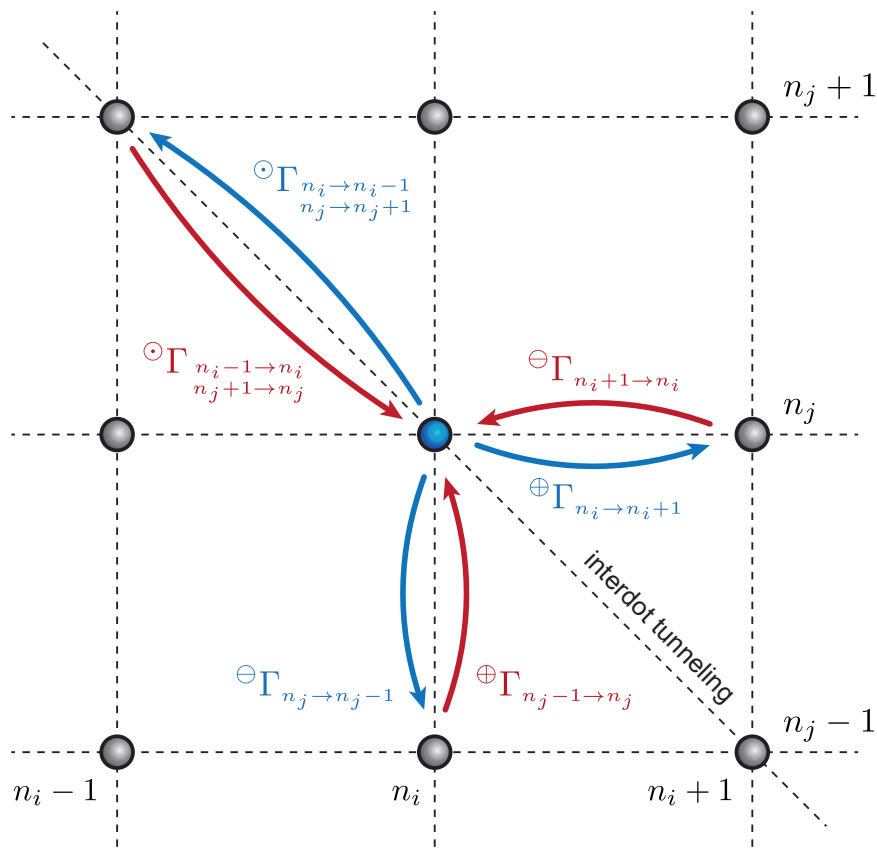


Abb. 2.12.: Zustandsübergänge in einem 2D-System. Tunnelprozesse sind nur entlang der gestrichelten Pfade zwischen benachbarten Zuständen erlaubt.

2.4.5. Programmablauf

Abbildung 2.13 zeigt den schematischen Ablauf des Simulationsprogramms in Form eines Flussdiagramms. Der Algorithmus erlaubt eine Berechnung der mittleren Quantenpunktbesetzungen und Tunnelströme in Form zweidimensionaler Kennlinienfelder. Als Variablen können dabei beliebige Reservoirpotentiale sowie die Temperatur definiert werden. Die Wahl der jeweiligen Wertebereiche und Auflösungen erfolgt über eine Initialisierungsdatei. Diese ermöglicht darüber hinaus den Zugriff auf diverse Simulationsparameter, über die beispielsweise die Balance zwischen Rechengenauigkeit und –geschwindigkeit justiert werden kann.

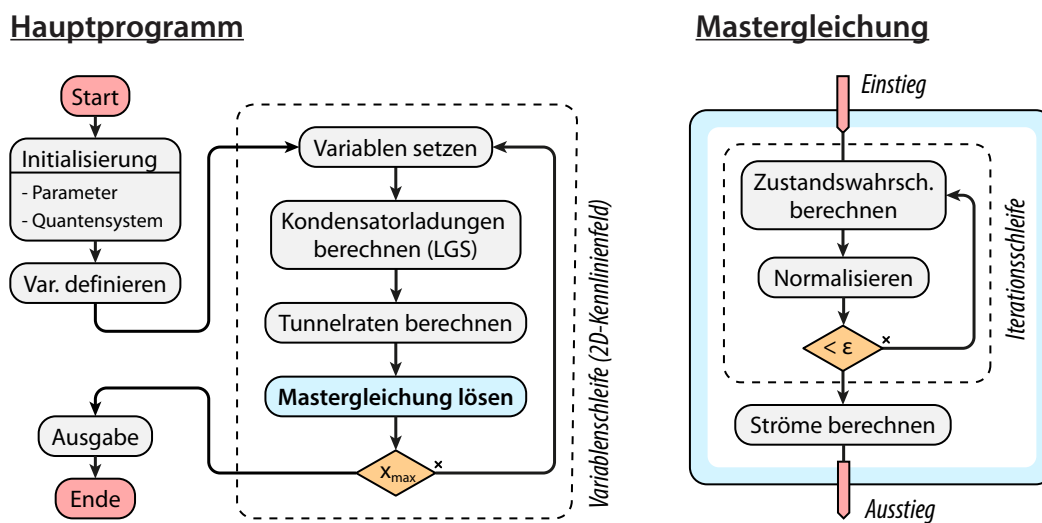


Abb. 2.13.: Flussdiagramm des Programmablaufs zur Simulation beliebig vernetzter Quantenpunktssysteme

Für jedes Variablen–Wertepaar werden zunächst gemäß des in Anhang A erläuterten Verfahrens die Kondensatorladungen für alle zu berücksichtigenden Ladungskonfigurationen bestimmt. Diese dienen als Grundlage für die anschließende Berechnung der einzelnen Tunnelraten ${}^{\oplus}\Gamma$, ${}^{\ominus}\Gamma$ und ${}^{\circ}\Gamma(n_2, n_1)$ zwischen den jeweiligen Zuständen anhand Gleichung 2.36. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten $\sigma(n)$ werden mit einem geeigneten Wert initialisiert und durch wiederholte Anwendung von Gleichung 2.35 in mehreren Durchläufen iterativ bestimmt. Die Verteilung konvergiert dabei gegen einen stabilen Gleichgewichtszustand, dessen Annäherung per Differenzbildung (Epsilon–Kriterium) fortwährend überwacht wird. Nach jedem Iterationsschritt erfolgt eine Normierung der Besetzungswahrscheinlichkeiten gemäß Gleichung 2.37.

Der Gesamtstrom über einen beliebigen Tunnelkontakt k setzt sich aus Beiträgen aller Systemzustände, gewichtet mit ihrer jeweiligen Besetzungswahrscheinlichkeit zusammen.

2. Theoretische Grundlagen

Dabei genügt in der Praxis eine Berücksichtigung der signifikanten Terme aus dem direkten Umfeld von σ_{\max} .

$$I_k = e \sum_{\forall \mathbf{n}_i} \sigma(\mathbf{n}_i) [\Gamma_k^{\rightarrow}(\mathbf{n}_i) - \Gamma_k^{\leftarrow}(\mathbf{n}_i)] \quad (2.38)$$

Die Pfeile unterscheiden jeweils zwei Tunnelraten mit entgegengerichtetem Elektronenfluss, zwischen welchen bilanziert werden muss.

Rechenaufwand: Zur Verringerung der Rechenzeit wird nur eine begrenzte Anzahl von Ladungskonfigurationen im Bereich des wahrscheinlichsten Systemzustands \mathbf{n}_{\max} berücksichtigt. Die Menge M der Zustände, sowie deren Mächtigkeit sind bei einem System mit d Quantenpunkten und einem maximalen Signifikanzradius von Δn Zuständen pro Dimension gegeben durch

$$M = \left\{ \mathbf{n}_{\max} \pm j \cdot \hat{e}_i \mid \begin{array}{l} 0 < i \leq d \\ 0 \leq j \leq \Delta n \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad |M| = (2 \cdot \Delta n + 1)^d \quad (2.39)$$

Bei größeren Temperaturen müssen aufgrund einer Verbreiterung der Wahrscheinlichkeitsverteilung entsprechend mehr Zustände berücksichtigt werden, was deutlich längere Programmlaufzeiten bedingt. Der Rechenaufwand wächst zudem exponentiell mit der Dimensionalität des Zustandsraumes, wodurch Simulationen in der Praxis auf maximal drei Quantenpunkte beschränkt sind.

Die gegenseitige Unabhängigkeit der einzelnen Kennlinienpunkte erlaubt eine Parallelisierung der Rechenroutine. Das in der Sprache C++ geschriebene Programm wurde für die Ausführung auf modernen PC-Systemen mit Mehrkernprozessoren optimiert. Durch Abspaltung können beliebig viele Unterprozesse („Forks“) erzeugt werden, die gleichzeitig jeweils unterschiedliche Kennliniensegmente durchlaufen. Abhängig von der Anzahl an CPU-Kernen bedeutet dies eine deutliche Reduktion der Gesamtrechenzeit.

2.4.6. Beispielsimulation

Abschließend wird das Simulationsprogramm am Beispiel eines seriellen Doppelquantenpunkts demonstriert und verifiziert. Das betrachtete Modellsystem besteht aus zwei Ladungsinseln, die jeweils mit einem eigenen Reservoir (*Source* und *Drain*) sowie untereinander durch Tunnelkontakte verbunden sind. Zur einfacheren Interpretation der Kennlinienfelder ist jedes der Steuergates an nur einen, zugeordneten Quantenpunkt kapazitiv gekoppelt (siehe Abbildung 2.14, oben rechts).

Bei ausreichend schwacher gegenseitiger Kopplung der Quantenpunkte ist ein Ladungstransport zwischen den Reservoirs im linearen Regime nur an den sogenannten „*Tripel-Punkten*“ erlaubt. Diese zeichnen Gatepotentiale aus, für welche die Energieniveaus beliebiger Zustände an beiden Dots mit der Reservoir-Fermienergie übereinstimmen. Eine

solche Ausrichtung erlaubt das Schleusen einzelner Elektronen bzw. unbesetzter Zustände (Löcherleitung) durch den Doppeldot über eine Abfolge von drei Systemkonfigurationen (siehe Abbildung 2.14). Jeweils sechs Tripel-Punkte bilden die Ecken einer Wabe im Stabilitätsdiagramm, welche sich im Inneren durch eine einheitliche (wahrscheinlichste) Ladungskonfiguration des Systems auszeichnet. Die Form der Zellen hängt maßgeblich von der relativen Kopplungsstärke zwischen den Quantenpunkten ab. Dabei lässt sich das folgende Grenzwertverhalten beobachten (siehe Abbildung 2.15):

Schwache Kopplung $C_i \ll C_g$: Im Fall einer verschwindenden Kapazität zwischen den Quantenpunkten kann deren Ladungszustand weitgehend unabhängig voneinander über die entsprechenden Steuergates variiert werden. Durch ein Zusammenrücken von jeweils zwei Tripel-Punkten nehmen die Waben eine näherungsweise rechteckige Form an. Beide Kantenlängen sind gemäß Gleichung 2.20 maßgeblich durch die zugeordnete Gatekapazität bestimmt.

Starke Kopplung $C_i \gg C_g$: Das Verhalten des Systems in diesem Regime kann anschaulich durch ein Verschmelzen der beiden Ladungsinselfen zu einem großen Quantenpunkt erklärt werden. Die Tripel-Punkte richten sich im Stabilitätsdiagramm entlang äquidistanter, paralleler Linien aus, sodass Streifen mit jeweils konstanter Gesamtladung entstehen. Innerhalb dieser Zonen kann der Ladungsschwerpunkt über die Gatepotentiale quasi kontinuierlich zwischen den Teilbereichen verschoben werden. Das System zeigt typische Coulomb-Blockade-Oszillationen bei einer Änderung der Gesamtladung entlang der Diagonalen.

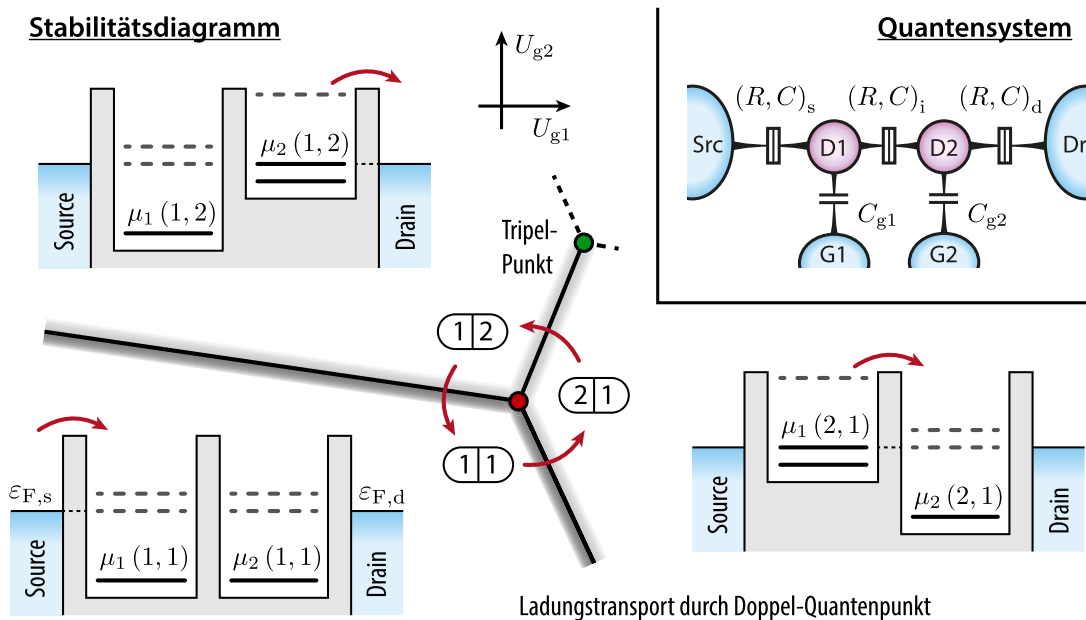


Abb. 2.14.: Ladungstransport durch eine Serienschaltung zweier Quantenpunkte über drei Zustände (Tripel-Punkt); Inset: Struktur des Quantensystems (nach ⁵⁴)

2. Theoretische Grundlagen

Abbildung 2.15 zeigt die simulierte Ladung der zwei Quantenpunkte $q_{\Sigma} = q_1 + q_2$ (oben) sowie den differentiellen Leitwert g zwischen den Reservoirs (unten) für drei unterschiedliche Kopplungsverhältnisse. Hierbei wurde $C_{g1} = C_{g2} = 20$ aF konstant gewählt und die Interdot-Kapazität, ausgehend von $C_i = 2$ aF jeweils verzehnfacht. Die Temperatur des Modellsystems beträgt 2 K, um den Einfluss der thermischen Verbreiterung zu demonstrieren. Die Farbe der eingezeichneten Tripel-Punkte indiziert, ob der Ladungstransport über Elektronen (rot) oder Löcher (grün) erfolgt.

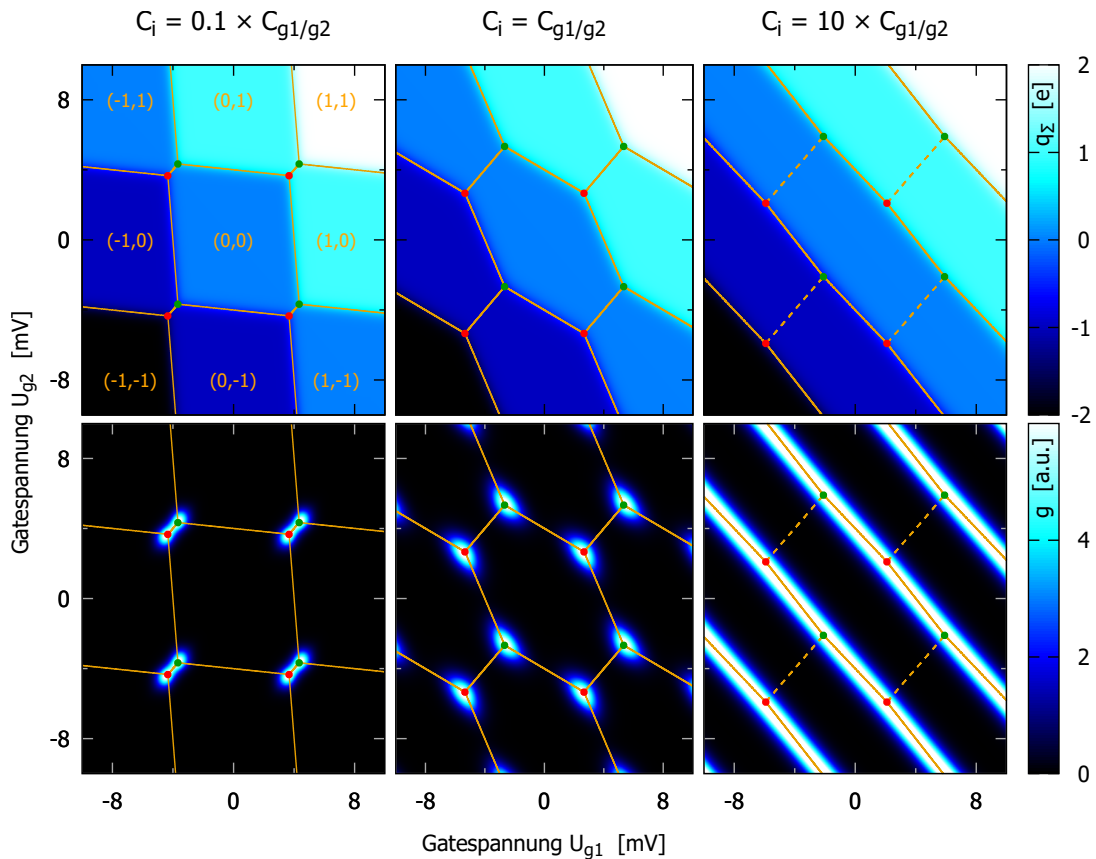


Abb. 2.15.: Simulierte Gesamtladung (*oben*) und Tunnelstrom (*unten*) durch einen seriellen Doppelquantenpunkt für unterschiedliche Kapazitätsverhältnisse $C_i/C_{g1,2}$.

Die orangefarbenen Linien entsprechen den analytisch berechneten Grenzen der *Honeycomb*-Strukturen im Stabilitätsdiagramm⁵⁵. Dabei zeigt sich in allen Regimen eine gute Übereinstimmung mit den numerisch bestimmten Zonen konstanter Gesamtladung. Der Leitwert zwischen Source und Drain weist erwartungsgemäß Maxima an den Positionen der Tripel-Punkte auf.

⁵⁴WIEL u. a., „Electron transport through double quantum dots“.

⁵⁵Ebd.

2.5. Quanten-Hall-Effekt

Der sogenannte *Quanten-Hall-Effekt* (kurz *QHE*) bezeichnet ein Quantenphänomen, welches in zwei-dimensionalen elektronischen Systemen bei tiefen Temperaturen beobachtet werden kann. Hierzu wird ein Magnetfeld variabler Stärke orthogonal zu einer stromdurchflossenen Leiterfläche angelegt und jeweils die Potentialdifferenzen an der Probe längs und quer zur Stromflussrichtung gemessen (siehe Abbildung 2.16). Im Gegensatz zum klassischen Hall-Effekt, welcher darüber hinaus auch in dreidimensionalen Systemen in Erscheinung tritt, steigt der Hall-Widerstand $R_H \equiv U_{xy}/I$ nicht linear, sondern stufenförmig mit der Magnetfeldstärke an. Dies geht einher mit der Ausbildung von Oszillationen im Längswiderstand $R_L \equiv U_{xx}/I$ der Probe, was als *Schubnikow-de-Haas-Effekt* bezeichnet wird. Die quantisierten Widerstandswerte auf den Hall-Plateaus hängen dabei nicht von Eigenschaften des verwendeten Halbleitermaterials, sondern lediglich von Naturkonstanten ab – der Elementarladung e und dem Planckschen Wirkungsquantum h :

$$R_H = \frac{h}{ne^2} = \frac{25,812807 \text{ k}\Omega}{n} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_{>0} \quad (2.40)$$

Bei niedrigen Magnetfeldstärken ist aufgrund der typischerweise zu beobachtenden Spin-entartung lediglich jede zweite Stufe ausgeprägt ($n = 2m$, $m \in \mathbb{N}_{>0}$). Für die Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts⁵⁶ erhielt Klaus von Klitzing im Jahr 1985 den Nobelpreis für Physik. Die nach ihm benannte Von-Klitzing-Konstante $R_K = h/e^2$ wird seit 1990 aufgrund ihrer einfachen und gleichzeitig präzisen Messbarkeit⁵⁷ als Widerstandsstandard zur Definition der Einheit Ohm verwendet^{58,59}.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Quanten-Hall-Effekt zur Charakterisierung des verwendeten Probenmaterials genutzt (siehe Abschnitt 7). Aus den Widerstandsmessdaten lassen sich zentrale elektrische Eigenschaften des 2DEGs, wie beispielsweise die Ladungsträgerdichte oder die Elektronenbeweglichkeit, ableiten.

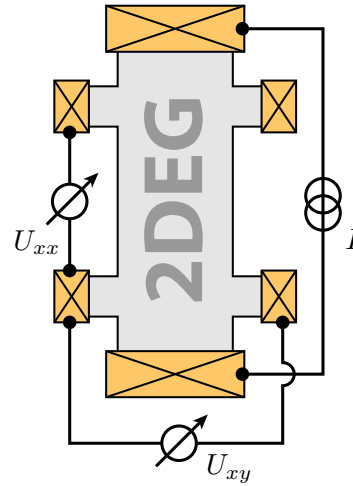


Abb. 2.16.: Messung des QHE

⁵⁶KLITZING, DORDA und PEPPER, „New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance“.

⁵⁷JECKELMANN und JEANNERET, „The quantum Hall effect as an electrical resistance standard“.

⁵⁸TAYLOR und WITT, „New International Electrical Reference Standards Based on the Josephson and Quantum Hall Effects“.

⁵⁹QUINN, „News from the BIPM“.

2.5.1. Landau–Quantisierung

Wie bereits in Abschnitt 2.1 gezeigt, ist die Zustandsdichte eines freien zweidimensionalen Elektronengases konstant und somit insbesondere unabhängig von der Energie. Durch Anlegen eines senkrecht zur Einschlussebene orientierten Magnetfelds werden die zunächst gleichmäßig im k -Unterraum (Ebene) verteilten Eigenzustände des Systems modifiziert⁶⁰. Dies kann durch ein entsprechendes Vektorpotential \mathbf{A} (mit $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) im Hamiltonoperator berücksichtigt werden. Die Schrödingergleichung für ein innerhalb der xy -Ebene liegendes 2DEG lautet dann:

$$\hat{H}\Psi = \left[E_s + \frac{(i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m^*} \right] \Psi(x, y) = E\Psi(x, y) \quad (2.41)$$

Dabei bezeichnet E_s die Subbandenergie und m^* die effektive Elektronenmasse. Bei einer Orientierung des Magnetfelds in z -Richtung erhält man für die Eigenfunktionen mit Hilfe eines Separationsansatzes in Landau–Eichung $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$:

$$\Psi_n(x, y) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{L}} \exp(ikx)}_{\equiv \phi(x)} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{(q + q_k)^2}{2}\right) H_n(q + q_k)}_{\equiv \chi(y)} \quad (2.42)$$

H_n bezeichnet das Hermitesche Polynom vom Grad n , wobei aus Gründen der Darstellung $q = \sqrt{eB/\hbar}y$ und $q_k = \sqrt{eB/\hbar}y_k$ gesetzt wurden. Die Lösungen entsprechen denen eines eindimensionalen harmonischen Oszillators in y -Richtung mit Zentrumsordinate $y_k = \hbar k/eB$. Gemäß der klassischen Interpretation kann dies als eine Kreisbewegung der Elektronen senkrecht zum Magnetfeld auf Zyklotronbahnen aufgefasst werden. Für die zugehörigen Eigenenergien der Zustände erhält man (siehe Abbildung 2.17):

$$E_{n,s} = E_s + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (2.43)$$

Bedingt durch das Magnetfeld kommt es zur Kondensation der gleichverteilten Zustände des freien 2DEGs mit parabolischer Dispersionsrelation in diskrete Landau–Niveaus E_n . Dies wird als *Landau–Quantisierung* bezeichnet und geht einher mit einer Aufspaltung der zunächst konstanten Zustandsdichte in eine Serie äquidistanter δ -Peaks:

$$D_s(E, B) = g_s \cdot \underbrace{\frac{eB}{h}}_{\equiv n_L} \sum_n \delta\left(E - E_s - \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c\right) \quad (2.44)$$

⁶⁰DATTA, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*.

wobei n_L den flächennormierten Entartungsgrad pro Landau- und Spinzustand angibt und $g_s = 2$ die Spinartung berücksichtigt. Sowohl die Energiedifferenz $\Delta E_n = \hbar\omega_c$, als auch deren Entartungsgrad n_L sind proportional von der angelegten Magnetfeldstärke abhängig. Wird diese erhöht, so kommt es demnach zu einer sukzessiven Entvölkerung des jeweils höchsten Landau-Zustands, wobei die Elektronen auf darunter liegende Energieniveaus umverteilt werden. In idealisierten Systemen bedeutet dies einen sägezahnförmigen Verlauf der Fermienergie $E_F(B)$, da diese per Definition gerade dem höchsten besetzten Landau-Niveau entspricht (siehe Abbildung 2.17 links unten).

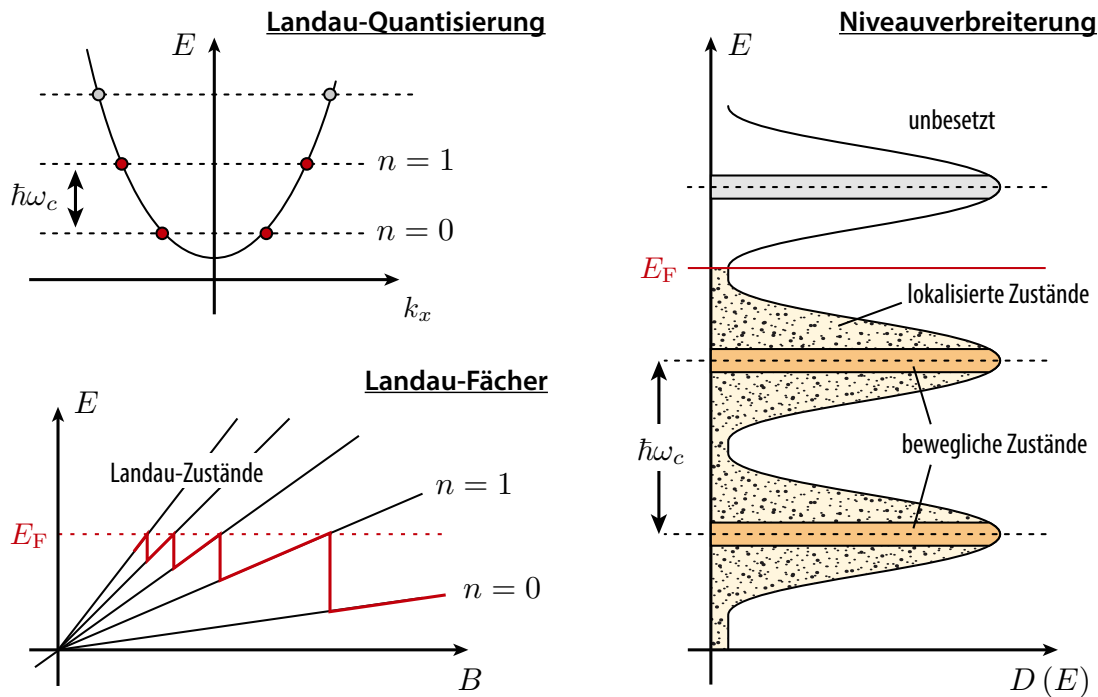


Abb. 2.17.: Landau-Quantisierung der Energiezustände durch Magnetfelder (nach ⁶¹)

In Verbindung mit der Ladungsträgerdichte n_s lässt sich schließlich der Füllfaktor ν definieren, welcher die Anzahl mit Elektronen besetzter Landau-Zustände in einem zweidimensionalen System angibt.

$$\nu = \frac{n_s}{n_L} = \frac{n_s h}{eB} \quad (2.45)$$

Dabei werden beide Spinkonfigurationen als jeweils separate Landau-Zustände berücksichtigt, was im Falle spinentarteter Niveaus bei kleinen Magnetfeldstärken durch einen zusätzlichen Faktor zwei berücksichtigt werden muss. Die $1/B$ -Abhängigkeit des Füllfaktors spiegelt sich unter anderem in der Oszillationsperiode des gemessenen Längswiderstands,

⁶¹HUNKLINGER, *Festkörperphysik*.

2. Theoretische Grundlagen

sowie den Positionen der Hall-Widerstandsplateaus wider. Dies soll im Folgenden näher erläutert werden.

2.5.2. Randzustände

Um den Ursprung der Schubnikow-de-Haas-Oszillationen erklären zu können, muss das bisherige Modell verfeinert und die endliche Breite der Leiterfläche berücksichtigt werden^{62,63}. Dies geschieht durch Ergänzen des Hamiltonoperators aus Gleichung 2.41 um ein entsprechendes Einschlusspotential $U(y)$. Für die Eigenwerte der Schrödingergleichung erhält man mit Hilfe der Störungstheorie in niedrigster Ordnung:

$$E_{n,s}(y_k, n) \approx E_s + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + U(y_k) \quad (2.46)$$

Dabei wurde genähert, dass das Potential auf der Größenskala einer Zustandsausdehnung jeweils als konstant angenommen werden kann. Die Energiedispersion der einzelnen Landau-Niveaus wird somit durch den Verlauf des Einschlusspotentials „geprägt“. Während im Strukturinnern die Verhältnisse weitgehend denen eines 2DEGs ohne räumliche Einschränkung entsprechen, sind die Landau-Niveaus in den Randbereichen stark in Richtung höherer Energien gekrümmt. An den Schnittpunkten mit der Fermienergie bilden sich pro Landau-Zustand zwei sogenannte *Randkanäle*, über welche ein Stromtransport durch das 2DEG in jeweils unterschiedliche Richtungen stattfindet. Eine quantitative Beschreibung dieses Modells liefert dabei der Landauer-Büttiker-Formalismus.

Für die Ausbildung von Oszillationen im Längswiderstand ist entscheidend, dass die Fermienergie auch Werte zwischen den Landau-Niveaus annehmen kann. Kristallbaudefekte und Verunreinigungen im Halbleiter modifizieren das Einschlusspotential und führen somit zu einer Verbreiterung der δ -Peaks in der Zustandsdichte⁶⁴. Zudem entstehen lokalisierte Zustände, die nicht zum Netto-Stromtransport beitragen sondern geschlossene Leitungskanäle darstellen (siehe Abbildung 2.17 rechts) und damit eine quasi kontinuierliche Stabilisierung der Fermienergie ermöglichen. Liegt diese zwischen zwei Landau-Zuständen, so sind die entsprechenden Randkanäle räumlich voneinander getrennt. Aufgrund der fehlenden Kopplung erfolgt der Ladungstransport somit rückstreuungsfrei, wodurch der Längswiderstand ein lokales Minimum annimmt. Dieser kann dabei auf Werte von bis zu $10^{-10} \Omega/\square$ abfallen⁶⁵, was mehrere Größenordnungen unter dem Widerstand anderer, nicht supraleitender Systemen liegt.

⁶²HALPERIN, „Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential“.

⁶³MACDONALD und STŘEDA, „Quantized Hall effect and edge currents“.

⁶⁴SA-YAKANIT, CHOOSIRI und GLYDE, „Density of states between Landau levels in a two-dimensional electron gas“.

⁶⁵HAAVASOJA u. a., „Magnetization measurements on a two-dimensional electron system“.

Abbildung 2.18 veranschaulicht die Entstehung von Schubnikow–de–Haas–Oszillationen anhand des beschriebenen Randkanalmodells. Das durch Störstellen „aufgeraute“ zweite Landau-Niveau nähert sich in Folge einer zunehmenden Magnetfeldstärke (v.l.n.r.) der Fermienergie an. Dabei bricht der innerste Randkanal schließlich in lokalisierte Zustände auf, über welche Elektronen auf die jeweils andere Probenseite gestreut werden können. Der Längswiderstand wird daraufhin maximal, was mit einem Plateau-Übergang im Hall-Widerstand korreliert ist.

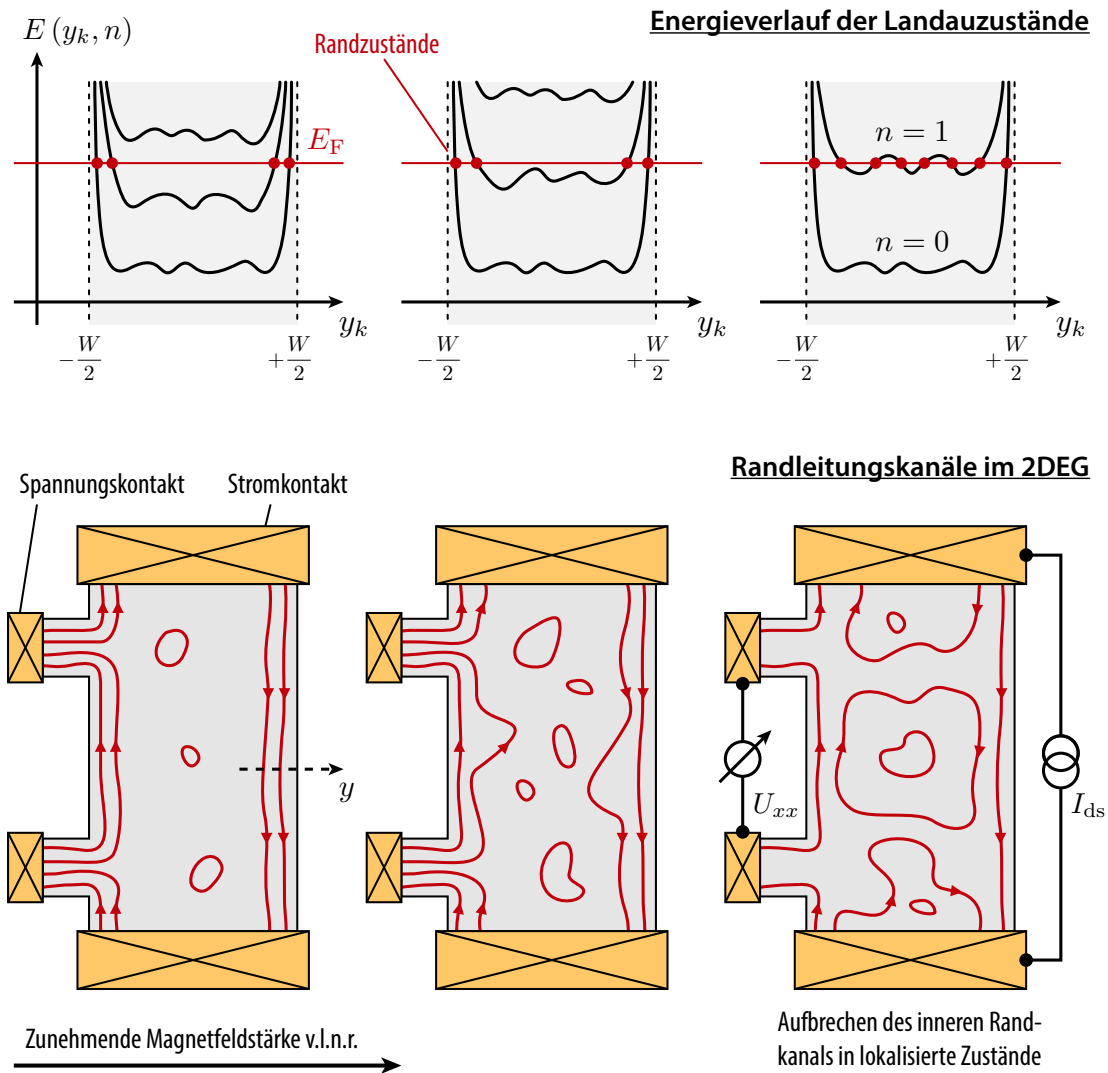


Abb. 2.18.: Elektronenzustände an der Fermikante bei v.l.n.r. zunehmender Magnetfeldstärke (nach ⁶⁶)

⁶⁶HUNKLINGER, *Festkörperphysik*.

2. Theoretische Grundlagen

Als Voraussetzung für die Beobachtung der Quantisierung muss der energetische Abstand zweier Landau-Zustände $\hbar\omega_c$ größer als die effektive Messwertverbreiterung sein. Diese wird maßgeblich durch die thermische Verbreiterung $k_B T$, sowie die Lebensdauererbreiterung \hbar/τ bestimmt. Eine Spinaufspaltung durch den Zeeman-Effekt kann daher in der Regel nur im Regime großer Magnetfeldstärken aufgelöst werden und bewirkt dort eine Verdopplung der $1/B$ -Periodizität.

3 Kapitel 3.

3 Probenherstellung

Im folgenden Kapitel werden zunächst zentrale Eigenschaften der in dieser Arbeit verwendeten GaAs/AlGaAs-Halbleiterheterostrukturen diskutiert. Anschließend folgt eine Beschreibung der einzelnen Prozessschritte zur Probenstrukturierung, wobei auch auf einige technische Aspekte der Herstellung eingegangen wird. Sämtliche Arbeiten, vom Brechen des Wafers bis hin zum Bonden der fertigen Proben, wurden dabei vor Ort selbst durchgeführt.

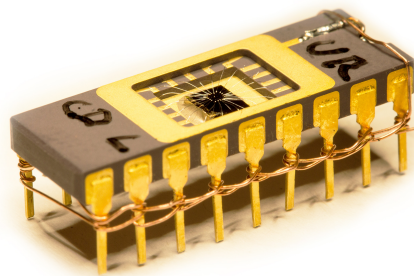


Abb. 3.1.: Prozessierte Probe

3.1. Halbleiter-Heterostrukturen

Unter Heterostrukturen versteht man im Allgemeinen Schichtsysteme aus verschiedenen Halbleitermaterialien. Jeder Halbleiter lässt sich anhand seiner Bandstruktur charakterisieren. Werden zwei Halbleiter mit unterschiedlich großen Bandlücken in Kontakt gebracht, so kommt es an deren Grenzfläche lokal zu einer Umverteilung der Ladungsträger. Dies geht mit einer Verbiegung der Energiebänder einher, während das elektrochemische Potential im Übergangsbereich konstant gehalten wird. Durch entsprechende Wahl der Halbleitermaterialien und -dotierungen lassen sich quasi beliebige Bandverläufe realisieren und somit elektronische Eigenschaften gezielt hinsichtlich des späteren Anwendungszwecks optimieren.

Für die Herstellung von Heterostrukturen eignen sich sogenannte *Verbindungshalbleiter*. Hierunter versteht man binäre bzw. ternäre Verbindungen aus unterschiedlichen Elementen. Abhängig von den chemischen Hauptgruppen der Atome unterscheidet man zwischen:

3. Probenherstellung

- **II/VI-Halbleitern:** z. B. Sulfide (ZnS, CdS), Selenide (ZnSe, CdSe)
- **III/V-Halbleitern:** z. B. Nitride (GaN, InN), Arsenide (GaAs, AlAs)
- **IV/IV-Halbleitern:** z. B. SiC, SiGe

Sämtliche genannten Beispiele weisen somit im Mittel vier Valenzelektronen pro Atom auf und liegen bis auf wenige Ausnahmen in einer Zinkblende-Kristallstruktur vor. Während bei binären Verbindungen somit beide Elemente zu gleichen Anteilen innerhalb des Kristalls vertreten sind, wird bei ternären Verbindungen eine Komponente anteilig durch ein weiteres Element der selben chemischen Hauptgruppe ersetzt. Anhand des Mengenverhältnisses kann die Größe der Bandlücke gezielt manipuliert werden.

Für die strukturellen und elektronischen Eigenschaften von Heterostrukturen sind neben den Bandlücken auch die Gitterkonstanten der Halbleiter von zentraler Bedeutung. So werden beispielsweise die Beweglichkeit und die mittlere freie Weglänge der freien Ladungsträger bei tiefen Temperaturen durch Kristallbaufehler signifikant verschlechtert¹. Geringe Störstellenkonzentrationen lassen sich vor allem mit Halbleitern realisieren, deren Gitterkonstanten nur geringfügig voneinander abweichen, da diese nur minimale Verspannungen in der Kristallstruktur im Bereich der Materialübergänge aufweisen. Auf dem Gebiet der Nanostrukturforschung haben sich daher vor allem Arsenide mit Gallium und Aluminium als Kationen etabliert. Die relative Abweichung der Gitterparameter beträgt bei solchen Materialsystemen maximal 0,14 %². Die Gitterkonstante der ternären Verbindung $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ kann mit Hilfe der empirisch gut belegten Vegard'schen Regel berechnet werden³. Diese skaliert linear mit dem prozentualen Anteil x von Aluminiumatomen:

$$a_{\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}} = x \cdot a_{\text{AlAs}} + (1 - x)a_{\text{GaAs}} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_{\text{GaAs}} = 5,6611 \text{ \AA} \\ a_{\text{AlAs}} = 5,6533 \text{ \AA} \end{cases} \quad (3.1)$$

Darüber hinaus kann die Größe der Bandlücke durch eine entsprechende Wahl der Zusammensetzung zwischen $E_g^{\text{GaAs}} = 1,424 \text{ eV}$ ($x = 0$) und $E_g^{\text{AlAs}} = 2,168 \text{ eV}$ ($x = 1$) variiert werden. Für Aluminiumanteile kleiner 45 % weist der Verbindungshalbleiter eine direkte Bandlücke auf.

3.1.1. Bandstruktur von GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen

Unter bestimmten Voraussetzungen können an GaAs/AlGaAs-Heteroübergängen zwei-dimensionale Elektronengase erzeugt werden. Im Grenzbereich fließen Elektronen vom Halbleiter mit vergleichsweise großer Bandlücke (AlGaAs) in die energetisch günstigere

¹UMANSKY, DE-PICCIOTTO und HEIBLUM, „Extremely high-mobility two dimensional electron gas: Evaluation of scattering mechanisms“.

²ADACHI, „GaAs, AlAs, and Al_xGa_{1-x}As: Material parameters for use in research and device applications“.

³VEGARD, „Die Konstitution der Mischkristalle und die Raumfüllung der Atome“.

GaAs-Schicht. Diese Ladungsumverteilung bewirkt eine Krümmung der Leitungs- und Valenzbandkanten (siehe Fig. 3.2). In GaAs bildet sich an der Grenzfläche ein näherungsweise dreieckiges Einschlusspotential mit quantisierten Energiezuständen aus. Durch eine entsprechende Wahl der maßgeblichen Materialparameter (Schichtdicken, Dotierung, oder Aluminiumanteil) kann der Bandverlauf so modelliert werden, dass die Fermienergie unter dem zweiten Energieniveau liegt ($\varepsilon_1 < \varepsilon_F < \varepsilon_2$). Bei ausreichend niedrigen Temperaturen ist somit nur das erste Subband besetzt. Die Elektronen besitzen demnach eine in Wachstumsrichtung des Kristalls quantisierte Energie, können sich aber in einer dünnen Schicht parallel zur Probenoberfläche frei bewegen. Der Einfluss des Kristallgitters wird in Form einer effektiven Elektronenmasse m^* berücksichtigt, die im Falle von GaAs etwa 6,7 % der freien Elektronenmasse beträgt.

Für die Berechnung der Bandkantenverläufe und der Ladungsträgerdichteverteilung $n(x)$ müssen die eindimensionale Schrödinger- und Poisson-Gleichung selbstkonsistent gelöst werden. Dies erfolgt in der Regel numerisch in einem iterativen Verfahren⁴.

$$\text{Schrödinger-Gl.:} \quad -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m^*(x)} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) = [E - U(x)] \psi(x) \quad (3.2)$$

$$\text{Poisson-Gl.:} \quad \frac{d}{dx} \left(\varepsilon_r(x) \frac{d}{dx} \right) \phi(x) = -\frac{e [N_D(x) - n(x)]}{\varepsilon_0} \quad (3.3)$$

Hierbei bezeichnet ε_r die Dielektrizitätskonstante, ψ die Wellenfunktion, U die potentielle Energie, E die Energie, ϕ das elektrostatische Potential, e die Elementarladung und N_D die Konzentration ionisierter Donatoratome. Beide Gleichungen sind über die potentielle Energie und die Ladungsträgerdichte miteinander gekoppelt:

$$U(x) = -e\phi(x) + \Delta E_c(x) \quad (3.4)$$

$$n(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k^*(x) \psi_k(x) n_k \quad (3.5)$$

Der Korrekturterm ΔE_c berücksichtigt dabei den Energieoffset der Leitungsbänder am Heteroübergang. n_k bezeichnet die Besetzungszahl des k -ten Zustands.

Probenmaterial V815: Das im Rahmen dieser Arbeit untersuchte Halbleitermaterial stammt aus dem *Cavendish Laboratory* der *University of Cambridge*. Die GaAs/AlGaAs-Heterostruktur wurde im Molekularstrahlepitaxie-Verfahren (kurz *MBE*) auf ein [100]-orientiertes GaAs Substrat aufgewachsen und trägt die interne Probenbezeichnung *V815*. Die Schichtfolge ist in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt. Die jeweils 50 nm dicken Pufferschichten aus GaAs und $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ dienen dabei zur Kompensation eventuell vorhandener Kristallversetzungen im Substrat. Es folgt eine 1 μm dicke Schicht aus GaAs an deren Grenzfläche zum darüberliegenden $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ sich das zweidimensionale

⁴TAN u. a., „A self-consistent solution of Schrödinger-Poisson equations using a nonuniform mesh“.

3. Probenherstellung

Elektronengas bildet. Die freien Ladungsträger stammen dabei aus einer mit Silizium dotierten $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ -Schicht. Diese ist durch einen 40 nm Spacer räumlich vom 2DEG getrennt, um Streuprozesse der Elektronen an den ionisierten Donatoratomen zu minimieren. Die Dotieratomkonzentration ist vom Hersteller nominell mit $N_D = 1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ angegeben. Als Deckschicht dient eine 10 nm dicke Lage aus GaAs. Diese soll ein Oxidieren des Aluminiums an der Atmosphäre unterbinden.

Die numerische Berechnung des Bandverlaufs, der Ladungsträgerdichteverteilung und der quantisierten Zustände im Einschlusspotential erfolgte mit Hilfe der Software *1D Poisson*⁵ von Dr. Gregory Snider. Die maximale Dichte des Elektronengases ist demnach in ca. 95 nm Abstand zur Probenoberfläche zu erwarten. Die Charakterisierung des Probenmaterials durch den Hersteller ergab bei einer Temperatur von 1,5 K eine Elektronendichte im 2DEG von $n_s = 1,81 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ bzw. $n_s = 3,39 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (beleuchtet). Die Beweglichkeit ist nominell mit $\mu = 1,35 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ bzw. $\mu = 2,58 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ (beleuchtet) angegeben.

3.2. Herstellungsprozess

Um innerhalb der leitfähigen Schicht niederdimensionale quantenmechanische Systeme, wie z. B. Quantenpunkte zu definieren, werden metallische Top-Gates auf der Probenoberfläche angebracht. Durch das Anlegen negativer Potentiale kann das darunter liegende 2DEG elektrostatisch verarmt und somit die laterale Beweglichkeit der Elektronen weiter eingeschränkt werden. Über die Potentialstärke können Eigenschaften der quantenmechanischen Systeme, wie z. B. deren Größe oder die Ankopplung an die Reservoirs, manipuliert werden. Die galvanische Verbindung zum 2DEG wird durch Einlegieren ohmscher Kontakte realisiert. Abbildung 3.3 veranschaulicht das soeben beschriebene Konzept der elektrostatischen Strukturdefinition am Beispiel eines Quantenpunkts.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte der Probenherstellung im Detail vorgestellt. Die verwendete Rezeptur basiert im Wesentlichen auf vorangegangenen Arbeiten^{6,7} der Arbeitsgruppe. Eine tabellarische Zusammenfassung mit Angabe der relevanten Prozessparameter findet sich in Anhang B.

3.2.1. Vorbereitung

Im ersten Arbeitsschritt werden ca. 5×6 mm große Probenstücke aus dem Wafer herausgebrochen. Dies geschieht durch Anritzen des Halbleitermaterials entlang der gewünschten Trennlinie mittels einer Diamantspitze. Anschließend wird die so erzeugte Sollbruchstelle über einem dünnen Metalldraht positioniert und von oben leichter mechanischer Druck

⁵SNIDER, *1D Poisson*.

⁶FLEISCHER, „Transporteigenschaften von Quantenpunktkontakten und Quantenpunkten“.

⁷TANTISANTISOM, „Electron Transport in Quantum Dot Devices“.

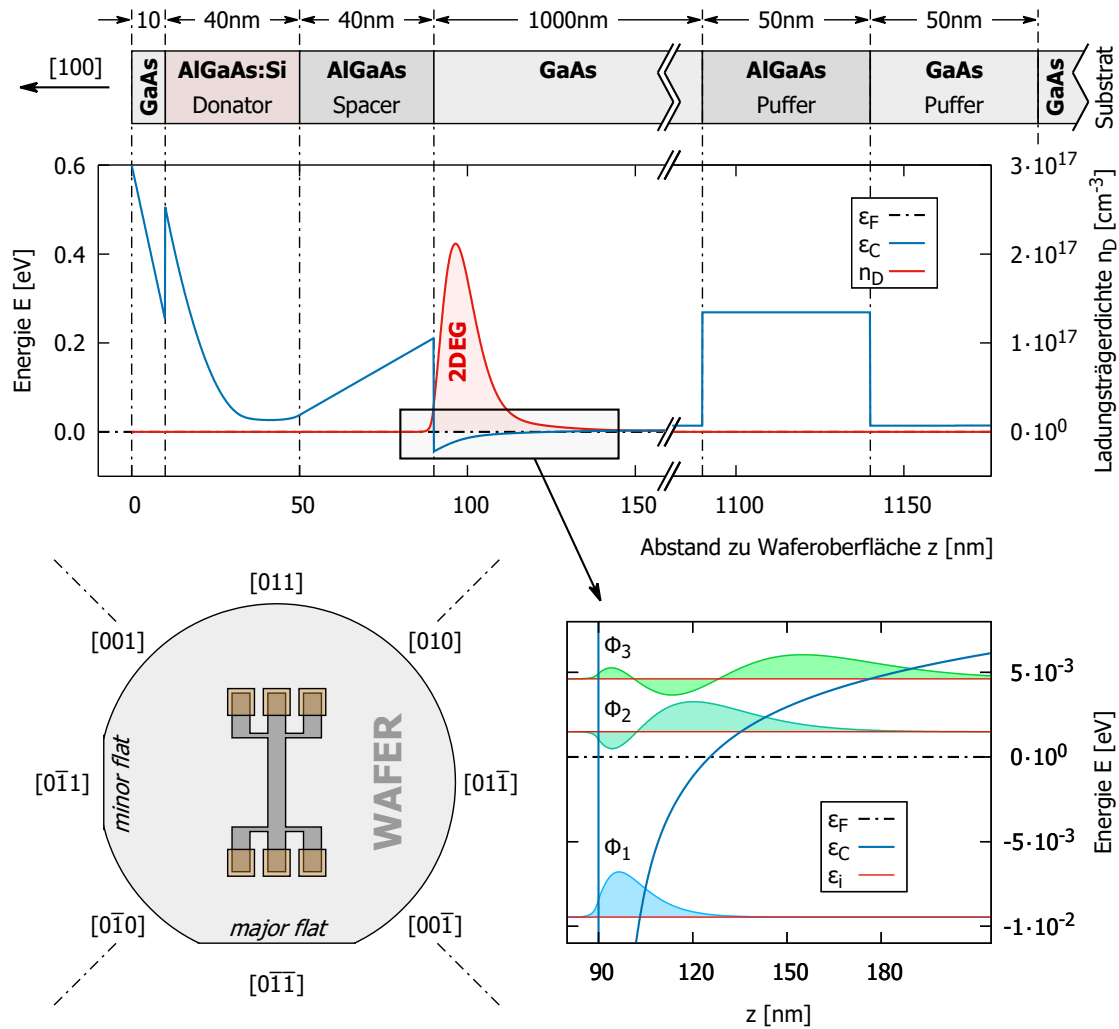


Abb. 3.2.: Oben: Aufbau und berechneter Verlauf der Leitungsbandkante ϵ_C und der Ladungsträgerdichte n_D der verwendeten GaAs/AlGaAs-Heterostruktur. Unten rechts: Eigenenergien und elektronische Wellenfunktionen der ersten drei Subbänder, links: Kristallorientierung des Wafers und Ausrichtung der Mesen.

3. Probenherstellung

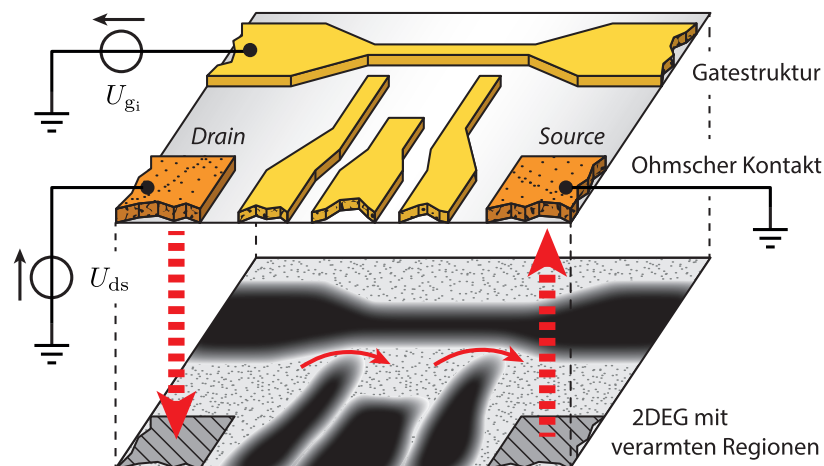


Abb. 3.3.: Elektrostatistische Definition eines Quantenpunktes im 2DEG mittels Top-Gate-Elektroden auf der Probenoberfläche mit negativem Potential.

auf den Wafer ausgeübt, bis letztlich der Kristall entlang seiner Vorzugsrichtung bricht. Die unterschiedlich langen Kanten sollen dabei eine spätere Zuordnung der Kristallrichtungen ermöglichen.

Die verwendeten optischen Masken erlauben eine parallele Herstellung von jeweils vier Proben auf jedem Waferstück⁸, die erst unmittelbar vor dem Einkleben in den Chipcarrier geteilt werden. Diese Vorgehensweise spart sowohl Zeit als auch wertvolles Halbleitermaterial, da prozessbedingt ein gewisser Mindestabstand der Strukturen zum Probenrand eingehalten werden muss⁹. Nach dem Brechen werden die Waferstücke gründlich mit Aceton und Isopropanol gespült. Je nach Verschmutzungsgrad kann eine schonende mechanische Säuberung der Probenoberfläche in Lösungsmittel mittels Wattestäbchen oder eine Reinigung im Ultraschallbad in Betracht gezogen werden.

3.2.2. Optische Lithographie

Mit Ausnahme der Nanostruktur werden sämtliche Strukturen mittels optischer Lithographie hergestellt. Als Belichtungsmasken dienen chrombeschichtete Glasplättchen. Die jeweils zu belichtende Fläche ist dabei als Negativmuster in die Metallschicht geätzt. Die Proben werden zunächst in einem Spin-Coater mit einem fotoempfindlichen Lack beschichtet. Abhängig von der Lacksorte kann eine Vorbehandlung der Probenoberfläche erforderlich sein. Die Belichtung erfolgt mit Hilfe eines Maskaligners des Typs *KSM-MJB 3* (Karl Süss KG). Eine möglichst exakte Ausrichtung der Maske an bereits vorhandenen

⁸ Anordnung der Strukturen als 2×2 -Array

⁹ Bspw. bilden die verwendeten Fotolacke beim Aufschleudern kleine Wulste an den Probenkanten, welche entfernt werden müssen.

Strukturen wird durch spezielle Marker-Kreuze erleichtert, die jeweils in Deckung gebracht werden müssen. Die Positionierung der Probe erfolgt mittels einer feinjustierbaren Stage. Eine Optik mit variabler Vergrößerung dient dabei der visuellen Kontrolle. Um Beugungseffekte im Randbereich der Strukturen zu minimieren, werden Probe und Maske während der Beleuchtung in Kontakt zueinander gebracht (Kontaktbelichtung). Durch Anlegen eines Vakuums kann der Anpressdruck auf einen definierten Wert erhöht werden. Als Lichtquelle kommt eine Quecksilberdampf-Kurzbogenlampe zum Einsatz, deren Hauptemissions-Spektrallinien im Bereich 300 – 450 nm (UV-Bereich) liegen. Laut Angaben des Herstellers¹⁰ lassen sich so unter optimalen Bedingungen Auflösungen von besser als 1 μm erzielen.

Die für UV-Strahlung undurchlässige Chromschicht schützt den darunter befindlichen Lack, wohingegen dieser in den exponierten Arealen im Zuge der Belichtung chemisch verändert wird. Beim anschließenden Entwicklungsprozess wird der Fotolack abhängig vom Typ nur in den zuvor belichteten (Positivlack) oder unbelichteten (Negativlack) Bereichen selektiv wieder entfernt. Der verbleibende Lack fungiert in den darauf folgenden Schritten als lokale Schutzschicht des Substrats vor den physikalischen bzw. chemischen Einflüssen der jeweiligen Prozesse.

Abbildung 3.4 zeigt die mittels optischer Lithographie hergestellten Strukturen in Form einer Overlay-Darstellung (oberer Bildbereich) am Beispiel einer typischen Probe mit asymmetrischer Achtbein-Mesa und Doppeldot-Nanostruktur.

Ätzen der Mesa

Die Bezeichnung *Mesa* stammt aus dem Spanischen und kann mit *Plateau* oder *Hochebene* übersetzt werden. Sie entsteht durch nasschemisches Ätzen des Wafers und trägt ihren Namen aufgrund der dabei entstehenden Oberflächentopografie. Nur innerhalb der Mesa bleibt die in Abschnitt 3.1.1 beschriebene Schichtstruktur des Halbleiters erhalten. Außerhalb wird das Substrat bis unterhalb der Donatorschicht abgetragen, sodass sich dort bedingt durch eine Änderung der Bandstruktur kein zweidimensionales Elektrogenas mehr ausbilden kann. Die Mesastruktur definiert somit den späteren leitfähigen Probenbereich.

Zum Dehydrieren der Probenoberfläche wird diese nach gründlicher Reinigung zunächst für fünf Minuten bei ca. 160 °C ausgeheizt. Als Haftvermittler wird Hexamethyldisilazan (kurz *HMDS*) auf die Probenoberfläche aufgetragen und nach kurzer Einwirkzeit abgeschleudert. Als Fotolack kommt *maN-1410* (Negativlack) zum Einsatz, welcher bei Anwendung der in Anhang B angegebenen Schleuderparameter Schichtdicken von ca. 0,5 μm bildet. Im Lack verbliebene Lösungsmittel werden anschließend bei 100 °C auf der Heatplate verflüchtigt („*Soft-Bake*“). Nach der Belichtung im Maskaligner wird die Probe ein weiteres Mal erhitzt („*Post-Exposure-Bake*“) und dann für 25 s in *maD-533*

¹⁰SUSS MJB 3. *Mask Aligner*. Operator's Reference Manual. 2/84/REV A.

3. Probenherstellung

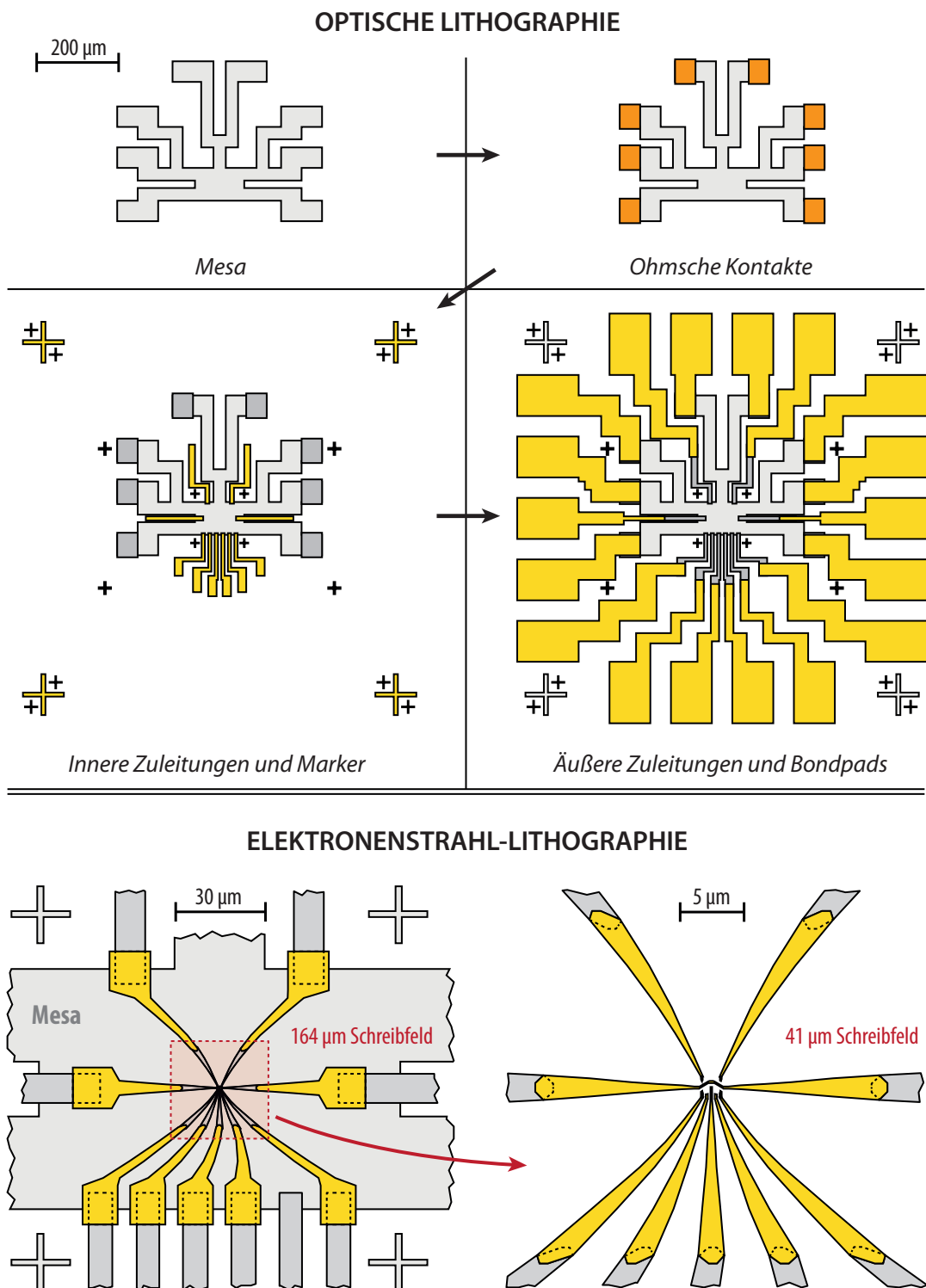


Abb. 3.4.: Übersicht der Probenherstellung. Die optolithographische Strukturierung (Schritte 1–4) erfolgt mit Hilfe von Chrommasken.

entwickelt. Der Prozess wird durch Spülen mit demineralisiertem Wasser gestoppt und die entstandenen Mesa-Strukturen am Lichtmikroskop begutachtet. Gegebenenfalls kann eine Nachentwicklung des Lacks erfolgen.

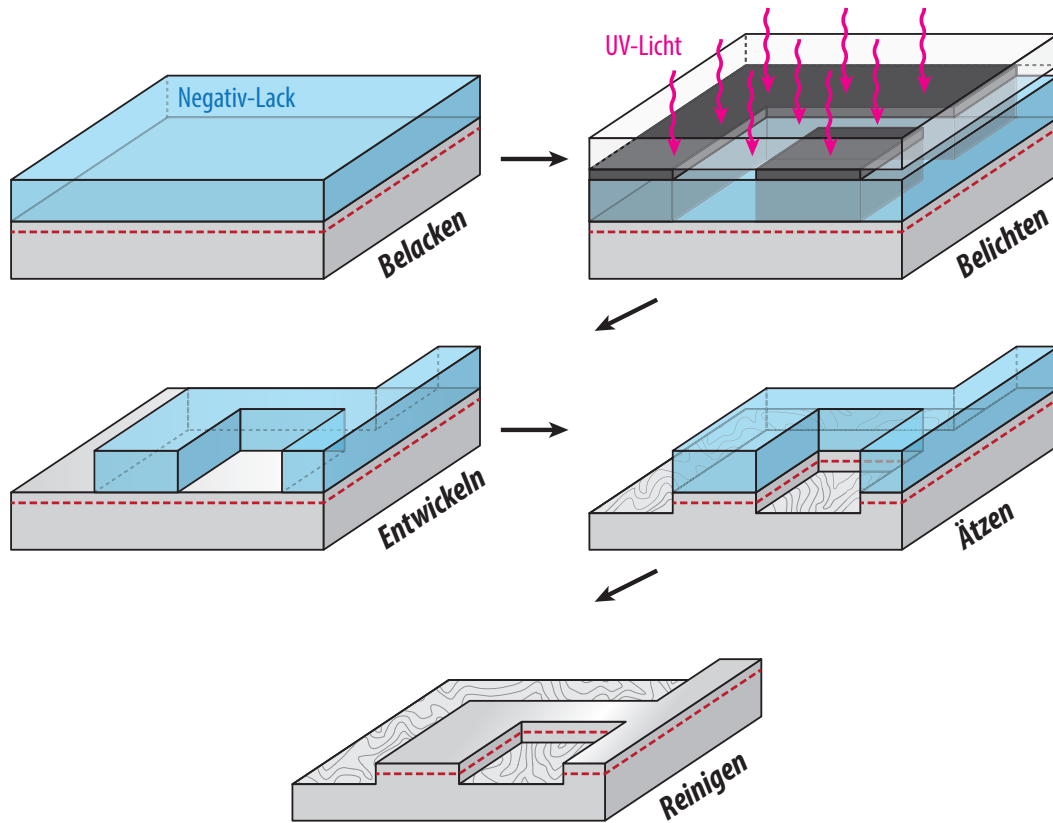


Abb. 3.5.: Schematische Darstellung der einzelnen Prozessschritte zur Herstellung der Mesa mittels optischer Lithographie.

Danach wird die Probenoberfläche in einer Kaltplasma-Veraschungsanlage¹¹ gesäubert. Eventuell vorhandene Verunreinigungen, wie z. B. kleinere Lackreste werden dabei durch chemische Reaktion mit Sauerstoffplasma-Ionen (O^+ , O^- , O_2^+ , O_3^+) vom Substrat entfernt. Durch ein darauffolgendes fünfminütiges Ausbacken „*Hard-Bake*“ des Lacks bei 85°C auf der Heatplate wird dessen Ätzresistenz verbessert. Mit Hilfe eines Oberflächen-Profilometers¹² wird im Bereich der Markerkreuze die Höhe der Lackschicht bestimmt. Diese dient als Ausgangswert für den anschließenden nasschemischen Ätzvorgang. Durch zehnsekündiges Eintauchen der Probe in 37%-ige Salzsäure wird die oxidierte Oberflächenschicht entfernt. Bei dieser als *HCl-Dip* bezeichneten Behandlung wird die Probenoberfläche hydrophob¹³. Als Ätzlösung wird ein Gemisch aus $\text{H}_2\text{O}:\text{H}_2\text{SO}_4:\text{H}_2\text{O}_2$ im Verhältnis 100:3:1

¹¹Plasma Prozessor 100-E (Technics Plasma GmbH)

¹²Dektak 3030 (Veeco Instruments Inc., Sloan Technology Division)

¹³OSAKABE und ADACHI, „Study of GaAs(001) Surfaces Treated in Aqueous HCl Solutions“.

3. Probenherstellung

verwendet, in welchem die Probe geschwenkt wird. Das Voranschreiten des Prozesses wird dabei in regelmäßigen Zeitabständen durch Profilieren der Lackkanten überwacht. Nach dem Erreichen der gewünschten Ätztiefe von 60 – 90 nm wird der Fotolack schließlich mit Aceton entfernt.

Abbildung 3.5 illustriert in nicht maßstabsgetreuer Darstellung die zentralen Prozessschritte für die Mesastrukturierung. Die Position des 2DEGs ist als rot gepunktete Linie angedeutet.

Ohmsche Kontakte

Im nächsten Schritt werden die ohmschen Kontakte hergestellt. Dabei handelt es sich um quadratische Strukturen im Randbereich der Mesa, welche 2DEG und Probenoberfläche galvanisch miteinander verbinden. Die Kontakte selbst bestehen aus einer Schichtstruktur der Materialien AuGe/Ni/Au (von unten nach oben), welche durch Erhitzen in das Substrat einlegiert wird. Im Wesentlichen werden dabei durch Diffusionsprozesse Ga-Atome im Kristallgitter durch Ge-Atome ersetzt, was lokal eine starke n-Dotierung des Halbleiters bedeutet¹⁴. Bei entsprechender Wahl der Schichtdicken und Prozessparameter entstehen Kontakte mit kleinen Widerstandswerten und näherungsweise linearer Strom-Spannungs-Kennlinie (ohmsche Charakteristik). Dieses Verfahren zur 2DEG-Kontaktierung in GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen geht zurück auf Braslau *et al.*¹⁵ und wurde über Jahre hinweg weiter optimiert.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass bis zum heutigen Tag trotz zahlreicher Studien die physikalischen Details der Kontaktierung nicht abschließend geklärt sind. Ein möglicher Ansatz beruht auf der Annahme, dass bei niedrigen Temperaturen der Stromtransport durch den Kontakt hauptsächlich über sogenannte „Spikes“ stattfindet¹⁶. Hierunter versteht man metallische Säulen bzw. Kanäle, die beim Einlegieren von der Substratoberfläche aus bis in die 2DEG-Schicht wachsen. Dem entgegen steht die Auffassung, dass über den gesamten Kontaktbereich der Heteroübergang flächig zerstört und die Schottky-Barriere aufgehoben wird. Die Ladungsträger gelangen durch laterale Tunnelprozesse über leitfähige metallische Körner in das Elektronengas¹⁷. Untersuchungen der letzten Jahre deuten darauf hin, dass ein umgekehrt proportionaler Zusammenhang zwischen dem Kontaktwiderstand und der Länge der Grenzlinie zwischen Kontakt und Mesa besteht¹⁸. Dies lässt schließen, dass der Ladungsträgertransport maßgeblich über den Randbereich

¹⁴SHIH u. a., „Effects of interfacial microstructure on uniformity and thermal stability of AuNiGe ohmic contact to n-type GaAs“.

¹⁵BRASLAU, GUNN und STAPLES, „Metal-semiconductor contacts for GaAs bulk effect devices“.

¹⁶TAYLOR u. a., „Physical and electrical investigation of ohmic contacts to AlGaAs/GaAs heterostructures“.

¹⁷KETTERSON u. a., „Extremely low contact resistances for AlGaAs/GaAs modulation-doped field-effect transistor structures“.

¹⁸SCHEFZYK, „Quantenbauelemente als aktive Sensoren zur Ladungsbestimmung in elektronischen Nanostrukturen“.

der Kontakte stattfindet. Darüber hinaus werden für Kontaktgrenzflächen senkrecht zur [011] Kristallrichtung generell niedrigere Widerstandswerte beobachtet¹⁹. Dies wird bereits bei der Orientierung der Mesastrukturen im ersten Herstellungsschritt berücksichtigt (siehe Abb. 3.2 unten links).

Abbildung 3.6 zeigt eine Übersicht der zentralen Prozessschritte für die Herstellung ohmscher Kontakte. Zugunsten einer besseren Übersicht sind die drei aufgedampften Metallschichten als homogene Lage dargestellt.

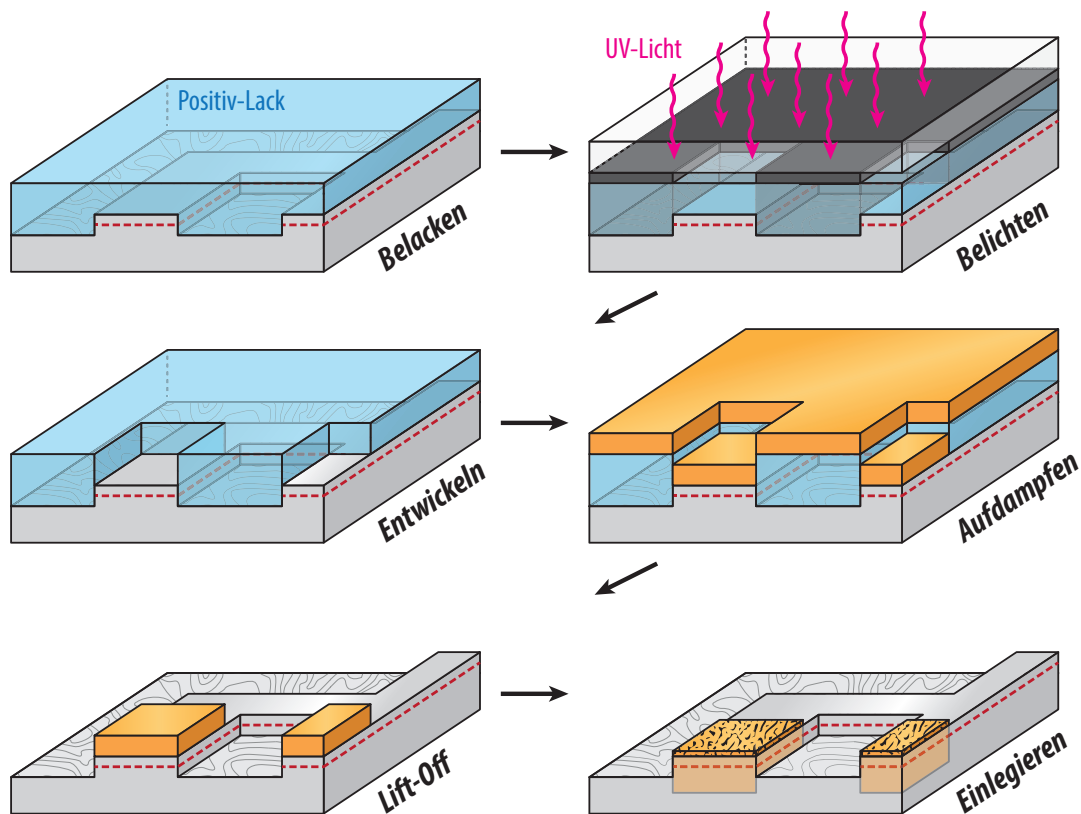


Abb. 3.6.: Schematische Darstellung der einzelnen Prozessschritte zur Herstellung der ohmschen Kontakte mittels optischer Lithographie.

¹⁹RAISER, „Untersuchung der elektrischen Eigenschaften von AuGe-Kontakten in GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen“.

3. Probenherstellung

Die im Folgenden beschriebene Rezeptur zur Herstellung der ohmschen Kontakte basiert auf Forschungsergebnissen des *Max-Planck-Instituts* für Festkörperforschung Stuttgart²⁰ und wurde von S. Raiser im Rahmen ihrer Diplomarbeit für das verwendete Halbleitermaterial optimiert. Zum Dehydrieren der Probenoberfläche wird diese zunächst mit Isopropanol benetzt und nach kurzer Einwirkzeit abgeschleudert. Mittels Spin-Coating wird *maN-1215* Positivlack aufgebracht und anschließend für ca. 3 min bei 90 °C auf der Heatplate ausgebacken. Auf die Belichtung des Lackes folgt der einminütige „*Post-Exposure-Bake*“. Zum Entwickeln wird die Probe für ca. 25 s in *maD-331* geschwenkt, wobei der zuvor exponierte Lack entfernt wird. Mittels Sauerstoffplasma werden eventuell vorhandenen Verunreinigungen verascht und das freiliegende Substrat gereinigt. Der anschließende HCl-Dip sollte unmittelbar vor dem Einbau der Probe in die Aufdampfanlage²¹ erfolgen, um eine erneute Oxidation der Oberfläche an der Atmosphäre zu verhindern. Nacheinander werden 190 nm AuGe²², 80 nm Ni und 30 nm Au aufgedampft. Aufgrund des niedrigen Schmelzpunktes²³ von 356 °C wird hierfür eine eutektische Goldgermanium-Legierung mit Massenverhältnis $m_{\text{Au}}/m_{\text{Ge}} = 88/12$ verwendet. Im nachfolgenden *Lift-Off*-Prozess wird in einem Acetonbad der Fotolack gelöst. Lediglich in den zuvor unbelackten Arealen bleibt die Metallschicht auf der Probenoberfläche haften.

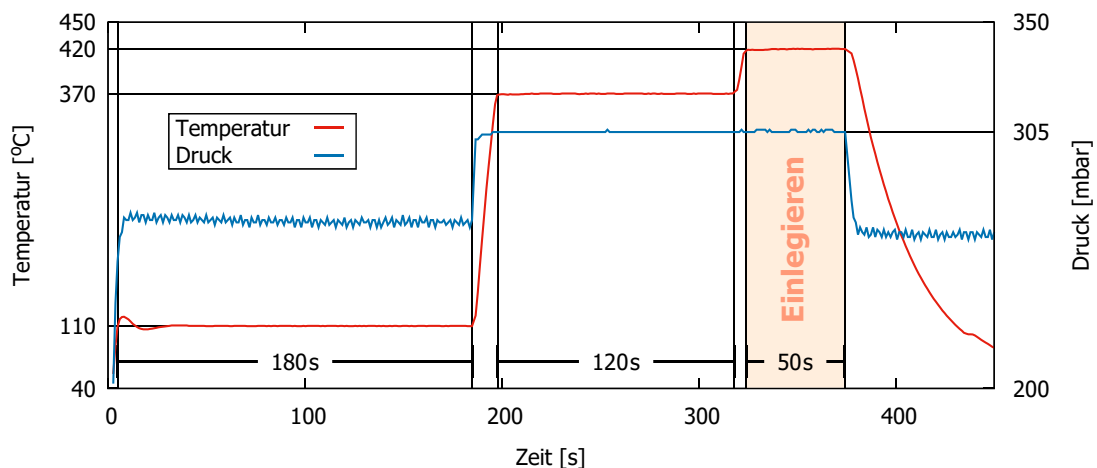


Abb. 3.7.: Druck- und Temperaturverlauf während des Einlegierens

Das Einlegieren der ohmschen Kontakte geschieht in einem speziellen Ofen²⁴ unter einer Schutzatmosphäre aus Wasserstoff und Argon im Volumenverhältnis 20/80. Dieses als Formiergas bezeichnete Gasgemisch wirkt leicht reduzierend und soll ein Oxidieren der Metalle im heißen Zustand verhindern. Das *Annealing* besteht aus mehreren zuvor

²⁰GÖKTAŞ u. a., „Alloyed ohmic contacts to two-dimensional electron system in AlGaAs/GaAs heterostructures down to submicron length scale“.

²¹PLS-570 (Pfeiffer Vacuum Technology AG)

²²Es wird jeweils ein AuGe-Zylinder mit Masse 1,51 g aufgedampft. Die tatsächliche Schichtdicke variiert daher leicht von Probe zu Probe.

²³OKAMOTO und MASSALSKI, „The Au-Ge (Gold-Germanium) system“.

²⁴AZ500 (MBE Komponenten GmbH)

festgelegten Prozessschritten, die sequentiell durchlaufen werden. Abbildung 3.7 zeigt den zeitlichen Verlauf der Temperatur und des Gasdruckes innerhalb der Ofenkammer während des Einlegierens.

Zunächst wird die Probenoberfläche bei 110 °C für drei Minuten dehydriert. Die Kammer wird währenddessen mit Schutzgas gespült. Im zweiten Prozessschritt wird unter abgeschlossener Atmosphäre die Probentemperatur bis knapp über die Schmelztemperatur der eutektischen AuGe-Legierung erhöht. Bei 420 °C folgt schließlich das Eindiffundieren der Metallatome in das Halbleitersubstrat. Hierfür wird die Temperatur für 50 s aufrecht erhalten, um die gewünschte Eindringtiefe zu erreichen. Während des finalen Abkühlvorgangs wird die Ofenkammer fortwährend mit Formiergas gespült.

Zuleitungen und Bondpads

Im nächsten Schritt werden die inneren Zuleitungen strukturiert. Die verwendete Maske enthält zudem spezielle Kreuzmarker, anhand derer die Ausrichtung bei der späteren Elektronenstrahlolithographie vorgenommen wird. Bis zum Aufdampfen durchläuft die Probe die exakt gleichen Prozessschritte, wie bei der Herstellung der ohmschen Kontakte. Als unterste Lage werden 10 nm Chrom auf das Substrat aufgedampft. Dieses fungiert als Haftvermittler für die darauf folgende 30 nm dicke Goldschicht. Im anschließenden *Lift-Off* wird das Metall an den vom Fotolack geschützten Probenbereichen wieder entfernt. Durch Erhitzen des Acetons oder ein Ultraschallbad kann das Brechen der aufgedampften Schicht an den Strukturrändern gegebenenfalls forciert werden. Die Wahl der Zuleitungshöhe stellt dabei einen Kompromiss dar. Zu geringe Schichtdicken erhöhen die Gefahr von Unterbrechungen an der bis zu 90 nm hohen Mesakante, wohingegen höhere Zuleitungen vermehrt zu Kontaktschwierigkeiten am Übergang zur Nanostruktur (siehe Abschnitt 3.2.5) führen.

Die Herstellung der äußeren Zuleitungen und Pads erfolgt analog. Um der mechanischen Belastung beim Wedge-Bonden standzuhalten und eine gute Haftung der Bonddrähte zu gewährleisten, werden Schichten mit 20 nm (Cr) bzw. 150 nm (Au) Dicke aufgedampft. In Abbildung 3.8 sind die wichtigsten Zwischenstadien der Zuleitungsstrukturierung schematisch dargestellt.

3. Probenherstellung

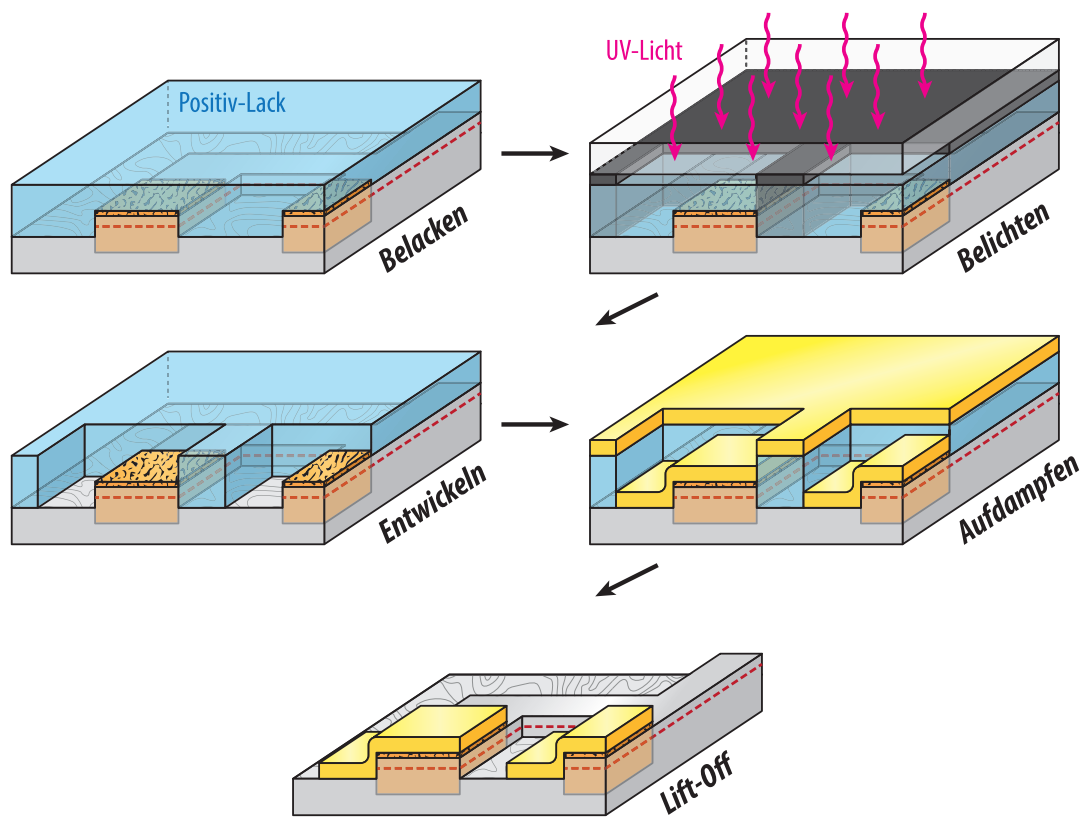


Abb. 3.8.: Schematische Darstellung der einzelnen Prozessschritte zur Herstellung der Bondpads und Gatezuleitungen mittels optischer Lithographie.

3.2.3. Elektronenstrahlithographie

Bei der optischen Lithographie wird die maximale Auflösung maßgeblich durch die Wellenlänge des zur Belichtung verwendeten Lichts begrenzt. Die Herstellung der in manchen Bereichen nur wenige Nanometer breiten Top-Gate-Strukturen erfolgt daher mittels E-Beam-Lithographie. Bei diesem Verfahren wird ein Elektronenstrahl über die zu belichtenden Areale einer mit Lack beschichteten Probe gerastert. Die Belichtung basiert auf der chemischen Modifikation des *E-Beam Resists* bei Elektronenbeschuss. Abhängig vom gewählten Lacktyp wird dessen Löslichkeit bei der Exposition entweder durch eine Verkettung einzelner Moleküle verschlechtert (Negativlack) oder durch Fragmentierung langer Molekülketten verbessert (Positivlack)²⁵. In unserem Fall lassen sich damit minimale Strukturbreiten von bis zu 70 nm erzeugen.

Zunächst wird die Probe in Aceton gereinigt und die Oberfläche durch kurzes Einwirken von Isopropanol dehydriert. Als Elektronenstrahl-sensitiver Lack wird eine 2,8 %-ige

²⁵HATZAKIS, „Electron Resists for Microcircuit and Mask Production“.

Lösung von Polymethylmethacrylat (kurz *PMMA*) in Methylisobutylketon (*MIBK*) aufgeschleudert. Der auch unter der Bezeichnung „Acrylglas“ bekannte Kunststoff besteht aus langen Polymerketten mit Summenformel $[C_5O_2H_8]_n$. Bei Anwendung der in Anhang B angegebenen Schleuderparametern ergeben sich Schichtdicken von ca. 120 nm. Die Probe wird nach dem Belacken zunächst für 3 min bei 120 °C auf der Heatplate und anschließend für eine Stunde bei 160 °C im Ofen gebacken. Zur Belichtung kommt ein Rasterelektronenmikroskop des Typs *Philips XL30 SEM* zum Einsatz. Zugunsten einer möglichst hohen Auflösung, wird die maximale Beschleunigungsspannung von 30 kV und die kleinste Spotsize gewählt. Die Strahlführung wird extern durch einen sogenannten *Patterngenerator*²⁶ gesteuert. Eine detailliertere Beschreibung des Belichtungsvorgangs findet sich in Abschnitt 4. Zur Entwicklung des Lacks wird die Probe für ca. 20 s in einer Lösung aus *MIBK* und Isopropanol im Volumenverhältnis 1:3 geschwenkt. Eine visuelle Kontrolle des Entwicklungsfortschritts erfolgt am Lichtmikroskop anhand sogenannter *Wedges*. Hierbei handelt es sich um eine Referenzstruktur bestehend aus Quadraten mit unterschiedlicher Belichtungsdosis, welche in den Randbereich der Probe geschrieben werden. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit unterliegt die Entwicklungszeit gewissen Schwankungen, sodass eine Nachentwicklung des Lackes erforderlich sein kann. Die Probe wird anschließend mit 10 nm Cr und 30 nm Au bedampft. Durch einen Lift-Off in Aceton wird der restliche Lack gelöst und die darauf befindliche Metallschicht entfernt.

Die Auftreffposition des Elektronenstrahls auf der Probenoberfläche unterliegt einem gewissen Rauschen, dessen Amplitude mit der Schreibfeldgröße skaliert. Um eine hohe Qualität der geschriebenen Nanostrukturen zu gewährleisten, werden diese bei der Belichtung auf zwei zentrisch angeordnete Schreibfelder mit Kantenlängen 164 μm und 41 μm aufgeteilt (siehe Abb. 3.4 unten).

3.2.4. Bonden

Im nächsten Schritt werden die vier jeweils parallel prozessierten Proben voneinander getrennt. Dies geschieht durch Anritzen und anschließendes Brechen der Waferstücke mit Hilfe einer Diamantspitze. Um eine Beschädigung der Strukturen durch dabei entstehende GaAs-Splitter zu verhindern, wird die Oberfläche zuvor mit *PMMA* beschichtet. Nach dem Entfernen des Schutzlackes folgt das Einkleben der Probe in den 18-DIP Keramik-Chipcarrier (siehe Abb. 3.1). Für eine optimale thermische Kopplung wird hierfür ein Zweikomponenten-Silberleitkleber verwendet.

Mit Hilfe eines Wedge-Bonders²⁷ wird die Probe über dünne Aluminiumdrähte elektrisch kontaktiert. Hierzu wird der Draht mittels Ultraschallschwingung des Bondtools mit den jeweils zu verbindenden Kontaktflächen verschweißt. Um einer Zerstörung der ESD-empfindlichen Nanostrukturen vorzubeugen, werden zuvor alle Pins des Chipcarriers

²⁶XPG 2 (XENOS Semiconductor Technologies GmbH)

²⁷5300 Series Wire Bonder (F&K Delvotec Bondtechnik GmbH)

3. Probenherstellung

durch Kupferdraht kurzgeschlossen (siehe Abb. 3.1). Dieser wird erst nach dem Einbau in den Kryostat-Insert wieder entfernt. So kann sichergestellt werden, dass bis zum Beginn der Messungen alle Top-Gates auf dem selben elektrischen Potential gehalten werden. Die folgende Abbildung (nicht maßstabsgetreu) zeigt schematisch die Schnittansicht einer vollständig prozessierten Probe.

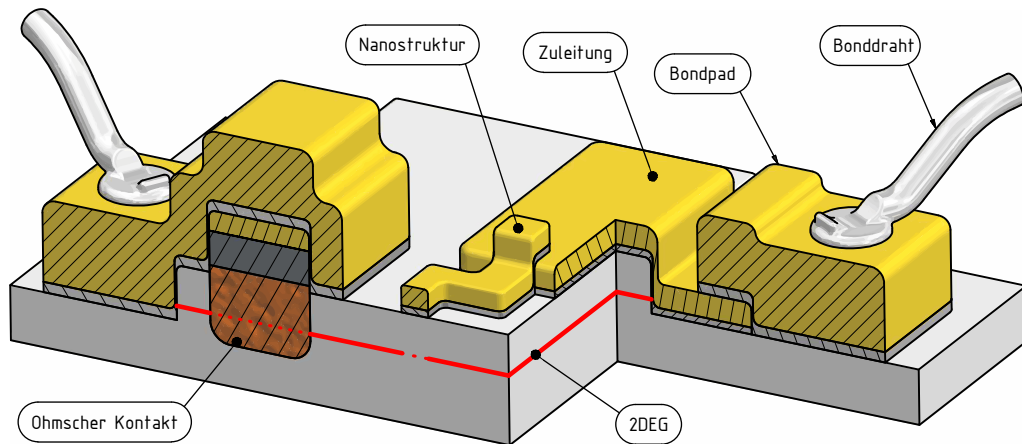


Abb. 3.9.: Schematische Darstellung einer vollständig prozessierten Probe

Abbildung 3.10 zeigt eine Serie von Zoomansichten einer vollständig prozessierten Probe mit einer Doppeldot-Nanostruktur (Größe L). Die Fotografien der oberen Reihe wurden mit Hilfe eines Lichtmikroskops erstellt (ausgenommen o. l.). Bei den restlichen Bildern mit hohem Vergrößerungsfaktor handelt es sich um REM-Aufnahmen.

3.2.5. Probleme

Abschließend soll kurz auf einige technologische Probleme bei der Probenherstellung eingegangen und mögliche Lösungsansätze vorgestellt werden. Diese wurden teilweise in Zusammenarbeit mit J. Bredenbach durch Testreihen an GaAs-Proben entwickelt.

Metallhaftung

Aufgrund von Problemen beim Lift-Off Prozess, konnten zeitweise keine Nanostrukturen verlässlich hergestellt werden. In einigen Fällen löste sich die aufgedampfte Metallschicht nicht vollständig von den durch Lack geschützten Substratbereichen ab. Die Unterstützung des Ablöseprozesses durch Ultraschall erwies sich bei diesem Prozessschritt als problematisch, da dies zu Kontaktunterbrechungen im Übergangsbereich zur Nanostruktur führen kann. Gleichzeitig wurde sporadisch eine signifikante Verschlechterung der Haftung zwischen Metallschicht und Substrat beobachtet. Teilweise wurden großflächige Bereiche

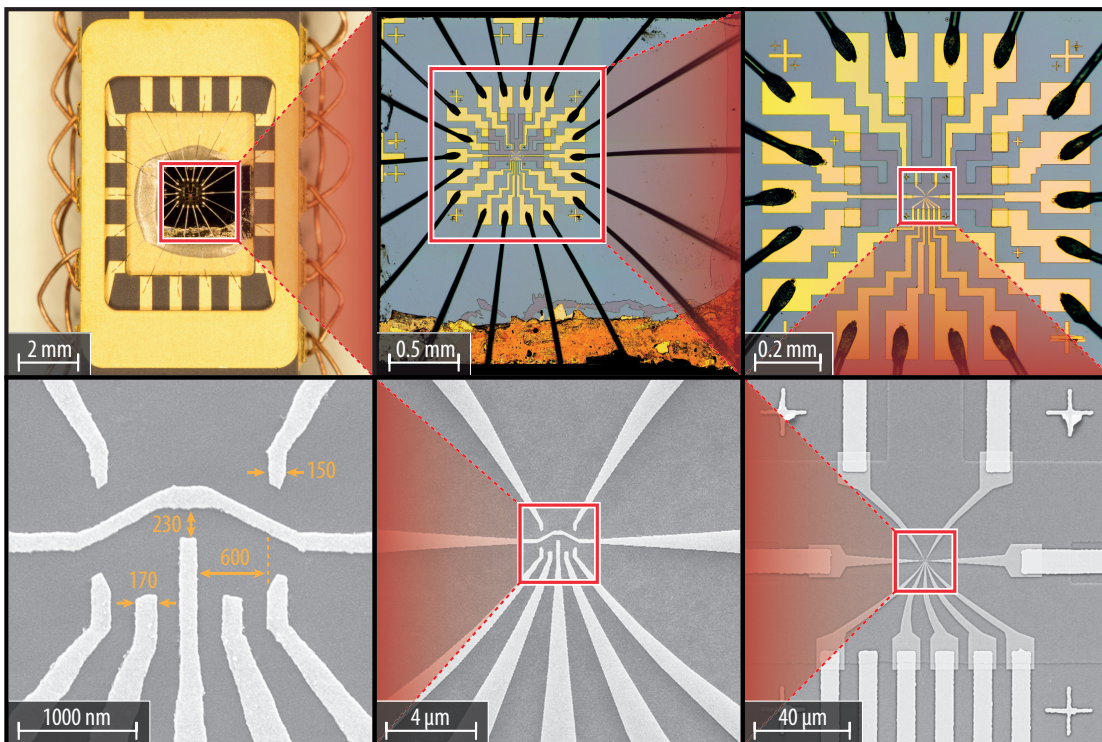


Abb. 3.10.: Zoomansicht einer vollständig prozessierten Probe mit Doppeldot-Nanostruktur (Größe L). *Oben:* Lichtmikroskop-Aufnahmen bzw. Fotografie (o. l.), *unten:* REM-Aufnahmen.

der Top-Gate-Struktur beim Lift-Off Prozess von der Oberfläche abgelöst und die Probe dadurch zerstört.

Die ursprüngliche Rezeptur sieht einen weiteren HCl-Dip unmittelbar vor dem Einbau in die Aufdampfanlage vor. Unter dem Lichtmikroskop ist jedoch bei genauer Betrachtung eine Veränderung des Lacks zu erkennen. Es entstehen kleine lochartige Strukturen, welche die PMMA-Schicht durchsetzen und der Oberfläche ein mattes Aussehen verleihen. Nach Verzicht auf den HCl-Dip traten die oben beschriebenen Probleme nicht mehr in Erscheinung. Negative Auswirkungen auf die Haftung der Strukturen konnten nicht beobachtet werden. Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass das Salzsäurebad vor dem Aufdampfen der Bondpads hingegen unerlässlich ist. Ein Auslassen dieses Prozessschrittes führt ansonsten beim späteren Bonden zu einem Ablösen der Kontaktflächen infolge der mechanischen Belastung.

Des Weiteren wurden sporadisch Haftungsprobleme der AuGe-Schicht beim Strukturieren der ohmschen Kontakte beobachtet. Diese lösten sich beim Lift-Off entweder komplett oder partiell vom Substrat ab, was eine Wiederholung des Herstellungsschrittes erforderte. Die dabei zum Teil entstandenen gestapelten Kontakte zeigten keine besonderen Auf-

3. Probenherstellung

fälligkeiten bezüglich ihrer elektronischen Eigenschaften. Die eigentliche Ursache des Haftungsproblems konnte jedoch bis zuletzt nicht vollständig geklärt werden.

Elektrische Kontaktierung der Top-Gate-Nanostruktur

Um Zeit und Materialkosten einzusparen wurde bereits in früheren Arbeiten dazu übergegangen, die kompletten Zuleitungen und Bondpads in einem Herstellungsschritt zu strukturieren. Jedoch zeigten sich in der Folge bei einigen Proben vermehrt Probleme bei der Nanostrukturkontaktierung. Diese äußerten sich dadurch, dass mit den betreffenden Gates keine Quantenpunktkontakte definiert, bzw. diese auch durch Anlegen stark negativer Potentiale nicht geschlossen werden konnten. Zum Lokalisieren der galvanischen Unterbrechung wurde bei gleichzeitiger Betrachtung der Probe im Rasterelektronenmikroskop ein negatives Potential²⁸ an sämtliche Gates angelegt. Das dabei entstehende Bild weist insofern einen Potentialkontrast auf, als dass alle negativ geladenen Strukturbereiche heller dargestellt werden. In Abb. 3.11 (links) ist deutlich eine Unterbrechung in der rechten Zuleitung am Übergang zur Nanostruktur zu erkennen. Diese ist offenbar auf ein ungünstiges Schichtdickenverhältnis zwischen den Zuleitungen ($170\ \mu\text{m}$) und der Nanostruktur ($40\ \mu\text{m}$) zurückzuführen. Aufgrund der Oberflächentopographie ist die dünnere Lage nicht über die Zuleitungsstufe hinweg verbunden.

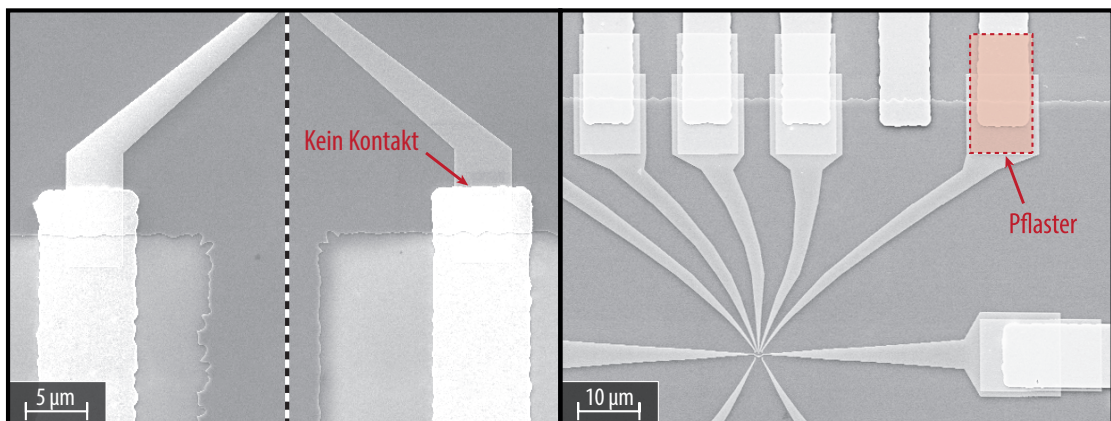


Abb. 3.11.: Kontaktprobleme am Übergang zur Nanostruktur bei zu dicken inneren Zuleitungen. *Links:* Visualisierung mittels Potentialkontrast im REM, *rechts:* Vorbeugung durch modifizierte Geometrie und „Metallpflaster“.

Durch Rückkehr zu einer zweistufigen Strukturierung mit dünneren inneren Zuleitungen konnte derartigen Kontaktproblemen vorgebeugt werden. Hierzu wurden neue Chrommasken mit separaten Belichtungsfeldern für die entsprechenden Strukturen angefertigt. Um bereits vorgefertigte Proben mit hohen Zuleitungen weiter bearbeiten zu können wurden folgende Maßnahmen ergriffen:

²⁸in Bezug auf die geerdete Mesa

Zuleitungsgeometrie: Durch eine Verbreiterung der Nanostrukturzuleitungen am äußeren Ende wird die Kantenlänge des kritischen Übergangs deutlich vergrößert (vgl. Abb. 3.11). Dies verringert die Wahrscheinlichkeit für eine Unterbrechung, da bereits ein kurzes leitfähiges Segment zur Kontaktierung ausreicht.

Metallpflaster: In einem separaten Herstellungsschritt wurden rechteckige Goldstrukturen im Übergangsbereich aufgedampft, die lokal eine Erhöhung der Schichtdicke bewirken. Während des Aufdampfens wurde die Probe lateral zur Quelle bewegt, um den Materialaufreffwinkel zu variieren. Dies führt zu einer leicht seitlichen Beschichtung der Zuleitungskante. Allerdings wird hierdurch auch ein Brechen der Metallschicht beim Lift-Off erschwert.

Beschädigung der Mesa

Einige Proben wiesen bei der elektronischen Charakterisierung einen exorbitant großen Widerstand zwischen bestimmten Kontaktpaaren auf, was jeweils durch eine unterbrochene Leitfähigkeit innerhalb der Mesa entlang einer Schnittgeraden erklärt werden konnte. Bei der darauf folgenden Untersuchung im Rasterelektronenmikroskop zeigten sich zum Teil markante kratzartige Strukturen auf der Waferoberfläche. Diese traten ausschließlich in Verbindung mit einer vorausgegangenen mechanischen Reinigung in Erscheinung, welche zeitweise bei stark verschmutzten Substraten mit Hilfe spezieller Wattestäbchen im Acetonbad durchgeführt wurde.

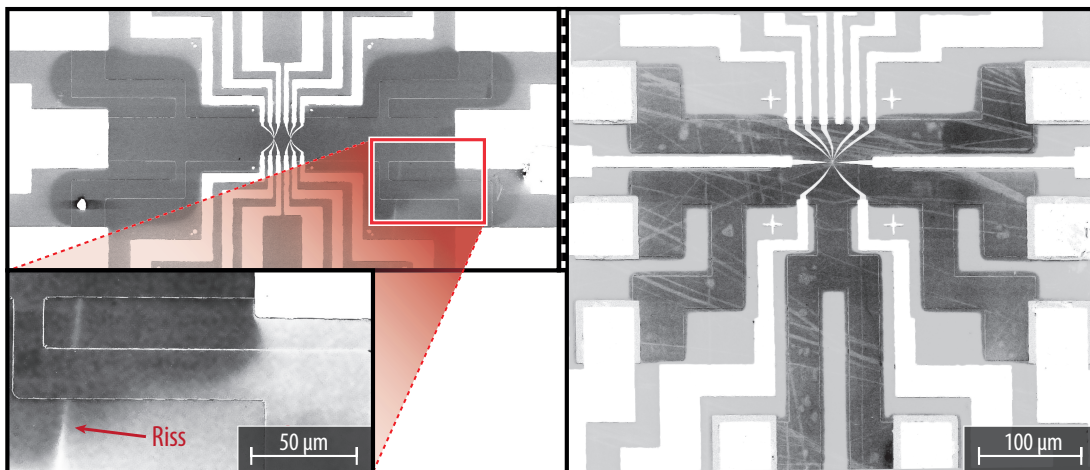


Abb. 3.12.: Kratzer auf der Waferoberfläche nach mechanischer Reinigung mittels Wattestäbchen. *Links:* Verringerter Aufladungseffekt in der Nähe des isolierten Kontakts unten rechts.

Abbildung 3.12 zeigt REM-Aufnahmen mit stark erhöhten Kontrastwerten von zwei betroffenen Proben. Auffallend ist dabei die dunkle Färbung der leitfähigen Areale, die

3. Probenherstellung

auf eine elektrostatische Aufladung durch die Strahlelektronen hindeutet. Dieser Effekt ist im rechten unteren Arm der 3-Bein-Mesa deutlich schwächer ausgeprägt. Bei genauer Betrachtung ist eine helle Linie zu erkennen, welche quer zur Leiterfläche verläuft und auf einen Riss hindeutet. Im Experiment konnte kein Strom über den angeschlossenen ohmschen Kontakt angelegt werden. Eine Ursache für die Entstehung feiner Kratzer könnten beispielsweise kleine GaAs-Splitter von der Bruchkante des Wafers sein, welche bei Kontakt mit einem Wattestäbchen abgelöst und mitgeschleift werden. Als Konsequenz wurde in der Folge auf jegliche Form der mechanischen Oberflächenbehandlung verzichtet und im Bedarfsfall eine Reinigung im Aceton-Ultraschallbad durchgeführt.

4

Kapitel 4.

Simulationen zur Elektronenstrahlithographie

4.1. Motivation

Die vom Elektronenstrahl zu belichtende Fläche wird in einem sogenannten *Patternfile* definiert. Hierbei wird die eigentliche Struktur aus verschiedenen geometrischen Grundformen komponiert, welche beim späteren Schreibprozess sequenziell belichtet werden. Während des Anfahrens der jeweils nächsten Startposition wird der Elektronenstrahl mit Hilfe eines sogenannten *Blankers* abgeschaltet, um Fehlbelichtungen zu verhindern. Hierzu wird der Elektronenstrahl in der optischen Säule durch Anlegen eines elektrischen Feldes so stark abgelenkt, dass dieser nicht mehr durch die Öffnung der eingesetzten Polschuhblende tritt. Abbildung 4.1 zeigt den schematischen Aufbau des Gesamtsystems in vereinfachter Darstellung.

Jedes Schreibfeld wird in 50000×50000 Pixel unterteilt, wobei die tatsächliche Schreibfeldgröße über die Vergrößerung am Mikroskop eingestellt werden kann. Bei der Belichtung wird der Elektronenstrahl über alle Pixel gerastert, die innerhalb einer definierten Patternstruktur liegen. Die Reihenfolge, in welcher die Pixel dabei angefahren werden wird durch die Schreibstrategie festgelegt. Bei rechteckigen Strukturen kann der Strahl wahlweise mäander-, oder spiralförmig geführt werden. Bei X- und Y-Polynomen ist die Strahlspur auf X- bzw. Y-Mäander festgelegt. Die Belichtungsdosis kann über folgende Parameter beeinflusst werden:

Dwelltime C: Belichtungszeit in Nanosekunden, für die der Elektronenstrahl auf jedem Pixel verweilt. Die Auflösung beträgt 1 ns bei einem Minimalwert von 25 ns.

Inkrement I: Schrittweite in Pixel. Bei einem Inkrement von n wird (pro Dimension) nur jeder n -te Pixel angefahren.

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

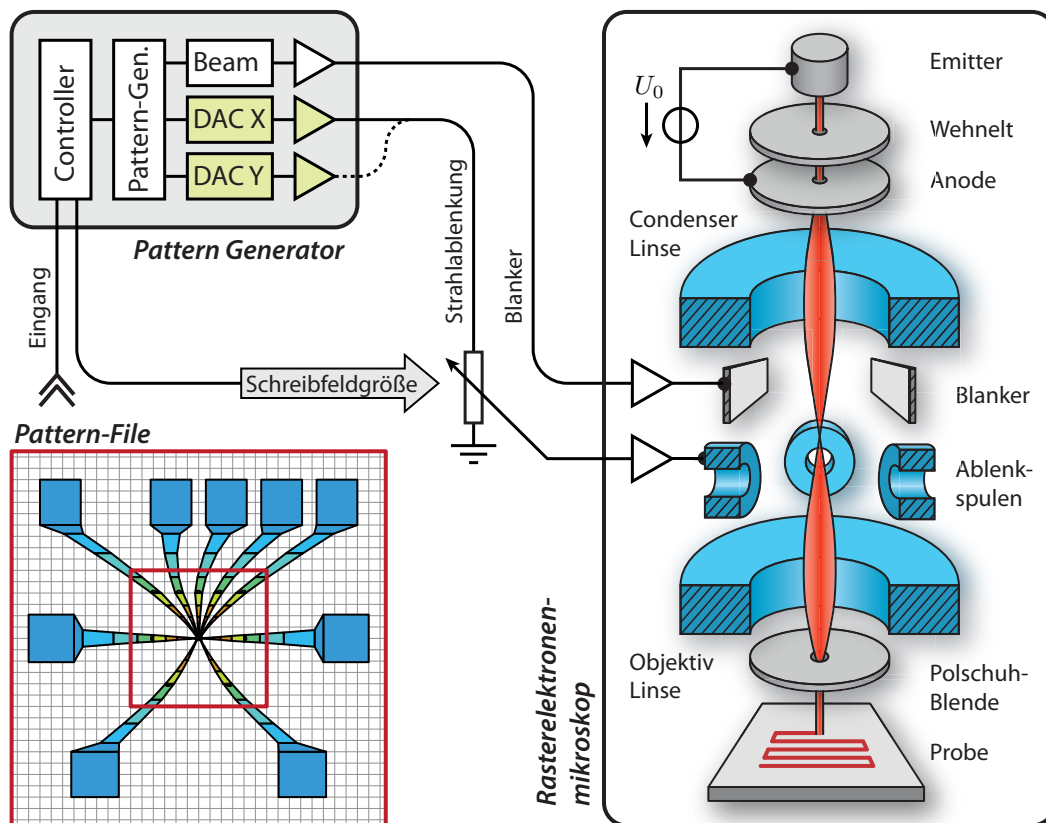


Abb. 4.1.: Schematische Darstellung des Elektronenstrahlschreibers

Die idealisierte Flächendosis D_A berechnet sich somit unter Annahme eines quadratischen Schreibfeldes mit N^2 Pixeln und Kantenlänge s gemäß:

$$D_A = \frac{Q_e}{A} = \frac{I_e C}{A_{\text{px}}} = \frac{I_e C N^2}{s^2 I^2} \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnet A_{px} die Fläche eines Pixels und I_e den Strahlstrom des Mikroskops. Die theoretische maximale Auflösung ist gegeben durch $I \cdot s / N$ und beträgt in dem typischerweise verwendeten $41 \mu\text{m}$ -Schreibfeld $I \cdot 0,82 \text{ nm}$.

Um eine möglichst optimale Auflösung zu erzielen, wurden daher zunächst Patterns mit Inkrement 1 geschrieben. Die entwickelten Proben weisen jedoch vor allem im relevanten Bereich kleiner Strukturen erhebliche Formverzerrungen auf (siehe Abb. 4.11, obere Reihe), welche sich durch eine Trägheit bzw. zeitliche Verzögerung in der Elektronenstrahlführung erklären lassen. Im Folgenden wird ein einfaches Modell zur quantitativen Berücksichtigung eines solchen Dämpfungseffektes vorgestellt. Mit Hilfe der entwickelten Software lässt sich der elektronenlithographische Prozess simulieren und eine Vorhersage über die effektiven Dosisverteilungen treffen.

4.2. Modell

Bei der bisherigen Betrachtung wurde davon ausgegangen, dass der Elektronenstrahl instantan von Pixel zu Pixel springt. Während diese Näherung für große Dwelltime Werte durchaus gerechtfertigt ist, muss für niedrigere Dosen eine Tiefpasscharakteristik diverser Systemkomponenten berücksichtigt werden. Hierzu zählen beispielsweise:

Patterngenerator: Die Steuerspannungen für die Strahlableitung werden mit Digital–Analog–Wandlern (*DACs*) generiert. Der Innenwiderstand der nachgeschalteten Ausgangstreiberstufe bildet zusammen mit der Kapazität des Koaxialkabels (typ. ~ 100 pF/m) einen passiven Tiefpassfilter.

Rasterelektronenmikroskop: Die Ablenkung des Elektronenstrahls erfolgt über Spulenpaare. Die Änderungsgeschwindigkeiten für Spulenstrom und somit auch Magnetfeld werden durch die Induktivität begrenzt.

Die Sprungantworten der beschriebenen Systeme folgen isoliert betrachtet jeweils einer exponentiellen Gesetzmäßigkeit. Aufgrund unbekannter Parameter (bspw. Treiberstufe für Spulenstrom) ist eine analytische Betrachtung der Übertragungsfunktion jedoch nicht möglich. Als Vereinfachung wird daher ein Exponentialansatz für die Sprungantwort des Gesamtsystems gewählt. Die Zeitkonstante τ wird durch Vergleich von Simulations– und Messdaten entsprechend bestimmt. Die Sprungantwort der Elektronenstrahlposition $x(t)$ in einer Dimension ist dann gegeben durch:

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad t \leq C \quad (4.2)$$

Dabei bezeichnet x_1 die vom Patterngenerator definierte Sollposition und x_0 die Ausgangsposition des Elektronenstrahls. Die Berechnung der Strahlspur erfolgt iterativ. In jedem Schritt wird zunächst die neue Sollposition x_1 gesetzt und dann gemäß obiger Gleichung die Bewegung des Strahls berechnet. Nach Verstreichen der Dwelltime ($t = C$) wird die erreichte Position als neuer x_0 –Wert übernommen. Abbildung 4.2 zeigt exemplarisch die berechnete Fahrspur des Elektronenstrahls für unterschiedliche Inkrementwerte und Schreibstrategien.

Vor allem bei mäanderförmiger Strahlführung und niedrigen Inkrementwerten bewirkt die Dämpfung, dass Randbereiche der Strukturen vom Elektronenstrahl nicht mehr angefahren werden. Um dies zu erklären werden die Richtungskomponenten der Strahlbewegung separat betrachtet. Im Falle einer Zeilenrasterung (X–Mäander) bewegt sich der Elektronenstrahl beispielsweise schneller in x – als in y –Richtung. Für die Zeit Δt_x zum Durchlaufen einer Zeile gilt in Abhängigkeit des Inkrements bei gleichbleibender Flächendosis:

$$\Delta t_x(I) = \frac{N_x}{I} \cdot I^2 C_1 = N_x I C_1 \quad (4.3)$$

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

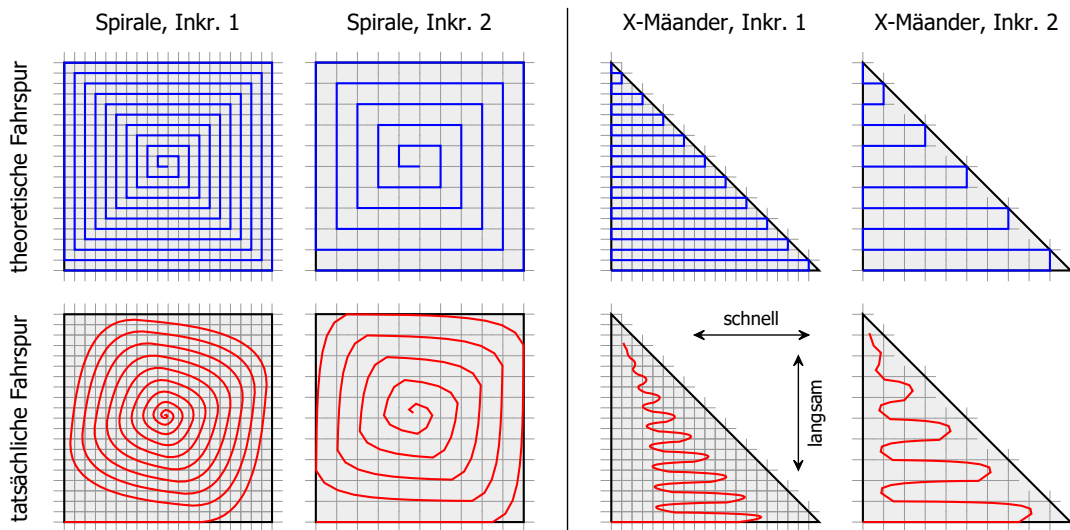


Abb. 4.2.: Schematische Darstellung der theoretischen und tatsächlichen Fahrspur des Elektronenstrahles beim Schreibprozess.

Dabei bezeichnet C_1 die Dwelltime für Inkrement 1 und N_x die native Pixelanzahl innerhalb der Zeile. Der Term I^2 entspricht dem Verhältnis der Flächeninhalte von effektiven und nativen Pixeln¹. Für die Frequenz der Bewegung in x -Richtung folgt somit:

$$f_x(I) = \frac{1}{2\Delta t_x} = \frac{1}{2N_x I C_1} \propto \frac{1}{I} \quad (4.4)$$

Für kleine Inkrementwerte wird nun offensichtlich die Frequenz der Zeilenbewegung so groß, dass die Tiefpasscharakteristik des Systems eine signifikante Dämpfung der Amplitude bewirkt. Die gemittelte Bewegungsgeschwindigkeit des Elektronenstrahls in y -Richtung ist wie erwartet unabhängig vom Inkrement. Bei spiralförmiger Führung des Strahls sind im Falle quadratischer Belichtungsflächen die effektiven Schreibfrequenzen beider Dimensionen identisch.

4.3. Simulationsergebnisse

Abbildung 4.3 zeigt die simulierten Schreibvorgänge einer typischen Gatestruktur für verschiedene Zeitkonstanten τ bei Inkrement 1. Rot dargestellt ist jeweils die gemäß Gleichung 4.2 berechnete Elektronenfahrspur. Im unteren Bereich finden sich jeweils Plots der daraus resultierenden Dosisverteilung. Diese erhält man durch Faltung der Fahrspur mit der sogenannten *Punktspreizfunktion* (kurz *PSF*). Letztere beschreibt die

¹Bei einem Inkrementwert von i verringert sich die Zahl der angefahrenen Pixel auf das $1/i^2$ -fache (zweidimensional). Um die Flächendosis konstant zu halten muss somit jeder Pixel für die i^2 -fache Zeit belichtet und die Dwelltime entsprechend angepasst werden.

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

radiale Dosisverteilung bei punktwiser Belichtung durch den Elektronenstrahl und wurde von D. Schefzyk² im Rahmen seiner Promotion experimentell für das verwendete REM bestimmt. Die eingezeichnete Konturlinie markiert die für eine Durchentwicklung des Lackes erforderliche Mindestdosis³ und kann als Rand der Struktur interpretiert werden.

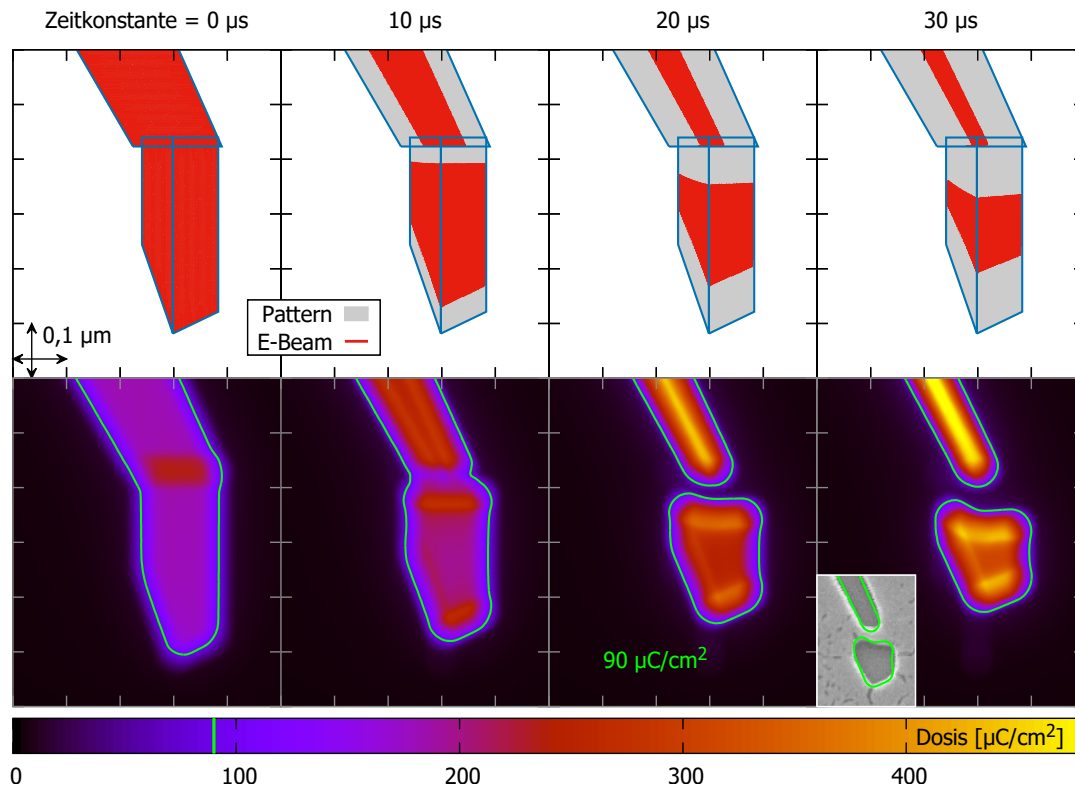


Abb. 4.3.: Auswirkung der Dämpfung auf die Elektronenstrahlspur

Das simulierte Pattern besteht aus aneinandergrenzenden X- und Y-Polygonen. Mit größer werdender Zeitkonstante nimmt die Formverzerrung infolge der Dämpfung zu, bis schließlich eine Lücke zwischen den einzelnen Strukturen entsteht. Die im Folgenden für unser System bestimmte Zeitkonstante beträgt $\tau = 30 \mu s$. Die eingebettete REM-Aufnahme zeigt den Ausschnitt einer entwickelten und besputterten Lackprobe, die mit der simulierten Struktur beschrieben wurde. Die berechnete Konturlinie ist dabei in guter Übereinstimmung mit den tatsächlichen Strukturrändern.

Abbildung 4.4 verdeutlicht den Einfluss des Inkrementwertes und somit der effektiven Pixelgröße auf die Formverzerrung. Mit steigendem Inkrement nimmt die Schreibfrequenz in x -Richtung gemäß Gleichung 4.4 ab, was eine geringere Amplitudendämpfung

²SCHFZYK, „Quantenbauelemente als aktive Sensoren zur Ladungsbestimmung in elektronischen Nanostrukturen“.

³Diese wurde anhand von Dosisests im Vorfeld bestimmt. Aufgrund der Abhängigkeit von der Entwicklungszeit des Lackes sollte diese als Richtwert verstanden werden.

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

bewirkt. Das gezeigte Pattern wurde dabei absichtlich mit einer kleineren als der für eine Durchentwicklung erforderlichen Flächendosis⁴ geschrieben, um eine weitere Vorhersage der Simulation zu verifizieren.

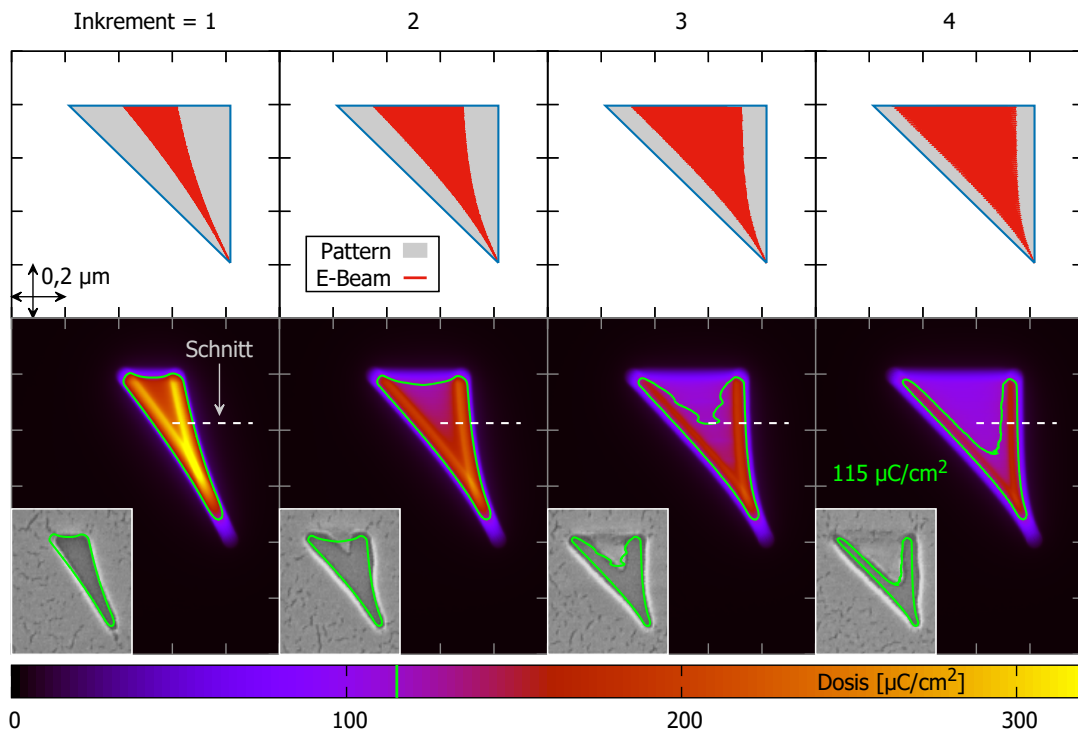


Abb. 4.4.: Auswirkung des Inkrements auf die Elektronenstrahlspur bei $\tau = 30 \mu\text{s}$

Offensichtlich bewirkt die Dämpfung eine Zunahme der Flächendosis. Zwar ist die applizierte Gesamtdosis aufgrund der gleichen Expositionszeit jeweils konstant, die effektiv belichtete Fläche nimmt jedoch mit kleiner werdendem Inkrementwert ab. Die Dosis ist dabei nicht homogen verteilt, sondern nimmt zu den Rändern (senkrecht zur schnellen Schreibrichtung) der Struktur hin zu. Für das Pattern in Abb. 4.4 wurde die Dwelltime gerade so gewählt, dass gemäß Simulationsvorhersage die kritische Dosis nur in den besagten Randbereichen erreicht wird. Die REM-Aufnahmen der belichteten und entwickelten Lackproben sind als Inlays dargestellt. Die Strukturen zeigen die für größere Inkrementwerte prognostizierte Keilform, wenngleich deren Umrisse in diesem Falle besser durch die $115 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ -Konturlinie beschrieben wird. Diese Abweichung kann jedoch mit Fluktuationen einzelner Prozessparameter (wie z. B. Lackdicke, Entwicklungszeit, Temperatur) erklärt werden.

Die inhomogene Dosisverteilung liegt dabei in einer variierenden Rastergeschwindigkeit des Elektronenstrahls begründet. Abbildung 4.5 zeigt die theoretische und simulierte x -Position des Strahls in Abhängigkeit der Zeit für eine Dreieckstruktur (X-Polygon).

⁴im Folgenden als *kritische Dosis* bezeichnet

Erwartungsgemäß läuft der Elektronenstrahl seiner Sollposition „hinterher“, wobei die Strukturränder nicht erreicht werden. Nach jedem Kreuzen der beiden Grafen erfolgt ein Wechsel der x -Bewegungsrichtung. Im unteren Bereich ist die x -Komponente der simulierten Rastergeschwindigkeit dargestellt. In den Umkehrpunkten sinkt diese kontinuierlich auf Null und steigt langsam wieder an, womit unter Annahme eines konstanten Strahlstroms eine höhere Liniendosis einhergeht. Die theoretische Sollgeschwindigkeit ist hingegen betragsmäßig konstant bei 1,10 mm/s und wird dämpfungsbedingt zu keinem Zeitpunkt erreicht.

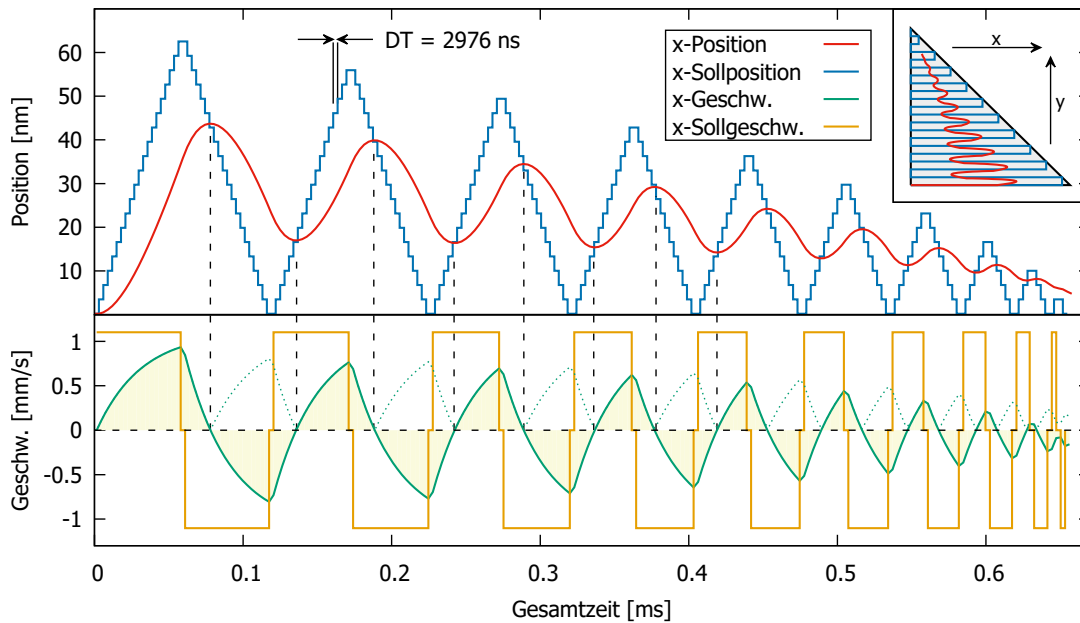


Abb. 4.5.: Simulierte Strahlposition und –geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit

Die Dosisverteilung im Randbereich der Strukturen kann die Qualität der nachfolgenden Prozessschritte maßgeblich beeinflussen. So wirkt sich beispielsweise eine steile Lackkante positiv auf den Lift-Off-Prozess aus, da das Brechen der aufgedampften Metallschicht an den Strukturrändern begünstigt wird.

Abbildung 4.6 zeigt die simulierten Dosisprofillinien entlang der in Abbildung 4.4 eingezeichneten Pfade. Die Nullposition wurde für eine bessere Vergleichbarkeit jeweils auf die Lackkante (kritische Dosis) gesetzt. Dabei zeigt sich, dass kleinere Inkrementwerte und somit höhere Flächendosen im Randbereich mit tendenziell steileren Dosisprofillinien einhergehen. Zugunsten einer optimalen Lackkante kann es daher durchaus sinnvoll sein, zu kleinen Inkrementwerten überzugehen und die damit verbundenen Formverzerrungen „manuell“ zu kompensieren. Dies kann durch eine Größenanpassung der Strukturen im Patternfile erfolgen.

Die Ermittlung der Zeitkonstante τ , welche die Dämpfungseigenschaft des vorliegenden Systems bestmöglich beschreibt, erfolgt anhand eines geeigneten Testfeldes. Dieses enthält

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

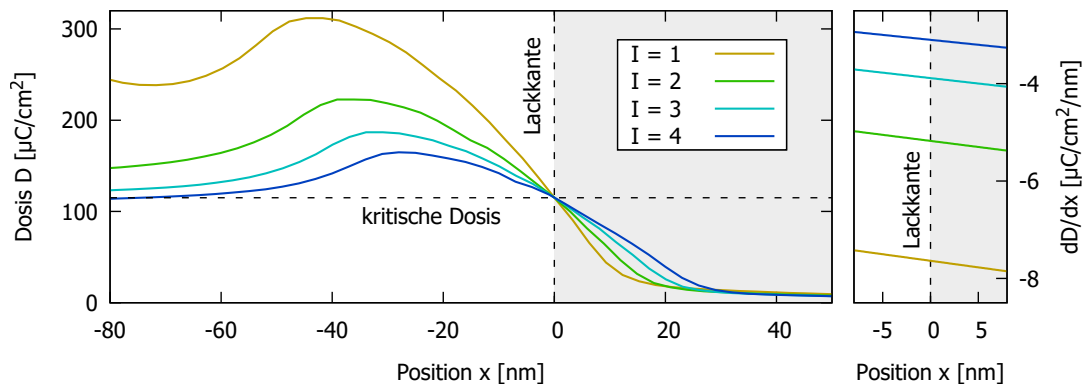


Abb. 4.6.: Simulierte Profillinien der Flächendosis in Abhängigkeit des Inkrements

zwei geometrische Grundformen – ein Quadrat und ein gleichschenkliges Dreieck mit $\approx 600 \mu\text{m}$ Kantenlänge – die jeweils mit unterschiedlichen Schreibstrategien (Spirale, X- und Y-Mäander) belichtet und simuliert werden. Als Parameter wird das Inkrement bei gleichbleibender nomineller Flächendosis⁵ von $260 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ gemäß Gl. 4.1 variiert. Durch Vergleich der simulierten Konturlinien mit den Umrissen der belichteten und entwickelten Proben wird dann die Zeitkonstante τ ermittelt. Die beste Übereinstimmung wurde dabei für einen Wert von $\tau_0 = 30 \mu\text{s}$ erzielt, was einer Tiefpass Grenzfrequenz von $f_c = 1/(2\pi\tau_0) \approx 5,3 \text{ kHz}$ entspricht.

Im oberen Bereich von Abbildung 4.7 ist das simulierte und geschriebene Patternfile, sowie die berechnete Elektronenstrahlspur dargestellt. Darunter findet sich eine REM-Aufnahme der geschriebenen und entwickelten Struktur⁶. Hierbei handelt es sich um eine Fotomontage, welche aus mehreren Einzelbildern zusammengesetzt wurde. Überlagert dargestellt sind die simulierten Konturlinien für eine Flächendosis von $90 \mu\text{C}/\text{cm}^2$, welche ausgesprochen gut mit den tatsächlichen Strukturrändern übereinstimmen. Im unteren Bildbereich ist schließlich die berechnete Dosisverteilung für das simulierte Pattern dargestellt.

4.4. Anwendung

Die folgende Diskussion bezieht sich ausschließlich auf mäanderförmige Schreibstrategien, wobei jeweils nur die schnelle (oszillierende) Schreibrichtung betrachtet wird. Zur Vermeidung bzw. Minimierung der dämpfungsbedingten Formverzerrungen können

⁵Die tatsächliche Kantenlänge des Schreibfeldes ist um den Streckfaktor 1.191 (x -Richtung) bzw. 1.167 (y -Richtung) größer als die am Patterngenerator nominell eingestellte Fieldsize. Die Flächendosiswerte wurden daher entsprechend umgerechnet.

⁶Die Probe wurde zur Bildgebung mit einer ca. 15 nm dicken Goldschicht besputtert

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

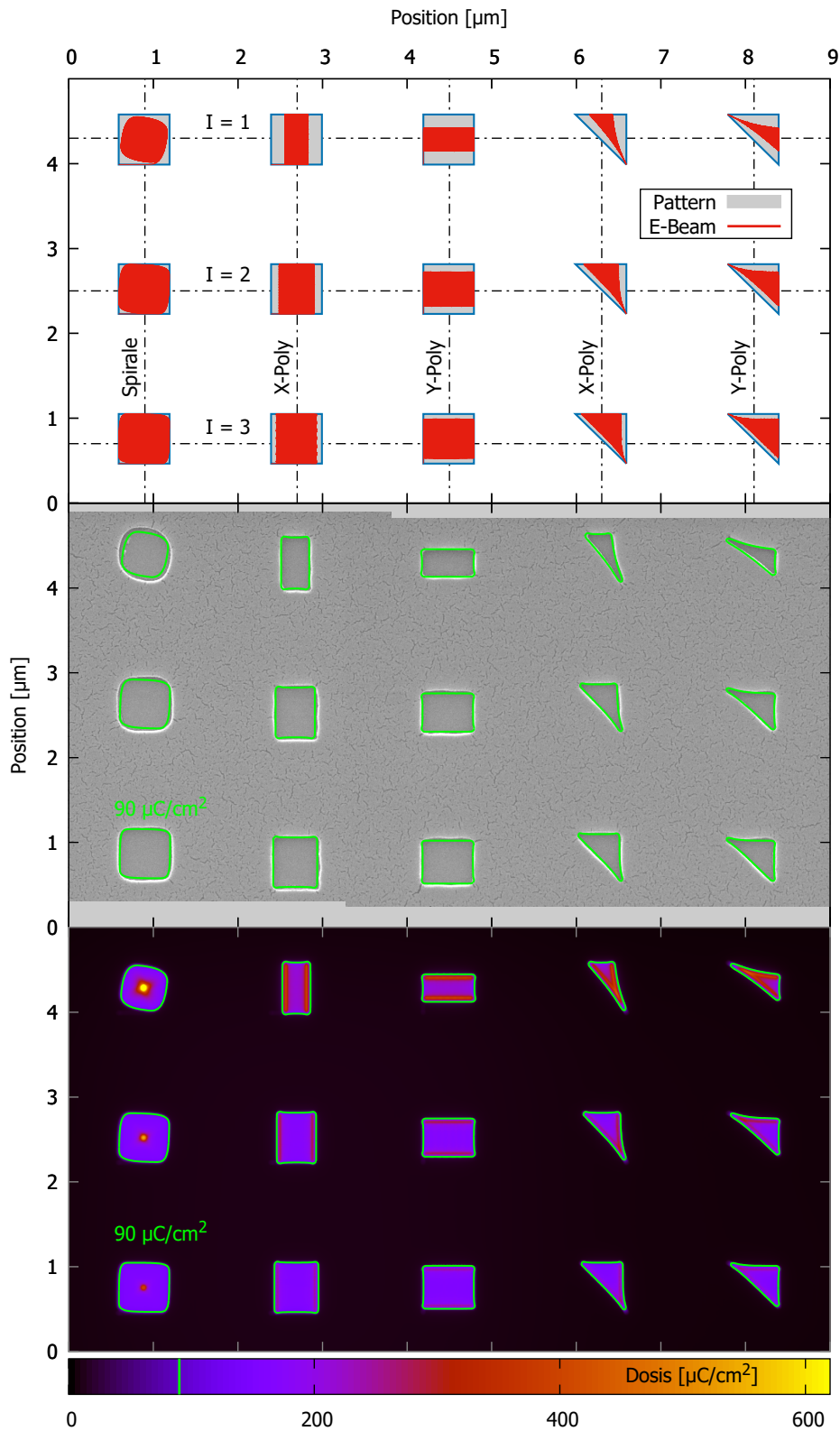


Abb. 4.7: Simulation der Elektronenstrahlspur für verschiedene Schreibstrategien.

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

unter den gegebenen Randbedingungen mehrere unterschiedliche Strategien, sowie eine Kombination derselben verfolgt werden:

Absenkung des Strahlstroms: Zur Konstanthaltung der Dosis muss bei einer Reduktion der Stromstärke die Dwelltime umgekehrt proportional erhöht werden. Dies führt gemäß Gl. 4.4 zu niedrigeren Schreibfrequenzen und somit zu geringerer Formverzerrung. Beim verwendeten Rasterelektronenmikroskop *Philips XL30 SEM* kann der Strahlstrom nur stufenweise über verschiedene Blenden variiert werden. Der für das Belichten eingestellte Minimalwert betrug ca. 14 pA.

Erhöhung des Inkrements: Der Übergang zu höheren Inkrementwerten bei gleichzeitiger Adaption der Dwelltime bewirkt aufgrund der quadratischen Abhängigkeit (siehe Gl. 4.1) ebenfalls eine Absenkung der Oszillationsfrequenzen. Dies geht jedoch mit einer Reduktion der theoretischen Auflösung einher.

Größenanpassung im Patternfile: Durch eine entsprechende Streckung der Polygone im Patternfile kann der Dämpfungseffekt kompensiert werden. Dies erfordert Kenntnis der Signalübertragungsfunktion vom Patterngenerator zum Strahlablesystem des Rasterelektronenmikroskops.

Zur Vereinfachung wird der zeitliche Verlauf der Elektronenstrahlposition als periodische Dreieckfunktion mit Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ angenommen⁷. Diese kann mittels Fourier-Analyse in eine Reihe zerlegt werden:

$$f(t, \omega) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit $\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \omega) \cdot \cos(k\omega t) dt, & \text{für } k \geq 0 \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t, \omega) \cdot \sin(k\omega t) dt, & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$

Sei o. B. d. A das Dreieckssignal maximal zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Amplitude 1, so verschwinden alle Koeffizienten b_k und man erhält:

$$f_{\Delta}(t, \omega) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(2k-1)^2}}_{a_k} \cdot \cos((2k-1)\omega t) \quad (4.5)$$

Als Dämpfungsglied wird ein passiver Tiefpassfilter erster Ordnung angenommen. Für sinusförmige Signale gelten für das Verhältnis V zw. Ein- und Ausgangsamplitude und die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ die folgenden Ausdrücke:

$$V(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad \Delta\varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \quad (4.6)$$

⁷Diese Näherung ist gültig für Amplituden, die einem Vielfachen der effektiven Pixelgröße entsprechen. Strukturbreiten kleiner als 10 px werden im Folgenden nicht berücksichtigt.

Zur Berechnung des Tiefpass-gefilterten Dreiecksignals wird jeder Summand der Fourierreihe entsprechend Gl. 4.6 gedämpft und dessen Phase verschoben. Dies führt zu folgendem Ausdruck:

$$f_{\Delta, \text{TP}}(t, \omega) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + ((2k-1)\omega\tau)^2}}}_{V_k(\omega)} \frac{1}{(2k-1)^2} \cdot \cos \left((2k-1)\omega t - \underbrace{\arctan[(2k-1)\omega\tau]}_{\Delta\varphi_k(\omega)} \right) \quad (4.7)$$

Durch Bestimmung der Funktionsmaxima kann schließlich das Amplitudenverhältnis zwischen Ein- und Ausgangssignal berechnet werden.

$$V_{\Delta}(\omega) \equiv \max_{t \in [0; T]} [f_{\Delta, \text{TP}}(t, \omega)] \quad (4.8)$$

Abbildung 4.8 zeigt die resultierende Übertragungsfunktion für ein Dreiecksignal in Abhängigkeit der Frequenz $f = \omega/2\pi$ (links), sowie den zeitlichen Verlauf (rechts). Die dargestellten Fälle entsprechen den Schreibfrequenzen der Quadrate⁸ aus Abbildung 4.7 für verschiedene Inkrementwerte. Die berechneten Amplituden sind dabei in sehr guter Übereinstimmung mit den Abmessungen der entwickelten Strukturen. Mit zunehmender Frequenz wird der Signalverlauf sichtbar asymmetrisch, was in einer größeren Phasenverschiebung der höherfrequenten Spektralkomponenten begründet liegt. Für die numerische Berechnung der Extremwerte (Amplituden) wurden jeweils die ersten 100 Summanden der Fourierreihe berücksichtigt.

Die Übertragungsfunktion stellt einen direkten Zusammenhang zwischen der Amplitude des Eingangssignals (nominelle Strukturbreite im Patternfile) und der effektiven, gedämpften Amplitude der Elektronenstrahlposition her:

$$N_{\text{eff}}(\omega) = N_{\text{nom}} \cdot V_{\Delta}(\omega) \quad (4.9)$$

$$\stackrel{(4.4)}{=} N_{\text{nom}} \cdot V_{\Delta} \left(\frac{2\pi}{2N_{\text{nom}}IC_1} \right)$$

Die Amplituden sind dimensionslos in Einheiten von nativen Pixeln des Schreibfeldes angegeben. Für die Berechnung der Strukturbreitenkorrektur im Patternfile können nun zwei verschiedene Ansätze verfolgt werden:

⁸mit mäanderförmigen Schreibstrategien (X- bzw. Y-Polygone)

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

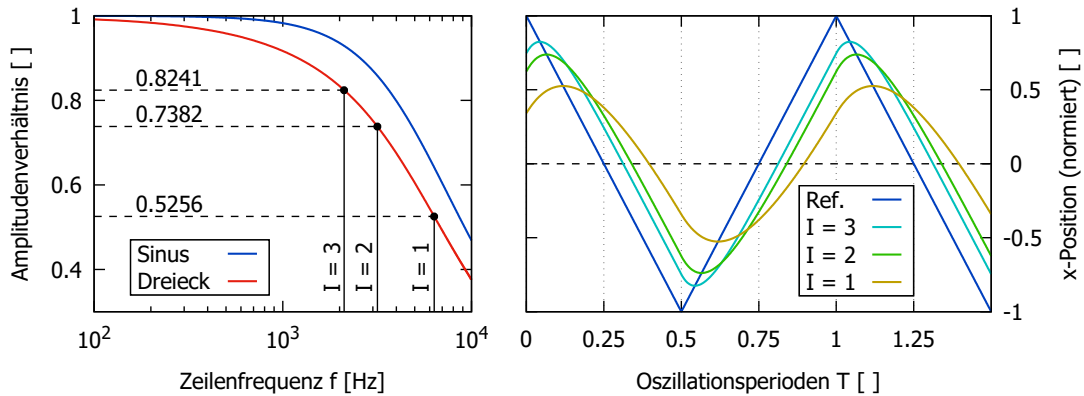


Abb. 4.8.: Amplitudendämpfung eines Dreiecksignals durch einen passiven Tiefpass erster Ordnung; *links:* Frequenzabhängigkeit, *rechts:* Signalform im zeitlichen Verlauf in Abhängigkeit der Frequenz

Konstante Dwelltime: Gemäß Gleichung 4.1 skaliert die Flächendosis linear mit der Dwelltime C . Da aufgrund der Dämpfung die effektiv belichtete Fläche kleiner wird, erhöht sich die Flächendosis bei gleichbleibender Belichtungszeit. Der Korrekturfaktor entspricht dabei gerade dem Verhältnis aus nomineller und effektiver Strukturbreite:

$$D_{A,\text{eff}}(\omega) = D_A \cdot \frac{N_{\text{nom}}}{N_{\text{eff}}(\omega)}$$

Hierbei handelt es sich lediglich um die gemittelte Flächendosis der Gesamtstruktur. Es wurde bereits gezeigt dass die Dämpfung eine inhomogene Dosisverteilung mit größeren Werten im Strukturrandbereich bewirkt. Abbildung 4.9 zeigt die gemäß Gleichung 4.9 notwendige Strukturverbreiterung im Patternfile in Abhängigkeit der Sollbreite für verschiedene Dwelltimes⁹ und Inkrementwerte (linke y -Achse). Zusätzlich sind in gepunkteter Darstellung (rechte y -Achse) die entsprechenden Korrekturfaktoren zur Berechnung der effektiven (gemittelten) Flächendosen angegeben.

In der gewählten doppellogarithmischen Darstellung zeigen beide dargestellten Größen ein asymptotisches Verhalten, wobei sich zwei charakteristische Bereiche unterscheiden lassen. In Richtung breiterer Strukturen, respektive niedriger Frequenzen, geht die erforderliche Verbreiterung gegen eine Dwelltime- und Inkrement-abhängige Schranke. Die prozentuale Abweichung zwischen nomineller- und effektiver Breite nimmt ab und der Dosisskalierungsfaktor nähert sich seinem Grenzwert von Eins. Die linearen Asymptoten für kleine Strukturbreiten lassen in guter Näherung jeweils auf Potenzgesetze zwischen den betrachteten Größen schließen. Die Exponenten sind dabei weitgehend unabhängig von Dwelltime und Inkrement. Die in diesem Bereich resultierenden effektiven Dosen sind zum Teil erheblich und bewirken eine zusätzliche Verbreiterung der Strukturen. Bedingt durch die räumliche Ausdehnung des Elektronenstrahls und dessen radiale Inten-

⁹Die Dwelltime ist zur besseren Vergleichbarkeit jeweils als Äquivalent bezogen auf $I = 1$ angegeben.

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

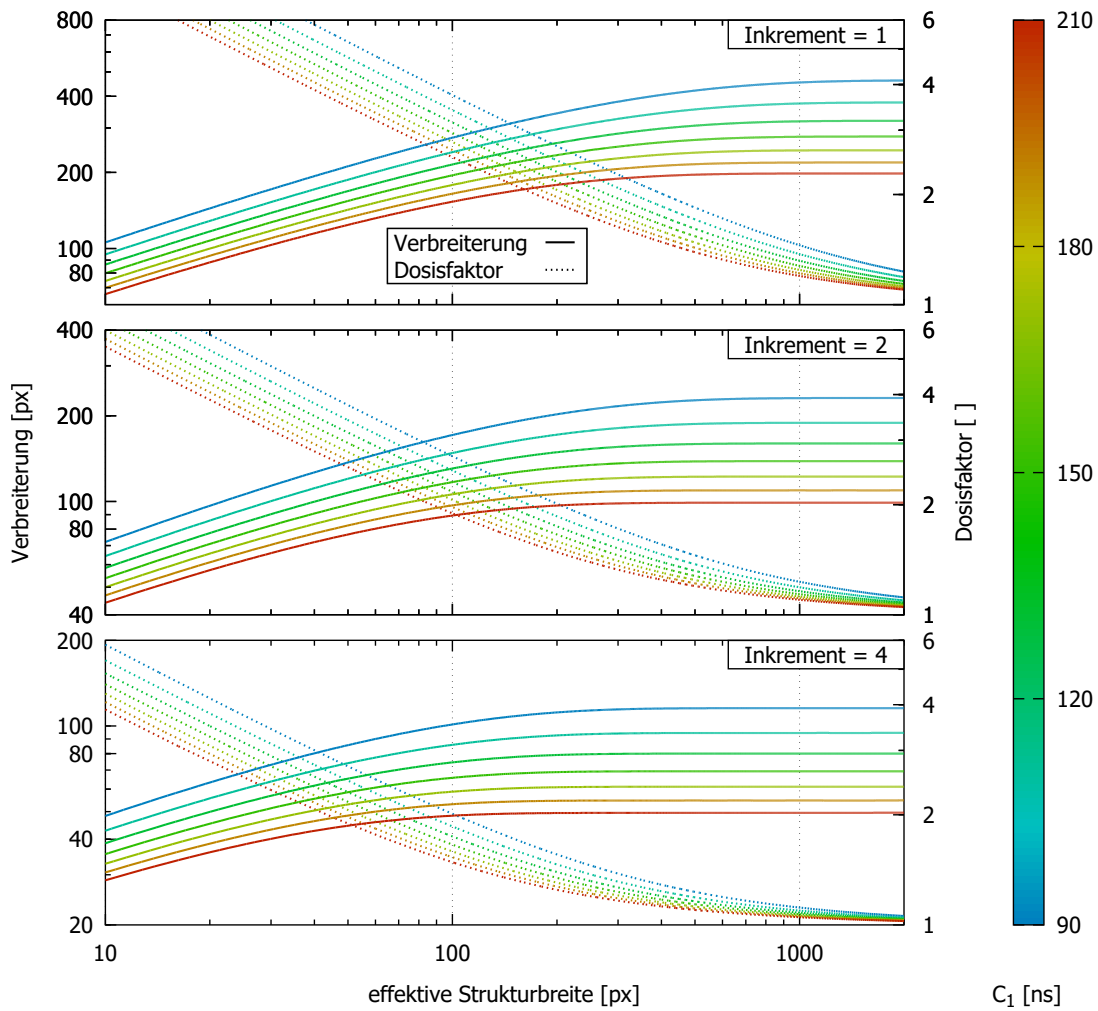


Abb. 4.9.: Erforderliche Strukturverbreiterung zur Kompensation der Formverzerrung und effektiver Dosisfaktor bei konstanter Dwelltime für verschiedene Dwelltime- und Inkrementwerte

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

sitätsverteilung kann auch weiter außerhalb der eigentlichen Struktur die kritische Dosis kumulativ erreicht werden. Dieses Phänomen wird als *Proximity-Effekt* bezeichnet^{10,11}.

Konstante Flächendosis: Alternativ kann die mittlere Flächendosis durch eine Korrektur der Dwelltime konstant gehalten werden. Anstelle der nominellen Dwelltime C_1 in Gl. 4.9 tritt dann eine effektive Dwelltime $C_{1,\text{eff}}$, welche die dämpfungsbedingte Dosiserhöhung kompensiert. Dies führt zu noch größeren erforderlichen Strukturverbreiterungen.

$$C_1 \rightarrow C_{1,\text{eff}}(\omega) = \frac{N_{\text{eff}}(\omega)}{N_{\text{nom}}} \cdot C_1 \quad (4.10)$$

Die entsprechenden Korrekturterme sind in Abb. 4.10 dargestellt. In Richtung breiterer Strukturen geht der Dwelltime-Korrekturfaktor gegen Eins und die erforderliche Strukturverbreiterung demzufolge gegen den selben Grenzwert wie im zuvor betrachteten Fall mit konstanter Dwelltime. Im Regime hoher Schreibfrequenzen zeigt der Dwelltime-Korrekturfaktor asymptotisches Verhalten, was wiederum auf ein Potenzgesetz zwischen besagten Größen schließen lässt. Die Strukturverbreiterung geht gegen eine Dwelltime- und Inkrement-abhängige Schranke.

Zwei Aspekte müssen bei dieser Korrekturstrategie berücksichtigt werden. Die maximale Taktrate des Patterngenerators beträgt $f_{\text{max}} = 40$ MHz, was eine Dwelltime-Untergrenze von $C_{\text{min}} = 1/f_{\text{max}} = 25$ ns bedeutet. Jenseits dieser in Abbildung 4.10 grau markierten Grenze muss somit entweder eine höhere Flächendosis in Kauf genommen, oder zu höheren Inkrementwerten übergegangen werden. Des Weiteren gilt es zu beachten, dass durch den gewählten Ansatz lediglich die gemittelte Flächendosis erhalten wird. Die bereits diskutierte dämpfungsbedingte Inhomogenität der Dosisverteilung kann im ungünstigsten Fall Unterbelichtungen zur Folge haben. Sofern die kritische Dosis im Strukturinnern nicht mehr erreicht wird (vgl. Abb. 4.6), muss eine höhere Dwelltime gewählt werden. Innerhalb eines Patternelements können die Dosisparameter nicht verändert werden. Polygone mit nicht konstanter Breite müssen daher entweder segmentiert oder eine geeignete Dwelltime als Kompromiss gewählt werden.

Abbildung 4.11 verdeutlicht die Anwendungsmöglichkeiten der gewonnenen Erkenntnisse bei der Erstellung von Patternfiles am Beispiel einer Doppeldot-Nanostruktur (Größe L). Mit Hilfe der abgeleiteten Beziehungen zwischen nomineller und effektiver Strukturbreite können die einzelnen Formelemente so dimensioniert werden, dass die Dämpfung der Elektronenstrahlbewegung gerade kompensiert wird. Dies bedeutet eine enorme Zeiterparnis, da bis dato Strukturen in einem iterativen Optimierungsprozess immer wieder neu geschrieben, entwickelt, ausgewertet und die Patternfiles entsprechend angepasst werden mussten. In der linken Spalte sind die definierten Strukturen, sowie die simulierte Elektronenstrahlspur dargestellt. Daneben finden sich zweidimensionale Plots der

¹⁰CHANG, „Proximity effect in electron-beam lithography“.

¹¹SEO, CHOI und KIM, „Determination of proximity effect parameters and the shape bias parameter in electron beam lithography“.

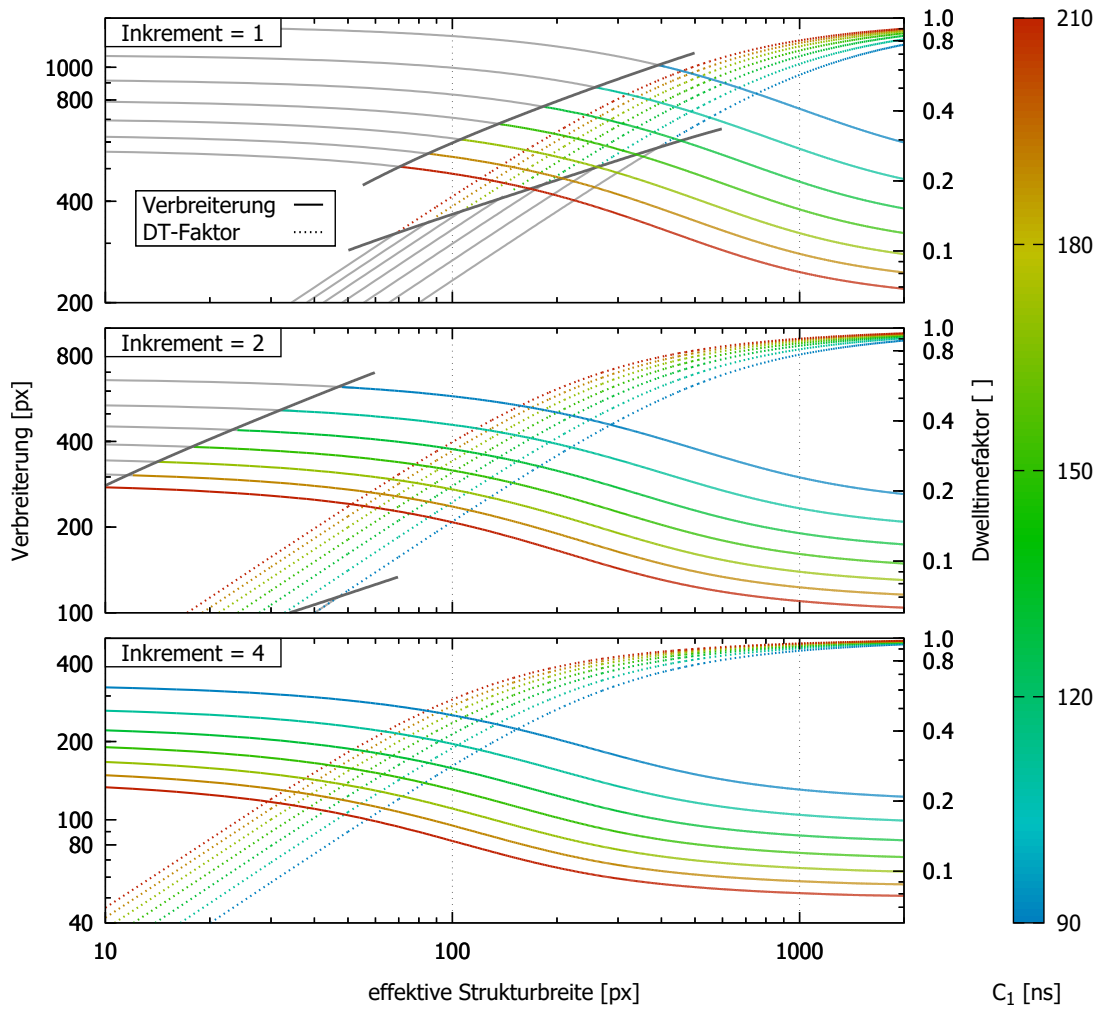


Abb. 4.10.: Erforderliche Strukturverbreiterung und Dwelltime-Skalierungsfaktor zur Kompensation der Formverzerrung bei Erhaltung der Gesamtdosis für verschiedene Dwelltime- und Inkrementwerte

4. Simulationen zur Elektronenstrahlolithographie

berechneten Flächendosisverteilung. Die rechte Spalte zeigt REM–Aufnahmen der jeweils geschriebenen Patternfiles. Die grün dargestellten Konturlinien entsprechen der als kritisch angenommenen Dosis von $90 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ und können als simulierte Strukturränder interpretiert werden. In der obersten Spalte entspricht die Form des definierten Patterns der gewünschten Struktur bei einem Inkrementwert von $I = 1$. Erwartungsgemäß bewirkt die Tiefpasscharakteristik des Systems starke Formverzerrungen. Es entstehen Lücken zwischen den einzelnen Zuleitungssegmenten. In der mittleren Spalte wurde das Patternfile auf Grundlage der ermittelten Korrekturfaktoren¹² gestreckt, um die Dämpfung zu kompensieren. Die resultierende Struktur entspricht dabei dem gewünschten Ergebnis. Die Patternfiles der dritten und ersten Spalte sind identisch. Lediglich der Inkrementwert wurde auf $I = 8$ angehoben und die Dwelltime entsprechend angepasst. Bedingt durch die niedrigere Relativgeschwindigkeit des Elektronenstrahls ist quasi keine Formverzerrung zu beobachten. Die Verteilung der Flächendosis ist vergleichsweise homogen. In allen drei Fällen sind die Simulationsvorhersagen in sehr guter Übereinstimmung mit den jeweils prozessierten Proben.

4.5. Ausblick

Das vorgestellte Modell basiert auf der Annahme, dass die Dämpfungscharakteristik des Gesamtsystems durch einen einfachen passiven Tiefpass erster Ordnung beschrieben werden kann. Auch wenn dieser einfache Ansatz bereits eine beachtliche Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den geschriebenen Strukturen liefert, so bietet sich hier dennoch Raum für weitere Optimierung. Mathematisch lässt sich ein lineares, zeitinvariantes System (kurz *LZI-System*) durch dessen Impulsantwort $g(t)$ auf ein Dirac–Impuls–Signal $\delta(t)$ charakterisieren. Das Ausgangssignal $U_A(t)$ kann durch Faltung des Eingangssignals $U_E(t)$ mit der Impulsantwort berechnet werden:

$$U_A(t) = (U_E * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_E(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (4.11)$$

In der Praxis sind Dirac–Impuls–Signale schwierig zu erzeugen. Die Impulsantwort kann jedoch alternativ als zeitliche Ableitung der Sprungantwort $h(t)$ ermittelt werden. Hierunter versteht man die Systemantwort auf eine Heaviside–Stufenfunktion. Ein möglicher Ansatz wäre nun, den zeitlichen Stromverlauf der Ablenkspulen unmittelbar nach einer (instantanen) Änderung der Sollposition zu untersuchen, um somit direkt auf die Position des Elektronenstrahls rückschließen zu können. Weiter ist es möglich, gegebenenfalls unterschiedliche Übertragungsfunktionen für x - und y -Ablenkung des Elektronenstrahls zu berücksichtigen.

¹²Strategie mit konstanter Dwelltime

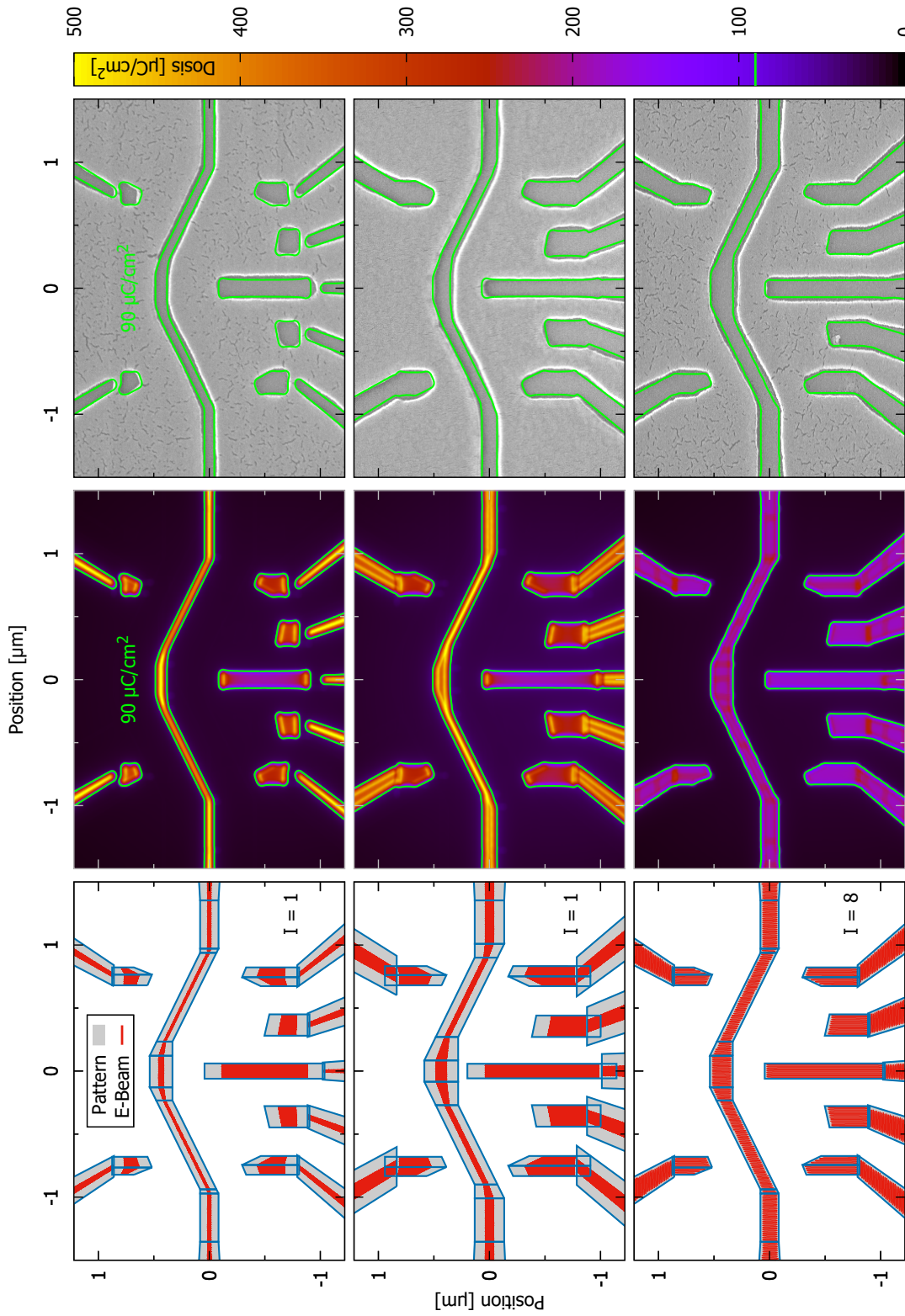


Abb. 4.11.: Simulation der Elektronenstrahlspur bei einer Doppeldot-Nanostruktur für verschiedene Schreibstrategien.

5

Kapitel 5.

Elektrostatische Simulation zweidimensionaler Elektronengase

5.1. Motivation

Die Konzeption geeigneter Nanostrukturen setzt Kenntnis über die resultierenden Einschlusspotentiale innerhalb der 2DEG-Ebene voraus. Dies ermöglicht bereits beim Entwurf der Gategeometrie deren Optimierung im Hinblick auf die Form und Abmessungen der damit später definierbaren Quantensysteme. Aufgrund der Wechselwirkung zwischen den beweglichen Elektronen der Gate- und 2DEG-Ebene ist eine analytische Betrachtung des vorliegenden Randwertproblems nicht möglich. Zur Simulation beliebiger Strukturdesigns und Parameter wurde daher ein Computerprogramm geschrieben, mit welchem sich die jeweiligen Ladungsverteilungen und Potentiale anhand eines iterativen Lösungsverfahrens numerisch berechnen lassen. Im Folgenden wird das dabei zu Grunde gelegte physikalische Modell, sowie die prinzipielle Funktionsweise des verwendeten Algorithmus vorgestellt.

5.2. Programmbeschreibung

5.2.1. Elektrostatisches Modell

Das zu simulierende System wird aus mehreren, parallel zum 2DEG orientierten Ebenen komponiert. Sowohl das Elektronengas, als auch die metallisierte Oberfläche werden dabei jeweils als leitfähige Schichten angenommen. Bei letzterer ist die Beweglichkeit der Ladungsträger durch die Strukturgrenzen eingeschränkt. Innerhalb der geschlossenen

5. Elektrostatische Simulation zweidimensionaler Elektronengase

Flächenelemente (einzelne Gates, komplettes 2DEG) wird daher im statischen Gleichgewicht ein konstantes Potential angestrebt. Dies ist gemäß $E = -\nabla\phi$ gleichbedeutend mit der Forderung nach einer verschwindenden Tangentialkomponente des elektrischen Feldes. Im Falle der Top-Gates wird daher eine Verschiebung der freien Ladungsträger auf den Strukturrand erwartet. Während in diesen Segmenten das Zielpotential in Form von Simulationsparametern als Randbedingung vorgegeben wird, bildet das Elektronengas durch die Kopplung an Source und Drain zunächst eine 0 V-Äquipotentialfläche¹. Hierzu stellt sich im statischen Gleichgewicht genau die Elektronenverteilung ein, welche das von den übrigen Ladungen ausgehende Potential innerhalb der Ebene gerade kompensiert. Negative Gatespannungen führen im 2DEG folglich zu einer lokalen Reduktion der Elektronendichte. Da diese keine negativen Werte annehmen kann, ist ab einem kritischen Potential kein vollständiger Ausgleich mehr möglich. Dies bedeutet eine komplette Verarmung des 2DEGs im Bereich unter dem entsprechenden Gate und ein „Durchgreifen“ des Potentials.

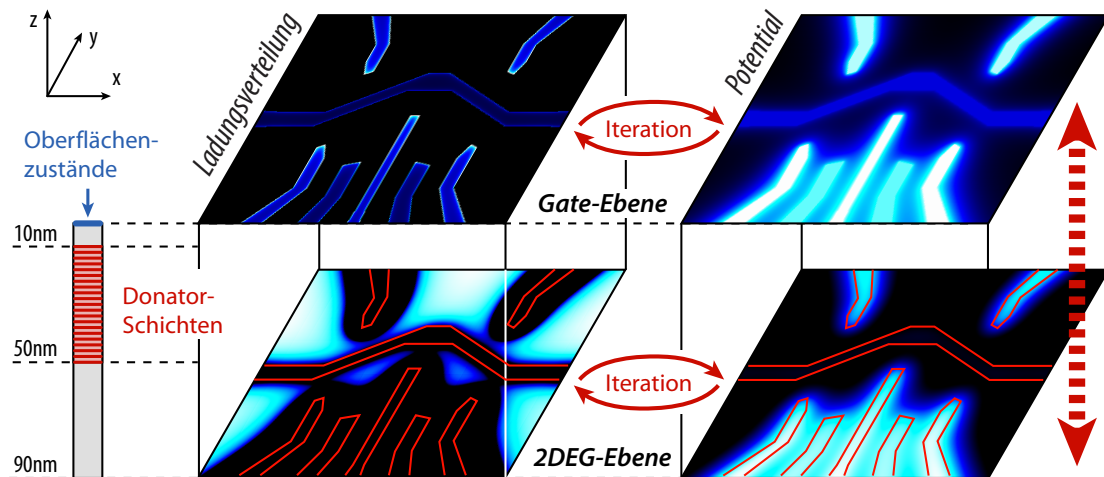


Abb. 5.1.: Elektrostatistisches Modell der Probe. Ionisierte Donatoratome und Oberflächenzustände werden als homogen geladene Schichten berücksichtigt.

Zusätzliche statische Hintergrundladungen lassen sich schichtweise in Form beliebiger Verteilungen definieren. Dies dient in erster Linie der Berücksichtigung ionisierter Donatoratome, welche hierzu innerhalb des dotierten Tiefenbereichs (20 – 50 nm) auf mehrere äquidistante Lagen homogen verteilt werden (siehe Abb. 5.1 links). Möglich ist darüber hinaus auch die Modellierung von Störstellen durch lokale Punktladungen oder elektronischer Oberflächenzustände.

¹Es wird stets der lineare Grenzfall ohne angelegte Source-Drain-Spannung betrachtet

5.2.2. Grundannahmen

Zur Vereinfachung des physikalischen Problems und Steigerung der Programmeffizienz werden folgende Näherungen angewendet:

Klassische Elektrostatik: Es erfolgt keine quantenmechanische Berücksichtigung der elektronischen Zustände innerhalb des 2DEGs durch simultanes Lösen der Schrödinger- und Poisson-Gleichung. Der Ansatz einer klassisch verteilten Ladungsträgerdichte liefert jedoch im Fall vielfach geladener Quantenpunkte eine gute Approximation².

Schichtsystem: Die Probe wird als Schichtung mehrerer infinitesimal dünner Ladungsebenen modelliert. Dies erschwert die Definition (homogen) dreidimensional verteilter Ladungen, welche hierzu auf entsprechend viele, eng beieinander liegende Ebenen „quantisiert“ werden müssen. Die Tiefenausdehnungen des 2DEGs (siehe Abb. 3.2) und der Gatestruktur werden darüber hinaus nicht berücksichtigt. Der Abstand beider Ebenen wird auf Grundlage der in Abschnitt 3.1.1 berechneten Elektronenzustände mit 95 nm angenommen.

Materialeigenschaften: Im simulierten Bereich wird die Heterostruktur als homogenes Dielektrikum mit konstanter Permittivität ϵ_r angenommen. Diese Näherung liefert einen verhältnismäßig kleinen Fehler, da der Halbleiter mit Ausnahme der 10 nm dicken GaAs-Deckschicht aus $\text{Al}_{0,33}\text{Ga}_{0,67}\text{As}$ besteht und die Dielektrizitätskonstanten³ der unterschiedlichen Materialien nur geringfügig voneinander abweichen:

$$\epsilon_{r,\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}} = 13,18 - 3,12 \cdot x \quad (5.1)$$

Oberflächenladung: An der Grenzfläche des Halbleiters zum Vakuum existieren aufgrund der unterbrochenen Kristallstruktur lokalisierte Elektronenzustände^{4,5}. Die exakte Verteilung der damit verbundenen negativen Oberflächenladung ist dabei nur schwer abzuschätzen, weshalb diese näherungsweise als zusätzliche, homogen geladene Schicht angenommen wird. Alternative Modellansätze⁶ gehen von keinen zusätzlichen Zuständen im Bereich der Gates aus. Dies lässt sich jedoch durch eine entsprechende Korrektur der ermittelten Gateladungen nachträglich berücksichtigen. Die Oberflächenladungsdichte dient dabei als freier Parameter zur Anpassung der Simulationsergebnisse (Pinch-Off-Spannungen, Definitionsstufen) an die Messergebnisse.

²WEICHELBAUM und ULLOA, „Tunability of qubit Coulomb interaction: Numerical analysis of top-gate depletion in two-dimensional electron systems“.

³ADACHI, „GaAs, AlAs, and Al_xGa_{1-x}As: Material parameters for use in research and device applications“.

⁴ALI u. a., „Behaviour of surface states on a GaAs/AlGaAs heterostructure investigated by capacitance spectroscopy“.

⁵CISNEROS-DE-LA-ROSA u. a., „Effect of surface states on the electrical properties of MBE grown modulation doped AlGaAs/GaAs“.

⁶LAUX, FRANK und STERN, „Quasi-one-dimensional electron states in a split-gate GaAs/AlGaAs heterostructure“.

5.2.3. Programmablauf

Abbildung 5.2 zeigt den schematischen Programmablauf in Form eines Flussdiagramms. Das zu berechnende System wird zunächst mittels verschiedener Eingabedateien initialisiert. Diese enthalten neben den relevanten Materialeigenschaften (Tiefe des 2DEGS, Verteilung der statischen Hintergrundladungen, etc.) auch zentrale Simulationsparameter, wie z. B. die gewünschte Pixelauflösung, sowie diverse Konvergenzkriterien. Darüber hinaus können zuvor unterbrochene Programmdurchläufe durch Laden kompletter Datensätze als Startwerte fortgesetzt werden. Das Einlesen der Gategeometrie erfolgt aus einer speziell formatierten Vektorgrafik. Jedem geschlossenen Flächenelement wird dabei ein benutzerdefiniertes Potential anhand seiner Farbe zugewiesen, welches fortan als Referenz für die anschließende Bestimmung der Ladungsverteilungen dient. Die Strategie zur Ermittlung einer selbstkonsistenten Lösung basiert dabei auf der iterativen Berechnung von Ladungsverteilungen, welche bestimmte Potentialfelder innerhalb der jeweiligen Ebene erzeugen. Die Abhängigkeit der lokalen Potentiale von sämtlichen Ladungen des Systems und die damit einhergehende Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern beider leitfähiger Schichten, machen eine schrittweise Annäherung an den Gleichgewichtszustand erforderlich.

Zur Verkürzung der Rechenzeit erfolgt die Simulation in mehreren aufeinanderfolgenden Programmschleifen mit unterschiedlichen Simulationsparametern. Dieser Ansatz sieht zunächst eine schnelle Berechnung der Ladungsverteilungen mit grober Auflösung vor, im Zuge derer ein stationäres Gleichgewicht zwischen 2DEG- und Gateebene erreicht wird. In darauf folgenden Durchläufen kann dann die Pixelauflösung sukzessive erhöht werden, wobei keine nennenswerte Ladungsänderung auf großer Längenskala mehr beobachtet wird. Dies hat eine verhältnismäßig rasche Konvergenz der zeitintensiveren Rechenroutine nach bereits wenigen Iterationsschritten zur Folge.

Bei der Hauptschleifeninitialisierung wird die Gatestruktur gemäß der jeweiligen Pixelauflösung gerastert und die Potentiale der statischen Hintergrundladungen ermittelt. Anschließend erfolgt die wechselseitige Berechnung der voneinander abhängigen Ladungsverteilungen auf den beiden leitfähigen Schichten. Dies geschieht jeweils in gekapselten Iterationsschleifen (siehe Abb. 5.2 rechts), welche bis zur Erfüllung eines benutzerdefinierten Epsilon-Kriteriums ausgeführt werden. Das durch die Randbedingungen vorgegebene Effektivpotential ϕ_{eff} kann dabei nach Beiträgen der Ladungen innerhalb und außerhalb der betreffenden Ebene $E = 2DEG / Gate$ zerlegt werden.

$$\phi_{\text{eff}}|_E = \phi_{\text{ext}}(q_i \in \mathbb{R}^3 \setminus E)|_E + \phi_Z(q_i \in E)|_E \quad (5.2)$$

Gesucht wird demnach eine Verteilung $q(x, y)$, welche das Zielpotential $\phi_Z(x, y)$ gemäß obiger Gleichung in guter Näherung erzeugt⁷. Der verwendete Algorithmus erreicht dies

⁷Im Falle eines verarmten 2DEGS ist keine vollständige Kompensation des Potentials möglich

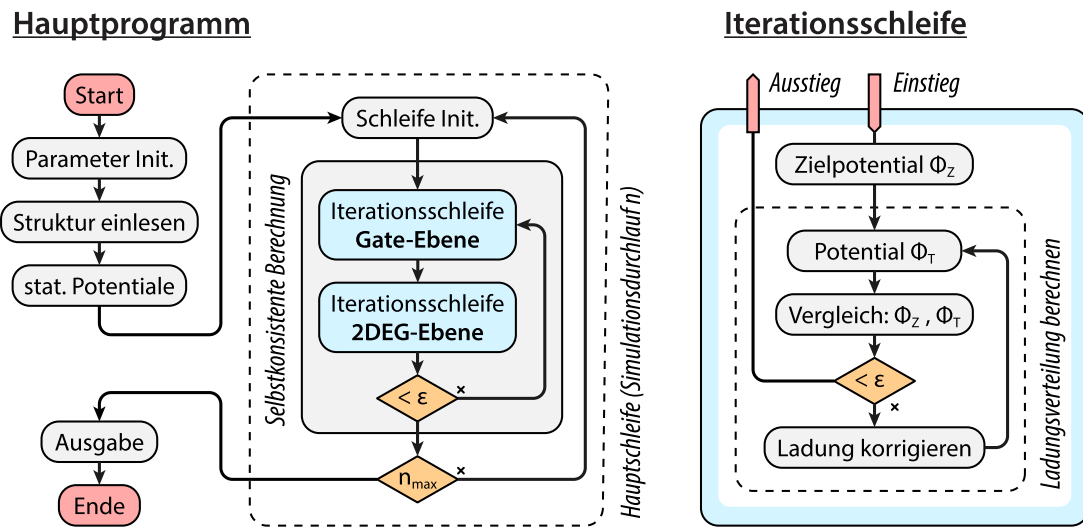


Abb. 5.2.: Flussdiagramm des Programmablaufs zur Berechnung der Potentiale und Ladungsverteilungen innerhalb der Gate- und 2DEG-Ebene

durch eine schrittweise Korrektur der Ladungen auf Grundlage eines Vergleichs mit dem tatsächlich erzeugten Potential $\phi_T(x,y)$

$$\Delta q(x,y)|_E = a \cdot \left(\phi_Z(x,y)|_E - \phi_T(x,y)|_E \right) \quad (5.3)$$

Die Proportionalitätskonstante a wird im Hinblick auf eine möglichst schnelle Konvergenz empirisch optimiert. Abschließend erfolgt die Ausgabe der ermittelten Ladungsverteilungen und Potentiale. Letztere können dabei zusätzlich auf beliebigen Ebenen mit senkrechter Orientierung zu einer der Koordinatenhauptachsen berechnet werden.

5.2.4. Potentialberechnung

Eine Kernfunktion des Simulationsprogramms besteht in der Bestimmung von Potentialen, welche von diskreten Ladungsverteilungen ausgehen. In guter Näherung werden die einzelnen Pixelladungen dabei als punktförmig angenommen und auf den jeweiligen Gitterkoordinaten der gerasterten Ebenen positioniert. Das lokale Potential stellt eine Superposition von Beiträgen sämtlicher Ladungen des Gesamtsystems dar. Bei einer Auflösung von $n \times m$ und k Ebenen müssen daher innerhalb einer kompletten Schicht $(n \cdot m)^2 \cdot k$ Berechnungen durchgeführt werden. Bei hohen Pixelzahlen führt dies aufgrund der quadratischen Abhängigkeit zu enormen Programmlaufzeiten, weshalb folgendes Verfahren zur Effizienzsteigerung Anwendung findet:

Die einzelnen Ebenen werden zunächst mit mehreren Netzen („Grids“) unterschiedlicher Maschenweiten überzogen. Jedes Segment S enthält dabei eine festgelegte Anzahl von Ele-

5. Elektrostatische Simulation zweidimensionaler Elektronengase

menten des nächst feineren, untergeordneten Koordinatensystems. Nach einer Änderung der Verteilung werden für alle Grids und Segmente die Gesamtladungen Q , sowie die Ladungsschwerpunktkoordinaten \mathbf{R} berechnet (siehe Abb. 5.3)

$$\mathbf{R}|_S = \frac{\sum_{i \in S} \mathbf{r}_i \cdot |q_i|}{\sum_{i \in S} |q_i|}, \quad Q|_S = \sum_{i \in S} q_i \quad (5.4)$$

Dies erlaubt die Berücksichtigung eines größeren Flächenabschnitts in Form einer genäherten Punktladung im Ladungsschwerpunkt der Verteilung. Bei der anschließenden Potentialberechnung kann die Auflösung in Abhängigkeit des Abstands stufenweise vergrößert und die Anzahl erforderlicher Rechenschritte folglich effektiv reduziert werden. Die Netzparameter sind über Initialisierungsdateien unabhängig für jeden Hauptschleifendurchlauf frei konfigurierbar. Das von der Verteilung im Grid G erzeugte Potential am Punkt $\mathbf{r} = (x, y)$ berechnet sich gemäß:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \sum_{i \in G} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|} \quad (5.5)$$

Die Ladung am Ort des zu bestimmenden Potentials ($\mathbf{r} = \mathbf{R}_i$) muss hingegen durch Integration der entsprechenden Ladungsdichte über die rechteckige Pixelfläche berücksichtigt werden.

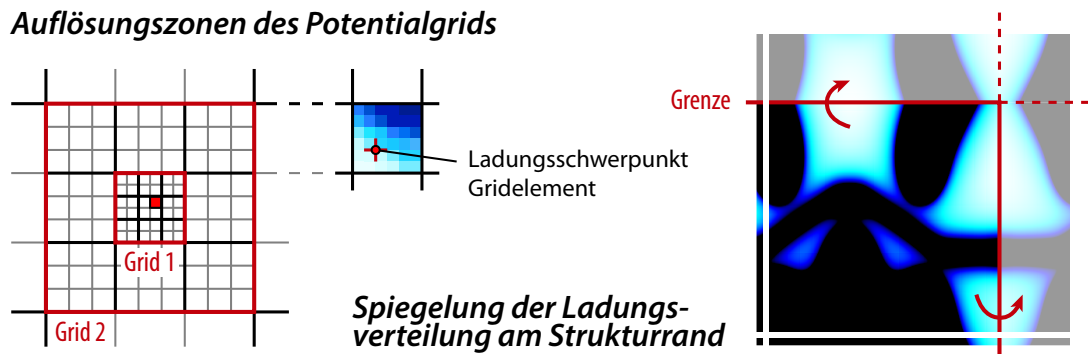


Abb. 5.3.: Links: Variable Auflösung zur effizienteren Potentialberechnung, rechts: Spiegelung der Ladungsverteilung am Strukturrand.

Randbedingungen: Für Potentialberechnungen wird jeweils Ladung innerhalb eines definierten Radius berücksichtigt. Im Randbereich ist dies jedoch nur eingeschränkt möglich, da keine Information über die Ladungsträgerdichten außerhalb des simulierten Segments vorliegt. Als Ansatz mit eindeutiger Lösung werden daher die Ladungsverteilungen durch Spiegelung an den Strukturgrenzen jeweils periodisch fortgesetzt. Abbildung 5.3 illustriert dies am Beispiel des 2DEGs eines definierten Doppeldots. Zudem wird bei allen Simulationen grundsätzlich ein entsprechender Mindestrandabstand der relevanten Nanostrukturen berücksichtigt.

5.3. Simulation eines Quantenpunktkontakts

Abbildung 5.4 zeigt die simulierten elektrischen Potentiale (oben) und Ladungsverteilungen (unten) innerhalb der 2DEG-Ebene beim Schließen eines Quantenpunktkontakts. Hierzu wird das Gatepotential bis zum Erreichen des *Pinch-Offs* schrittweise abgesenkt. Der Rand des verarmten 2DEG-Bereichs wird durch eine 0,1 mV-Konturlinie illustriert⁸. Die Geometrie, sowie die angenommenen Materialparameter entsprechen dabei der in Kapitel 8 vermessenen Probe *V815-A3b*. Durch Anpassen der Konzentration ionisierter Donatoratome kann das exemplarisch betrachtete Verhalten des zentralen Koppelgates *KM* nahezu exakt reproduziert werden. Um die Elektronendichte des nicht verarmten 2DEGs auf den Messwert abzugleichen, erfolgt ein entsprechender Ladungsausgleich in Form einer zusätzlichen, homogenen Ladungsschicht an der Probenoberfläche⁹. Sowohl das Schwellpotential zur vollständigen Verarmung des 2DEGs unter den Gates, als auch die Abschnürspannung des Kontakts von ca. $-1,3$ V sind in sehr guter Übereinstimmung mit den durchgeführten Leitwertmessungen aus Abschnitt 8.1.

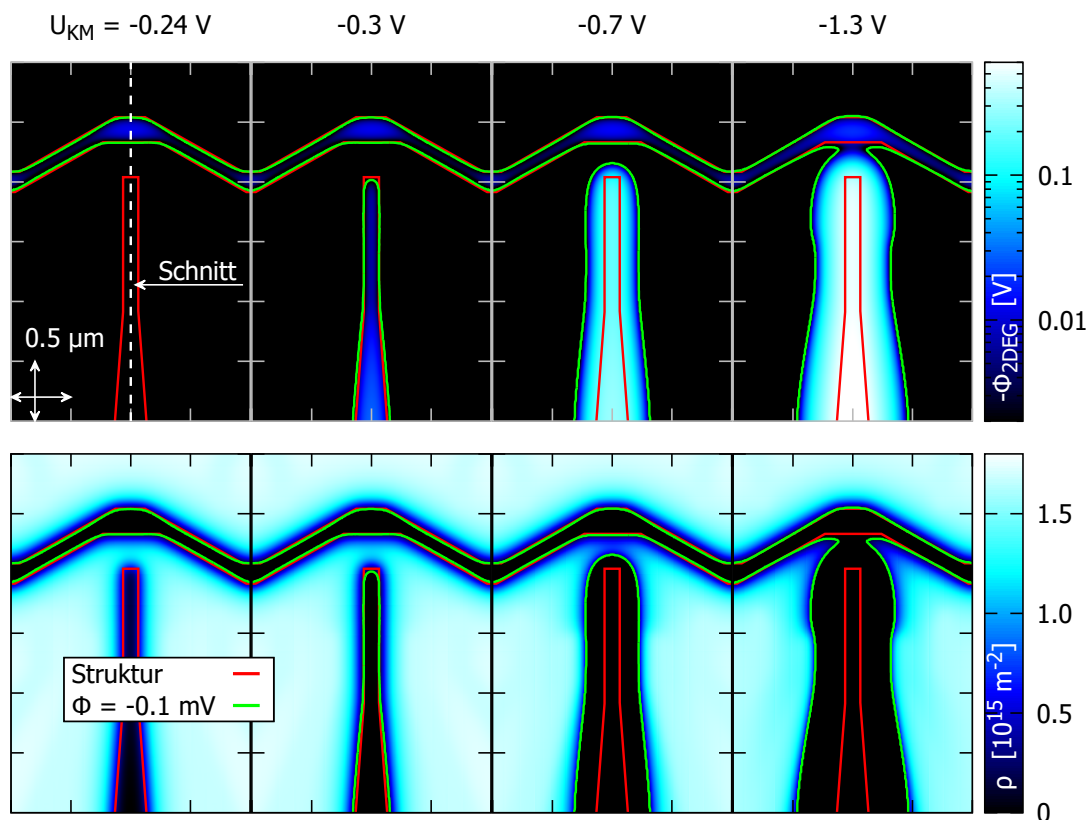


Abb. 5.4.: Simulierte Ladungsverteilung und Potential im 2DEG beim Schließen des zentralen Koppelgates *KM* bei konstantem Trenngatepotential $U_{TG} = -0,28$ V

⁸ Aufgrund numerischer Artefakte (Rauschen) eignet sich die 0 V-Konturlinie nicht zur Darstellung

⁹ In Simulationsreihen wurde die optimale Oberflächenladungsdichte mit $-3,5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ bestimmt

5. Elektrostatische Simulation zweidimensionaler Elektronengase

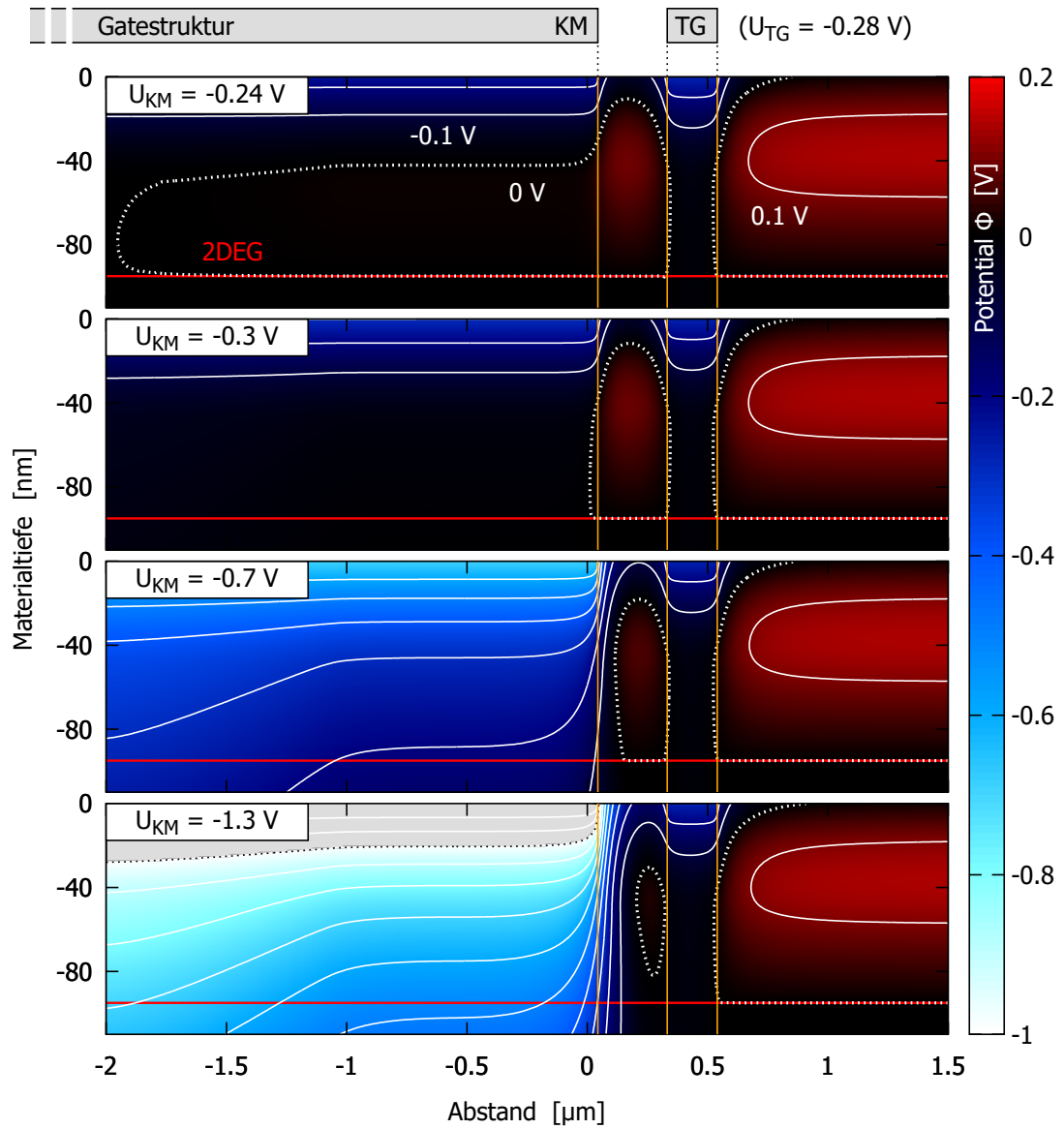


Abb. 5.5.: Schnittansicht des Potentialverlaufs beim Schließen des zentralen Koppelgates KM bei konstantem Trenngatepotential $U_{\text{TG}} = -0,28$ V

Abbildung 5.5 zeigt die Potentialverläufe im Bereich zwischen Elektronengas und Probenoberfläche als Schnitte entlang der in Abbildung 5.4 eingezeichneten Kante. Im Hinblick auf eine bessere Darstellbarkeit bei kleinen Gatespannungen U_{KM} wurde die Potentialskala am unteren Ende auf -1 V begrenzt. Flächen mit niedrigeren Potentialen sind durch eine graue Einfärbung kenntlich gemacht. Im Fall $U_{\text{KM}} = -0,24\text{ V}$ zeigt sich am linken Rand bereits eine vollständig verarmte Zone im Elektronengas, welche sich beim weiteren Absenken der Gatespannung in Richtung Trenngate ausbreitet. Dies äußert sich in einem „Abheben“ der 0 V -Potentiallinie von der 2DEG-Ebene. Für $U_{\text{KM}} = -1,3\text{ V}$ ist schließlich der komplette Bereich zwischen Finger- und Trenngate ladungsfrei, was einen abgeschnürten Quantenpunktkontakt bedeutet. Im betreffenden Segment ist das lokale Potential folglich kleiner Null.

5.4. Fazit

Wenngleich das beschriebene Simulationsprogramm aufgrund des vereinfachten Modellansatzes und der angewandten Näherungen kein exaktes Bild auf Nanometerskala erwarten lässt, so liefert es dennoch eine gute Prognose der elektrostatischen Verhältnisse innerhalb der 2DEG-Ebene. Aus den berechneten Potentialfeldern und Ladungsverteilungen lassen sich nützliche Informationen über die Form der definierbaren Quantensysteme und der hierfür im späteren Experiment anzulegenden Gatespannungen gewinnen. Darüber hinaus wird eine Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung verschiedener Quantenpunktkontakte ermöglicht, was insbesondere für die funktionale Optimierung der Gatestrukturdesigns von entscheidender Bedeutung ist.

6 Kapitel 6.

Messaufbau

Im folgenden Abschnitt werden die Apparaturen und grundlegenden Messprinzipien vorgestellt, welche für die Aufnahme der Messdaten zur Anwendung kamen.

6.1. Kryotechnik

Untersuchungen im Grundzustand eines quantenmechanischen Systems verlangen Temperaturen nahe des absoluten Nullpunkts. Die in diesem Regime an den hergestellten Nanostrukturen zu beobachtenden Quantisierungseffekte sind mit sehr kleinen Energieskalen verknüpft. Einen der zentralen limitierenden Faktoren für die Qualität der gewonnenen Messdaten stellt daher die thermische Verbreiterung dar. Zur Kühlung der Proben werden Heliumkryostaten verwendet, deren Aufbau und Kühlmechanismen im Folgenden näher erläutert werden.

6.1.1. Eigenschaften von Helium

Erste Hinweise auf das Element Helium lieferte 1868 die Entdeckung seiner charakteristischen Absorptionslinie im Sonnenspektrum^{1,2}. Das technisch bedeutsame Edelgas wird hauptsächlich durch fraktionierte Destillation aus Erdgas gewonnen. Mit dem leichteren ³He existiert ein zweites stabiles Isotop, welches auf der Erde jedoch extrem selten vorkommt. Aufgrund seines niedrigen Siedepunkts von 4,21 K bei Atmosphärendruck wird flüssiges Helium als bevorzugtes Kühlmittel in Kryostaten eingesetzt. Durch Abpumpen

¹JANSSEN, „Indication de quelques-uns des résultats obtenus à Cocanada, pendant l'éclipse du mois d'août dernier, et à la suite de cette éclipse.“

²LOCKYER, „Sur une méthode employée par M. Lockyer pour observer en temps ordinaire le spectre des protubérances signalées dans les éclipses totales de Soleil.“

des Heliumgases über der Flüssigkeit kann deren Temperatur mittels Verdampfungskühlung weiter abgesenkt werden. Dies liegt darin begründet, dass bei der Evaporation die jeweils energiereichsten Atome in die Gasphase übergehen und dadurch die mittlere thermische Energie der Flüssigkeit abnimmt. Der Teilchenfluss über die Phasengrenze ist dabei proportional zum Dampfdruck (siehe Abb. 6.1 links) und nimmt mit sinkender Temperatur immer weiter ab. Der daraus resultierende Einbruch der Kühlleistung begrenzt die in der Praxis erreichbaren Endtemperaturen auf ca. 1,3 K (^4He) bzw. 0,3 K (^3He)³.

Helium weist bei Atmosphärendruck eine sehr niedrige Verdampfungswärme von ca. 83,5 J/mol auf⁴. Von praktischer Bedeutung ist dies vor allem beim Abkühlen von Kryostaten. Die thermische Energie wird dem System dabei hauptsächlich durch Aufwärmen des kalten Heliumgases entzogen. Für eine maximale Effizienz muss das austretende Gas die Temperatur der durchströmten Apparatur angenommen haben, was entsprechend niedrige Strömungsgeschwindigkeiten erfordert.

$^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischungen

Die rechte Seite von Abbildung 6.1 zeigt das Phasendiagramm von Mischungen beider stabiler Heliumisotope bei gesättigtem Dampfdruck in Abhängigkeit der Temperatur und ^3He -Konzentration. Beim Abkühlen durchläuft reines ^4He (Kernspin $I = 0$) ab einer Temperatur von 2,17 K einen als *Bose-Einstein-Kondensation*⁵ bezeichneten Phasenübergang. Dabei besetzen fast alle Bosonen den selben quantenmechanischen Grundzustand und können kollektiv durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben werden. Ein damit verbundener makroskopischer Quanteneffekt ist die Suprafluidität. In dieser Phase besitzt ^4He keinerlei innere Reibung bzw. Viskosität und kann somit widerstandsfrei durch kleinste Kapillare strömen. Durch Beimischen von ^3He wird der Lambdaübergang zu niedrigeren Temperaturen hin verschoben und findet für Konzentrationen größer als 67% schließlich überhaupt nicht mehr statt. Mit einem Kernspin von $I = \frac{1}{2}$ unterliegt das leichtere Heliumisotop dem Pauli-Prinzip und wird durch die Fermistatistik beschrieben. Innerhalb des für Entmischungskryostaten relevanten Temperaturbereichs zeigt reines ^3He kein suprafluides Verhalten.

Unterhalb des trikritischen Punktes bei 0,87 K weist das Phasendiagramm einen verbotenen Zustandsbereich auf, innerhalb dessen keine Mischbarkeit der beiden Heliumisotope gegeben ist. Beim Abkühlen kommt es daher an der sogenannten Mischungslückengrenze zu einer Separation in eine ^3He -arme und eine ^3He -reiche Phase. Dabei bilden die koexistierenden Flüssigkeiten aufgrund unterschiedlicher Dichten zwei Schichten. Mit sinkender Temperatur strebt der ^3He -Anteil in der angereicherten Phase gegen 100%. Dem entgegen steht eine endliche Grenzkonzentration des leichten Isotops von 6,5% in der darunterliegenden Schicht. Hierbei bildet der ^4He -Anteil des Gemischs einen suprafluiden

³POBELL, *Matters and Methods at Low Temperatures*.

⁴DONNELLY und BARENGHI, „The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure“.

⁵EINSTEIN, „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, 2. Abhandlung“.

Hintergrund, durch welchen sich die darin gelösten ^3He -Atome – ähnlich einem Gas – widerstandsfrei bewegen können. Der Übergang eines ^3He -Atoms von der angereicherten in die verarmte Phase kann daher als eine Art Verdampfungsprozess aufgefasst werden. Die hierfür aufzubringende Energie wird dem System in Form von Wärme entzogen und kann durch Bilanzierung der Enthalpien berechnet werden⁶. Mit \dot{n} als ^3He -Teilchenstrom über die Phasengrenze erhält man für die resultierende Kühlleistung \dot{Q} schließlich den folgenden Ausdruck:

$$\dot{Q} = 84\dot{n}T^2 \quad (6.1)$$

Im Vergleich dazu gilt für die mit dem Verdampfen von reinem ^3He bzw. ^4He einhergehende Kühlleistung $\dot{Q} \propto \exp(-1/T)$. Die verbleibende Restlöslichkeit von ^3He in ^4He am absoluten Nullpunkt ist dabei von essentieller Bedeutung für die Effektivität des Kühlmechanismus bei niedrigen Temperaturen. Die Herleitung dieses quantenmechanischen Phänomens erfolgt über eine Betrachtung der jeweiligen Bindungsenergien zwischen den beiden Isotopen. Das gelöste ^3He wird dabei als modifiziertes Fermigas mit effektiver Masse m^* aufgefasst, welches dem Pauli-Prinzip unterliegt. Im Gegensatz zum Verdampfungskühlen kann die ^3He -Flussrate über die Grenzfläche durch Schaffen eines chemischen Potentialgefälles stets hoch gehalten werden.

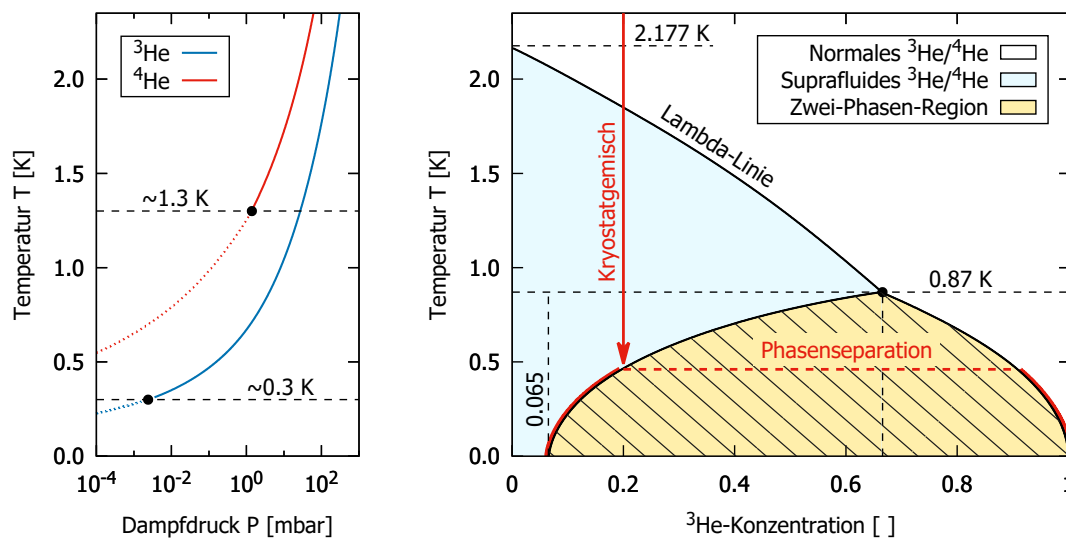


Abb. 6.1.: Links: Sättigungsdampfdruckkurven von Helium. Markiert sind die in der Praxis durch Abpumpen erreichbaren Temperaturen. Rechts: Phasendiagramm von $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Gemischen bei gesättigtem Dampfdruck (nach ⁷)

⁶POBELL, *Matters and Methods at Low Temperatures*.

⁷Ebd.

vorübergehend weiter abgesenkt werden. Hierbei wird der Heliumzufluss aus dem Dewar komplett unterbrochen und somit der Wärmeeintrag in die Probenkammer reduziert.

Magnetsystem: Der Kryostat verfügt über einen supraleitenden Magneten, mit welchem sich Flussdichten von bis zu 8 T (4,2 K) bzw. 10 T (2,2 K) erzeugen lassen. Die vom Hersteller angegebene Feldhomogenität beträgt dabei 0,1% innerhalb eines sphärischen Volumens mit 10 mm Durchmesser⁸. Die Magnetspule ist zur Kühlung mittels flüssigem Helium im Bodenbereich des Dewars montiert und besteht aus einer mehreren Kilometer langen, geschlossenen NbTi–Leiterschleife. Diese kann durch lokales Heizen in einem kurzen Segment zwischen den Zuleitungen in den normalleitenden Zustand versetzt werden. Bereits ein geringer elektrischer Widerstand dieses Schalterelements führt dazu, dass ein durch den Magneten geleiteter Strom fast ausschließlich von dessen supraleitender Hauptwicklung geführt wird. Der Spulenstrom wird dabei mit Hilfe einer externen Quelle erzeugt und kann beim vorliegenden System bis zu 115 A (entspricht ca. 10 T) betragen. Langzeitmessungen bei konstanten Feldstärken werden daher für gewöhnlich im sogenannten „*Persistent Mode*“ durchgeführt. Hierbei wird durch Abschalten des Heaters der supraleitende Ring geschlossen und anschließend die Stromquelle langsam heruntergefahren. Dabei wird der Stromfluss sukzessive von den Zuleitungen auf den Supraleiter–Schalter verlagert. Der hierdurch erzeugte Ringstrom durch den Magneten fällt nur sehr langsam mit der Zeit ab ($1/10^4$ pro Stunde), was unter anderem auf ein Kriechen der magnetischen Flussschläuche innerhalb des Supraleiters zurückgeführt werden kann⁹.

Beim „Fahren“ des Magnetfeldes sind die vom Hersteller angegebenen maximalen Änderungsraten zu beachten, um einem möglichen *Quench* des Magnetsystems vorzubeugen. Hierunter versteht man den spontanen Übergang eines Spulensegments vom supra– in den normalleitenden Zustand. Der damit verbundene Spannungsabfall führt zu einer ohmschen Widerstandsheizung durch den Spulenstrom, welche letztlich eine lawinenartige Ausbreitung der normalleitenden Zone bewirkt. Dies hat eine schlagartige Dissipation der gesamten im Magneten gespeicherten Energie zur Folge. Die dabei freigesetzte Wärme reicht aus, um einen Großteil des im Kryostaten befindlichen flüssigen Heliums innerhalb kurzer Zeit zu verdampfen¹⁰.

Lambda Point Refrigerator: Zur Erzeugung von Flussdichten größer als 8 T ist eine Absenkung der Magnettemperatur auf 2,2 K erforderlich. Aus ökonomischen Gründen erfolgt dies nicht durch Abpumpen der Atmosphäre über dem gesamten Heliumbad, sondern mit Hilfe eines sogenannten *Lambda Point Refrigerators*. Dabei handelt es sich um eine spulenförmig gewickelte Röhre oberhalb des Magneten, welche durch Heliumevaporation im Inneren gekühlt wird. Der kontinuierliche Zufluss aus dem Reservoir kann mit Hilfe

⁸ *Cryomagnetic System*.

⁹ BEASLEY, LABUSCH und WEBB, „Flux Creep in Type-II Superconductors“.

¹⁰ BALSHAW, *Practical Cryogenics*.

eines Nadelventils reguliert werden. Über eine Pumpleitung wird der Dampfdruck in der Röhre reduziert und somit der Netto-Teilchenstrom über die Phasengrenze angetrieben. Im Bereich um den Lambda Point Refrigerator wird dem Helium im Dewar thermische Energie entzogen. Die damit einhergehende Zunahme der Dichte führt zur Ausbildung starker Konvektionsströmungen. Kalte Flüssigkeit sinkt bis zum Boden des Reservoirs ab und kühlt den dort befindlichen Magneten auf eine Temperatur knapp oberhalb des Lambdapunktes herunter. ^4He weist in der nicht suprafluiden Phase eine vergleichsweise geringe Wärmeleitfähigkeit von unter $0,3 \text{ mW}/(\text{cm K})$ auf. Bereits knapp oberhalb des Kühlelements kommt es daher zur thermischen Schichtung des flüssigen Heliums mit großen Temperaturgradienten. Die Verhältnisse an der freien Flüssigkeitsoberfläche im Dewar bleiben somit unverändert.

6.1.3. $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostat

Die Tieftemperaturmessungen erfolgen in einem $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten des Typs *Kelvinox* von *Oxford Instruments*. Der darin zur Anwendung kommende Kühlmechanismus basiert auf einem Wärmeentzug durch ^3He -Phasenübergänge in separierten Isotopengemischen (siehe Abschnitt 6.1.1). Das grundlegende Funktionsprinzip geht zurück auf den deutsch-britischen Forscher H. London¹¹.

Beschreibung des Kühlkreislaufs

Abbildung 6.3 zeigt den schematischen Aufbau des Kühlkreislaufs in einem $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten, welcher im Folgenden näher beschrieben wird¹². Die Einfärbung soll dabei eine grobe Zuordnung der jeweiligen Temperaturen ermöglichen. Zur Ausbildung eines Zweiphasensystems muss das Gemisch zunächst in den Bereich seiner Mischbarkeitslücke abgekühlt werden. Die ^3He -Konzentration bestimmt die hierfür erforderliche Mindesttemperatur (siehe Abb. 6.1) und beträgt typischerweise 10 – 20%. Im sogenannten *Kondenser* wird das Gemisch zunächst vorgekühlt und verflüssigt. Dieser befindet sich zur optimalen Wärmeankopplung innerhalb des *1K-Pots*, welcher mittels ^4He -Verdampfungskühlung bei einer Temperatur von ca. 1,4 K gehalten wird. Über einen Schnorchel kann kontinuierlich flüssiges Helium aus dem Dewar in die Kammer nachströmen, wobei der Zufluss durch ein motorgetriebenes Nadelventil begrenzt wird. Eine Flussimpedanz hinter dem Kondenser-Ausgang dient zum Aufbau des für die Verflüssigung erforderlichen Gasdrucks. Bei vollständig kondensiertem Gemisch befindet sich die freie Flüssigkeitsoberfläche innerhalb der *Still*. Durch Abpumpen der darüber liegenden Heliumatmosphäre wird der Kreislauf in Gang gesetzt. Aufgrund des in diesem Regime

¹¹LONDON, CLARKE und MENDOZA, „Osmotic Pressure of He^3 in Liquid He^4 , with Proposals for a Refrigerator to Work below 1°K “.

¹²LOUNASMAA, „Dilution refrigeration“.

ca. tausendfach größeren Partialdampfdrucks von ^3He gegenüber ^4He geht dabei hauptsächlich das leichtere Isotop in die Gasphase über. Durch ein entsprechendes Still-Design kann ein Fließen von suprafluiden ^4He -Filmen in wärmere Insertbereiche (Onnes-Effekt) weitgehend unterbunden werden. Beim Verdampfungsprozess wird dem System thermische Energie entzogen und das Isotopengemisch bis zum Einsetzen der Phasenseparation heruntergekühlt. In der Praxis können mittels ^3He -Evaporation Temperaturen bis ca. 0,3 K erzielt werden.

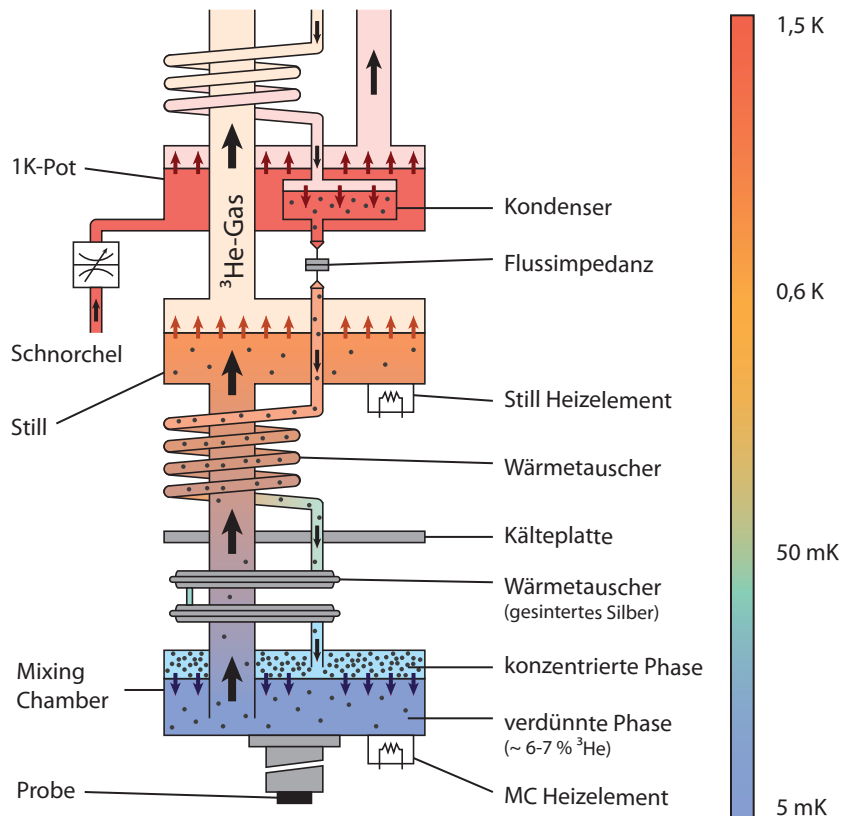


Abb. 6.3.: Schematische Darstellung des $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Gemischkreislaufs (nach ¹³)

Im regulären Betrieb stellt sich die Position der Phasengrenze innerhalb der sogenannten *Mischkammer* ein. Die dichtere, ^4He -reiche Gemischphase ist über eine in das Gefäß eintauchende Röhre mit der Still verbunden. Durch das dortige Verdampfen von ^3He entsteht ein Konzentrationsgefälle zwischen beiden Bereichen. Die resultierende osmotische Druckdifferenz führt zu einer ^3He -Diffusion aus der Mischkammer in Richtung der Still. Dies bewirkt schließlich ein Nachströmen von ^3He aus der angereicherten Gemischphase, um dem Konzentrationsabfall entgegenzuwirken. Beim Phasenübergang wird dem System analog zu einem Verdampfungsprozess Energie in Form von Wärme entzogen. Gemäß

¹³DEAN, „A Study of the Fractional Quantum Hall Energy Gap at Half Filling“.

6. Messaufbau

Formel 6.1 skaliert die damit verbundene Kühlleistung mit dem molaren ^3He -Durchfluss. Dieser kann über die Evaporationsrate in der Still mit Hilfe eines Hezelements reguliert werden. Der optimale Durchsatz für ein System muss dabei empirisch bestimmt werden. Ein zu niedriger Zirkulationsstrom führt zu einer verminderten Kühlleistung während bei großen Flüssen der Wärmeeintrag durch das in die Mischkammer nachströmende ^3He zunimmt. Dieses wird nach dem Gegenstromprinzip in mehreren Wärmetauschern durch kälteres Gemisch vorgekühlt. Zu niedrigen Temperaturen hin nimmt der thermische Grenzflächenwiderstand (Kapitza-Widerstand) mit T^{-3} zu. Direkt vor der Mischkammer werden daher aufgrund ihrer großen Kontaktfläche bevorzugt Wärmetauscher aus gesintertem Silber eingesetzt.

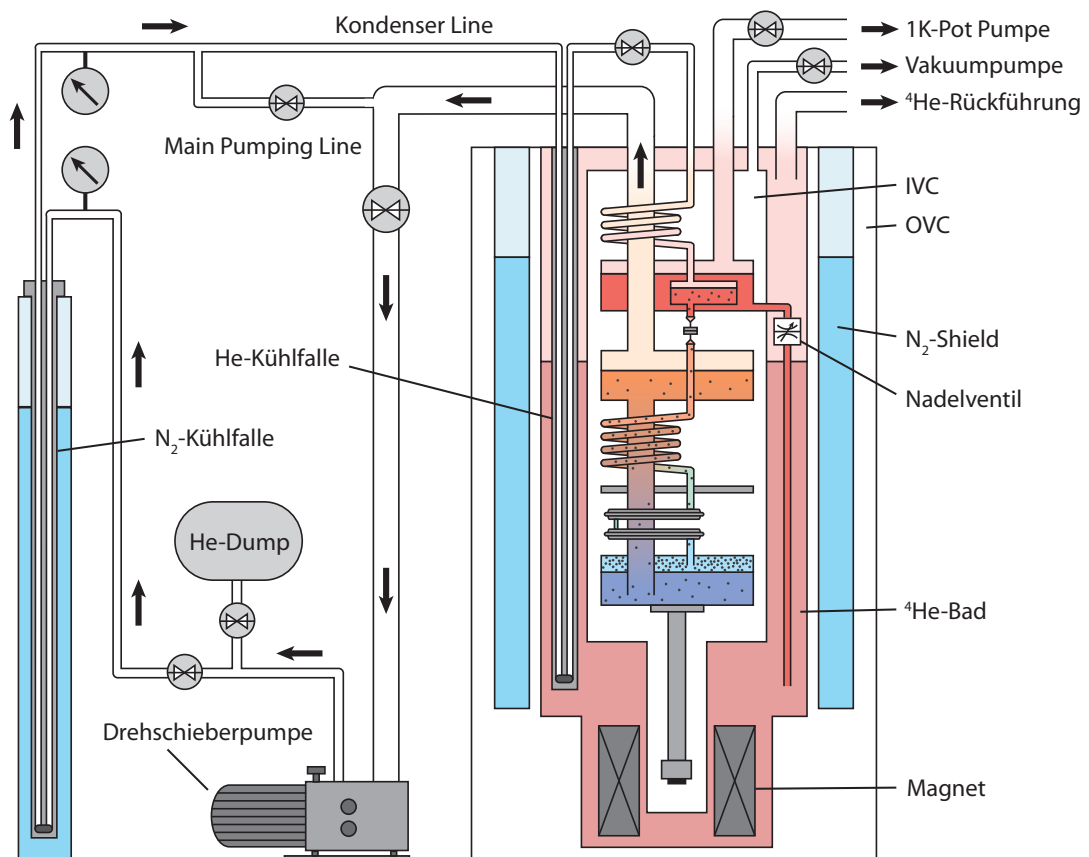


Abb. 6.4.: Schematischer Aufbau eines $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten (nach ¹⁴)

In modernen, speziell optimierten $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten können unter Anwendung der beschriebenen Kühlmechanismen Temperaturen von $< 5\text{ mK}$ erreicht werden¹⁵. Die mittels RuO_2 -Widerstandsthermometer bestimmte Basistemperatur der von uns verwendeten Apparatur beträgt $50 - 90\text{ mK}$.

¹⁴DEAN, „A Study of the Fractional Quantum Hall Energy Gap at Half Filling“.

¹⁵BUNKOV u. a., „A compact dilution refrigerator with vertical heat exchangers for operation to 2 mK “.

Peripherie

Abbildung 6.4 zeigt den Gesamtaufbau eines $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten. Das beschriebene Kühlkreislaufsystem ist durch die innere Vakuumkammer thermisch von der Umgebung isoliert. Der komplette Insert wird mit Hilfe eines Krans von oben in das Heliumbad abgesenkt. Zur Minimierung des ^4He -Verbrauchs ist das Dewar mit hochreflektierender Superisolationsfolie beklebt und zusätzlich von einem Strahlungsschild aus flüssigem Stickstoff umgeben. Die Behälter sind durch die äußere Vakuumkammer weitgehend voneinander thermisch entkoppelt.

Das mittels einer Drehschieberpumpe aus der Still entfernte Heliumgas muss vor dessen Rückführung von eventuell vorhandenen Verunreinigungen befreit werden. Diese entstehen beispielsweise bei der Zersetzung von Vakuumpumpenöl und können zu einer Blockade der Flussimpedanz führen. Das Gemisch wird deshalb durch zwei Kühlfallen geleitet, in welchen Schmutzgase durch Kondensation bzw. Ausfrieren gebunden werden. Die Kühlung erfolgt dabei durch flüssigen Stickstoff (77,4 K) bzw. Helium (4,2 K). Im aufgewärmten Zustand wird das $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Gemisch in der sogenannten *Dump* gelagert.

Probenstab

Der Probenstab ist mit ca. 40 cm Länge so bemessen, dass im eingebauten Zustand der darauf montierte Chipcarrier zentral im supraleitenden Magneten positioniert ist. Für eine optimale thermische Kopplung ist dieser mit dem Boden der Mischkammer verlötet. Zur Aufnahme und Kontaktierung der Probe dient ein DIP-Sockel am unteren Stabende. Die Ausrichtung ist dabei so gewählt, dass die Achse der Magnetspule senkrecht zur 2DEG-Ebene orientiert ist. Der elektrische Anschluss erfolgt über spezielle Kryo-Bandkabel mit näherungsweise temperaturunabhängigem Widerstandswert. Zur Minimierung des Wärmeeintrags über die Zuleitungen sind diese an mehreren thermischen Zwischenstufen um sogenannte Kältefinger gewickelt. Die Temperaturmessung erfolgt an einem Kupferblock, welcher direkt unterhalb der Probe montiert ist. Die hierfür verwendeten zylindrischen RuO_2 -Widerstandsthermometer werden mit Hilfe von Wärmeleitpaste in passgenaue Bohrungen geklebt (siehe Abschnitt 6.1.3).

Zum Einsetzen der Probe in den IC-Sockel wird eine eigens dafür konstruierte Erdungsklammer verwendet (siehe Abschnitt C.2). Diese schließt über seitliche Federkontakte sämtliche Pins des darin befindlichen IC-Gehäuses miteinander kurz und ermöglicht damit eine unterbrechungsfreie Erdung der Probe während des gesamten Einbauvorgangs. Über eine Buchse am Probenstab-Montageblock kann die metallisierte Bodenfläche des Chipcarriers mit der Kryostatmasse verbunden werden. Die nebenstehende Abbildung 6.5 zeigt den beschriebenen Aufbau des Stabendes bei abgehobenem Probendeckel.

6. Messaufbau

Die Außenwand der inneren Vakuumkammer (kurz *IVC*) hat durch ihren direkten Kontakt zum flüssigen Helium eine Temperatur von ca. 4,2 K. Die von der Oberfläche ausgehende Wärmestrahlung liefert bei Absorption durch den kälteren Probenstab einen zusätzlichen Wärmeeintrag. Abhängig von der jeweiligen thermischen Kopplung an die Mischkammer kann dies lokal zu deutlich unterschiedlichen Temperaturen führen. Dies betrifft insbesondere die relevante oberflächennahe Schicht des Probenmaterials. Der Abtransport der dort aufgenommenen thermischen Energie in Richtung des Kältereservoirs wird durch eine Serie von Wärmewiderständen begrenzt. Als solche wirken beispielsweise die Beine des Chipcarriers aufgrund ihrer kleinen Querschnittsfläche sowie der aus Kunststoff bestehende IC-Sockel.

Zur Abschirmung der Probe vor Wärmestrahlung wurde ein Deckel entworfen. Dieser umschließt das Ende des Probenstabes vollständig und bietet somit zusätzlich einen Schutz des empfindlichen Anschlussbereichs vor mechanischen Einflüssen. Die größte Herausforderung bei der Konstruktion bestand dabei in den begrenzten Platzverhältnissen innerhalb der *IVC*. Zum Erreichen der Basistemperatur muss sichergestellt werden, dass der hängend montierte Probenstab an keiner Stelle die Kammerwand berührt und somit eine Wärmebrücke herstellt. Große zylindrische Auflageflächen sorgen für eine gute Wärmeankopplung der Montageplatte an die Kupferhülle des Deckels. Diese nimmt die Temperatur des Probenstabes an und fungiert somit als Temperaturschild. Die Außenwand ist vollflächig mit reflektierender Aluminiumfolie beklebt um die Absorption von Wärmestrahlung und damit

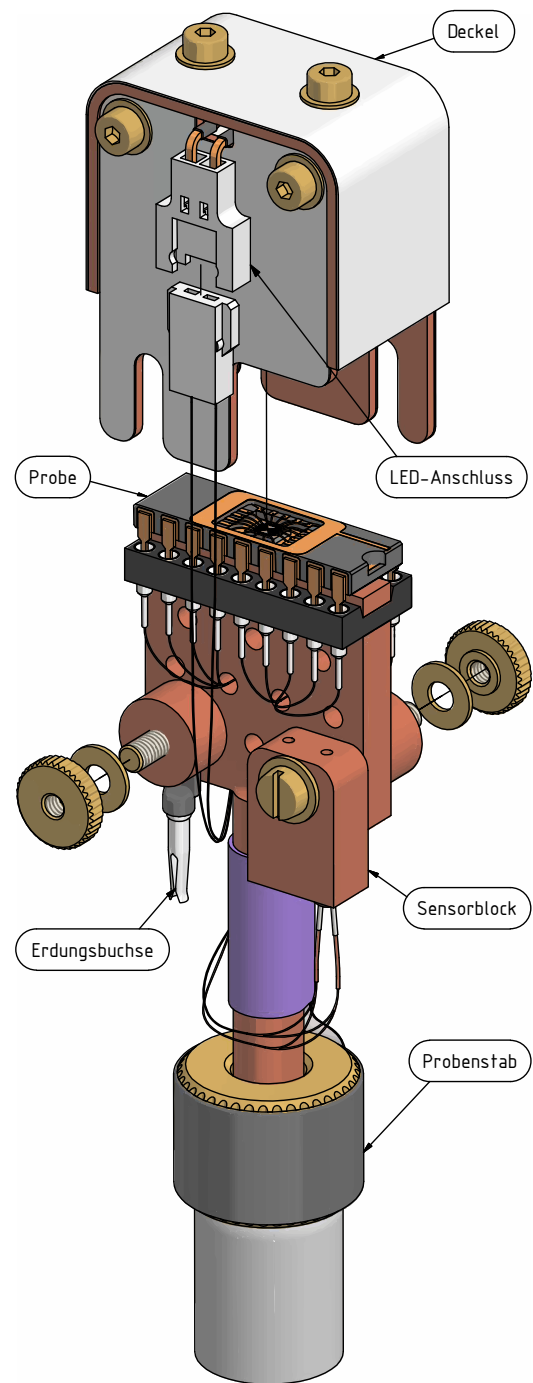


Abb. 6.5.: Aufbau des Probenstabendes

den Wärmeeintrag zu minimieren. Zum Beleuchten der Probe ist eine IR-LED¹⁶ in den Deckel integriert und durch eine Bohrung direkt auf das Halbleitermaterial gerichtet. Abbildung 6.6 zeigt eine aufgeschnittene Ansicht des montierten Probendeckels.

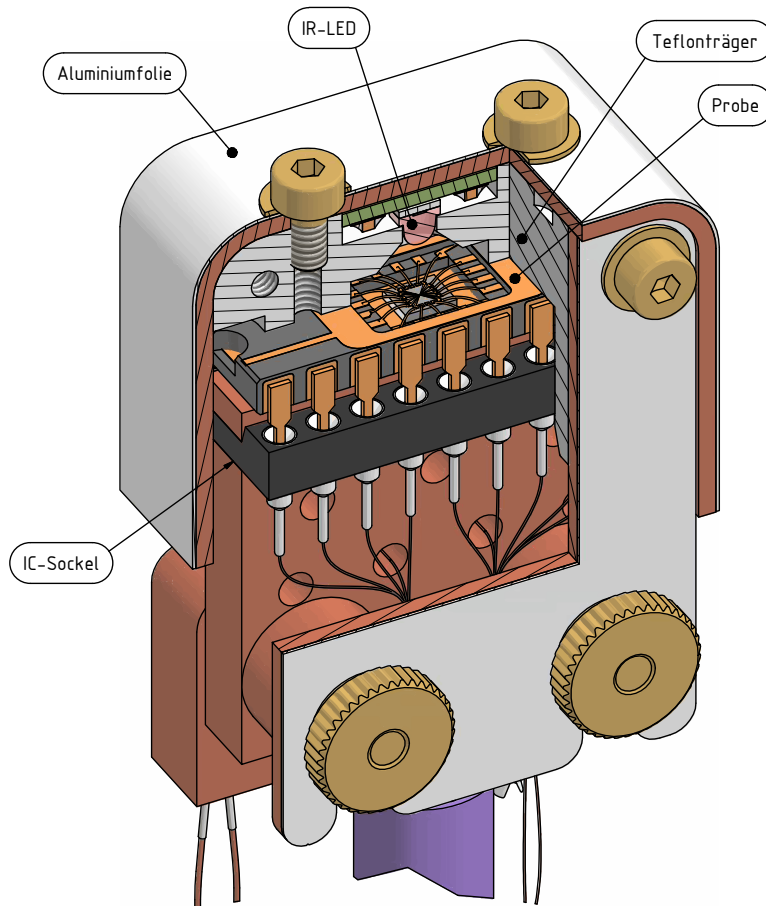


Abb. 6.6.: Aufbau des Probenstabendes

Thermometrie

Zur Bestimmung der Temperatur am Probenstabende dienen zwei baugleiche Rutheniumoxid-Widerstandsthermometer des Typs *Rx-202A-AA* von *Lake Shore Cryotronics, Inc.*. Die Thermistoren weisen einen negativen Temperaturkoeffizienten auf und sind für einen Messbereich von 50 mK ($R_T \approx 70 \text{ k}\Omega$) bis 40 K ($R_T \approx 2,25 \text{ k}\Omega$) ausgelegt. Die Kalibrierung der Sensoren erfolgte durch D. Schefzyk im Rahmen seiner Diplomarbeit¹⁷. Um eine Ver-

¹⁶Peak des Emissionsspektrums bei 940 nm

¹⁷SCHFZYK, „Elektrische Charakterisierung niederdimensionaler Systeme zur Bestimmung der Temperatur in Nanostrukturen“.

6. Messaufbau

fälschung des Messwerts durch die Zuleitungen zu verhindern erfolgt die Widerstandsmessung in einer Vierpunkt-Anordnung mit Hilfe eines Lock-In-Verstärkers (siehe Abschnitt 6.2.2). Abbildung 6.7 zeigt den verwendeten Messaufbau sowie die Kryostat-interne Sensorverkabelung. Die orange dargestellten Ziffern entsprechen den Anschlussmarkierungen auf der BNC-Messbox.

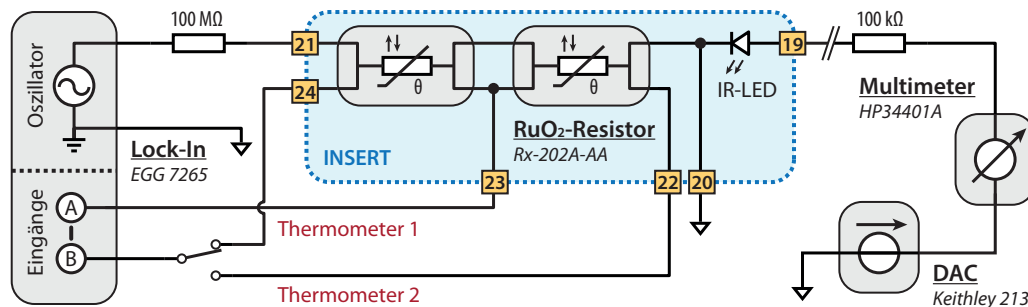


Abb. 6.7.: Schematische Anordnung zur Vierpunktmessung des Thermometer-Widerstands und Beleuchtung der Probe mittels IR-Diode.

Aufgrund der begrenzten Zahl an elektrischen Leitungen wird der Sensorstrom durch eine Serienschaltung beider Thermometer geleitet. Zur Bestimmung der Einzelwiderstände dient ein mittlerer Spannungsabgriff. Mit 10 nA wird der Strom entsprechend klein gewählt, um die Eigenerwärmung der Sensoren durch Dissipation zu minimieren.

6.1.4. Durchgeführte Wartungsarbeiten

Die über mehrere Jahre beim Umgang mit einem ³He/⁴He-Entmischungskryostaten gewonnenen Erkenntnisse können wohl nicht treffender, als mit dem folgenden Zitat zusammengefasst werden:

The best way to run a dilution refrigerator is to know that the last time it was used it worked perfectly and to ensure nothing changes!¹⁸

Aufgrund diverser technischer Schwierigkeiten in Zusammenhang mit dem Kühlkreislauf mussten die Tieftemperaturmessungen zeitweise ausgesetzt werden. Um die ordnungsgemäße Funktion des Kryostaten wieder herzustellen wurden im Rahmen dieser Arbeit die einzelnen Problemursachen eingehend untersucht und jeweils Lösungsstrategien entwickelt. Im Folgenden findet sich eine Beschreibung der dabei durchgeführten Maßnahmen.

¹⁸WHITE und MEESON, *Experimental Techniques in Low-Temperature Physics: Fourth Edition*.

Generalüberholung IGH:

In der Vergangenheit wurden fortwährend geringe Verluste des Prozessgases ($^3\text{He}/^4\text{He}$ -Gasgemisch) während des Kryostat-Betriebs registriert. Dies ging einher mit einer signifikanten Mengenzunahme der in den Kühlfallen angesammelten Verunreinigungen, was auf ein Leck innerhalb des geschlossenen Gaskreislaufs schließen ließ. Als erste Maßnahme wurden sämtliche Runddichtungen durch entsprechende O-Ringe aus Fluorkautschuk (FKM) ersetzt. Der auch als *Viton* bekannte Kunststoff zeichnet sich gegenüber Nitrilkautschuk vor allem durch seine bessere thermische und chemische Beständigkeit (insbesondere gegenüber Sauerstoff) aus. Anschließend wurden umfangreiche Dichtigkeitsprüfungen am gesamten Gasleitungssystem mit Hilfe eines Helium-Lecksuchgeräts¹⁹ durchgeführt. Dabei wird das Volumen evakuiert und die zu prüfende Dichtung von außen mit Helium besprüht. Die Bestimmung der Leckrate in das System erfolgt mit Hilfe eines integrierten Massenspektrometers.

Vor Allem im Bereich der zentralen Steuerungseinheit „*Kelvinox IGH*“ wurde die genaue Lokalisierung potentieller Vakuumlecks durch mehrere Faktoren erschwert. Aufgrund der Komplexität des Leitungssystems ergeben sich zum Teil große Abstände zwischen dem zu prüfenden Segment und dem Detektor, welcher folglich träger reagiert. Sobald Helium in das System gelangt, ist dieses kontaminiert. Die Lecksuche kann erst nach dem Ausgasen und damit verbundenen Absinken des detektierten Grundpegels fortgesetzt werden. Erschwerend wirkt sich dabei aus, dass Helium in geringem Maße auch durch intakte Dichtungsringe diffundiert und somit den Messwert verfälscht²⁰. Die Steuerung des Gasflusses erfolgt halbautomatisch über mehrere elektromagnetische Ventile, welche auf der Oberseite des zentralen Leitungsblocks montiert und über Bohrungen mit diesem verbunden sind. Nach Einzelprüfung der Ventile mittels eines eigens dafür konstruierten Flanschadapters konnten diese als Problemursache identifiziert werden.

Das Funktionsprinzip der Ventile beruht auf einem Stempel, welcher im geschlossenen Zustand von einer Feder auf die zentrale Bodenöffnung gedrückt wird und diese abdichtet (siehe Abb. 6.8). Mit Hilfe einer elektrischen Spule kann der ferromagnetische Hülseneinsatz magnetisiert und der Stempel dadurch angehoben werden. Hülse und Einsatz sind durch einen O-Ring abgedichtet und fest miteinander verpresst. Konstruktionsbedingt kann die in den Spulen freigesetzte thermische Energie nur schlecht abgeführt werden, was eine aktive Kühlung erforderlich macht. Ein unbemerkt gebliebener Lüfterausfall führte vermutlich zu einer Beschädigung einiger Dichtungen in Folge von Überhitzung. Aufgrund nicht verfügbarer Ersatzteile, wurden in Zusammenarbeit mit der Feinmechanikwerkstatt des Instituts für Angewandte Physik neue Ventilköpfe hergestellt (siehe Abschnitt C.3). Durch Hartlöten der beiden Komponenten konnte dabei auf den Einsatz eines separaten Dichtungselements verzichtet werden.

¹⁹HLT 150 Helium Leak Detector (Balzers)

²⁰STURM u. a., „Permeation of atmospheric gases through polymer O-rings used in flasks for air sampling“.

6. Messaufbau

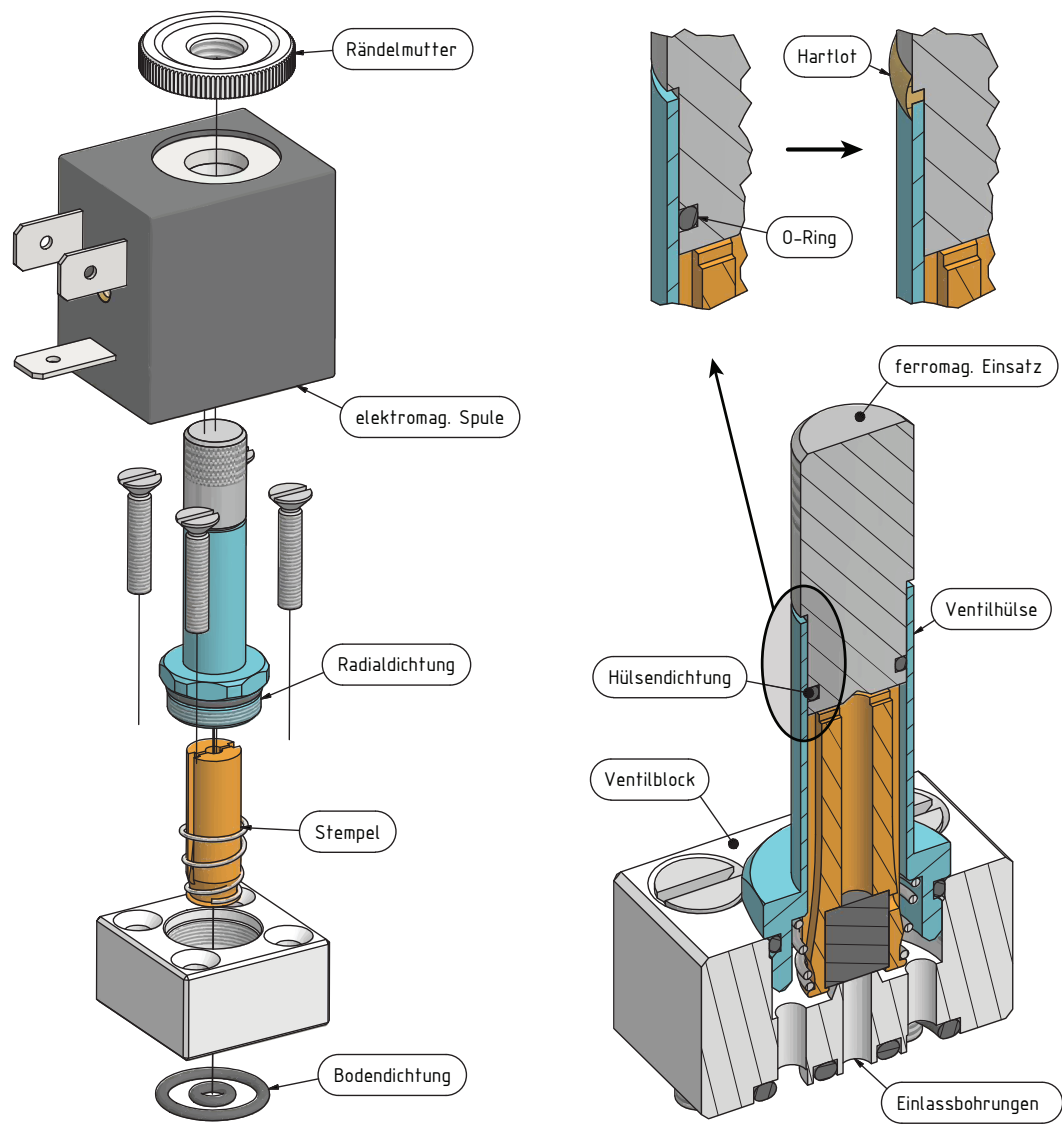


Abb. 6.8.: Explosions- und Schnittansicht eines IGH-Ventils

Vor dem erneuten Einsetzen der Ventile erfolgten jeweils mehrere Dichtigkeitstest. Zur Bestimmung der externen Leckraten wurden mit Helium gefüllte Ballons gasdicht über die zu prüfenden Ventile gestülpt und diese mittels Flanschadapter (siehe Seite XIX) mit dem Helium–Lecksuchgerät verbunden. Durch die Verwendung verschieden großer Hauben konnten die Messungen segmentweise durchgeführt und die Beiträge einzelner Dichtungen untersucht werden. Abbildung 6.9 zeigt eine Schnittansicht des Prüfaufbaus sowie die zeitlichen Verläufe der detektierten Leckraten exemplarisch für ein Ventil. Erst ca. zwei Minuten nach der Heliumexposition führen von außen durch die Vitondichtungen diffundierte Heliumatome zu einem signifikanten Anstieg der gemessenen Leckraten. Für sämtliche Ventile lag der jeweils eine Stunde nach Messbeginn aufgenommene Sättigungswert im Bereich 1,5 – 1,9 mbar l/s (Ballon 2). Bei separaten Dichtigkeitsprüfungen der Lötstellen mittels Ballon 1 wurde kein Anstieg der Leckraten beobachtet. Für die internen Lecktests wurde der zentrale Einlass des geschlossenen Ventils mit dem Lecksuchgerät verbunden und das Gehäuse mit Helium belüftet. Im Vergleich zur Radialdichtung erfolgt der initiale Messwertanstieg mit deutlich kürzerer Verzögerung. Dies kann mit der konstruktionsbedingt kleinen Auflagefläche des Dichtungseinsatzes erklärt werden, welche durch einen schmalen, ringförmigen Steg gebildet wird.

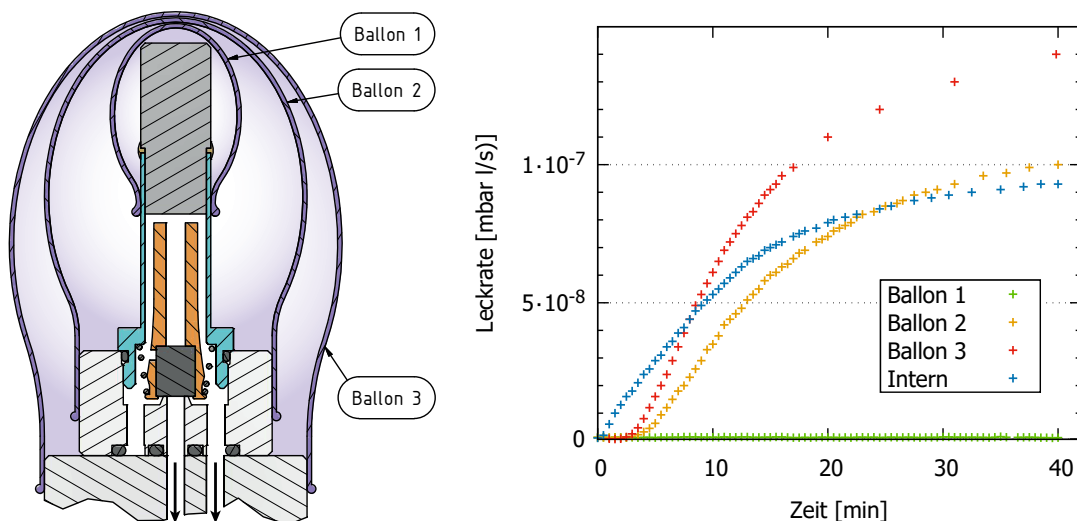


Abb. 6.9.: Links: Schnittansicht des Aufbaus zur Dichtigkeitsprüfung, rechts: Zeitlicher Verlauf der gemessenen Leckraten für verschiedene Prüfbedingungen

Einstellung des korrekten Gemischverhältnisses

Die Menge des $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Gemischs sowie dessen exakte Zusammensetzung werden durch den Hersteller auf das jeweilige System abgestimmt und stellen kritische Größen in Bezug auf die optimale Funktion des Kühlkreislaufs dar. Die über zahlreiche Betriebsjahre

akkumulierten Verluste durch kleine Lecks und Ventilfehlfunktionen erforderten eine Korrektur des Gasgemischs. Die Parameter werden dabei auf Grundlage der folgenden Überlegungen optimiert:

Gesamtmenge des Gemischs: Für eine ausreichend hohe ^3He -Zirkulationsrate muss die freie Oberfläche der einkondensierten flüssigen Phase stets innerhalb der Still liegen. Bei mittlerer Position wird der Kühlkreislauf unempfindlicher gegenüber der durch Fluktuationen des Durchflusses bedingten Pegelschwankungen.

Mischungsverhältnis: Das Mengenverhältnis muss so bemessen sein, dass die sich ausbildende Grenzfläche zwischen ^3He armer und angereicherter Gemischphase innerhalb der Mischkammer liegt.

Im Folgenden wird ein Verfahren zur Bestimmung des $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischverhältnisses ohne die Verwendung eines Massenspektrometers vorgestellt. Ausgangspunkt hierfür bildet der auf Basistemperatur gekühlte Kryostat mit vollständig einkondensiertem Gemisch. Dieses wird nach dem Unterbrechen des Kühlkreislaufs aus dem Kryostatinsert abgepumpt, jedoch ohne – wie sonst beim Aufwärmen des Systems üblich – den Verdampfungsprozess durch Heizen zu beschleunigen. Bedingt durch den niedrigeren Dampfdruck von ^4He und konstruktive Vorkehrungen beim Still-Design (siehe 6.1.3) wird dem Gemisch dabei zunächst hauptsächlich ^3He entzogen. Ist dieses vollständig abgepumpt, fällt die Druckanstiegsrate in der Dump schlagartig ab.

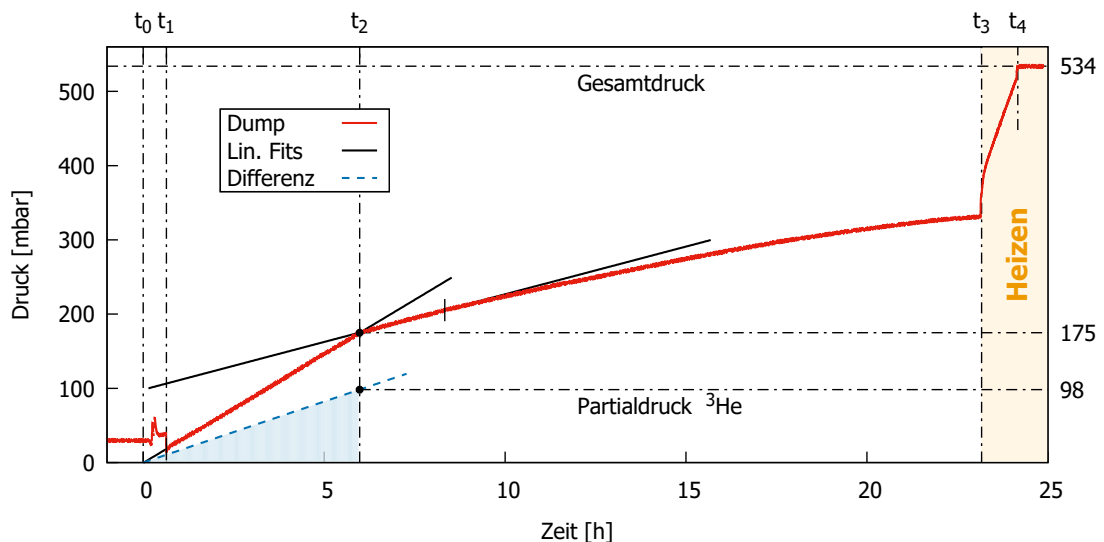


Abb. 6.10.: Zeitlicher Druckverlauf innerhalb der Dump beim Abpumpen des Gemischs.

Abbildung 6.10 zeigt den aufgezeichneten Druckverlauf innerhalb der Dump²¹, welcher bei t_2 einen markanten Knick aufweist. Die Evaporationsrate von ^4He wird im Übergangsbereich als näherungsweise konstant angenommen und mittels linearer Regression

²¹Messvolumen: Dump, Dumpzuleitungen, Ausgangsseite der betriebswarmen Kreislaufpumpe.

bestimmt. Durch Subtraktion der ermittelten Steigung kann der Partialdruck der bis dahin verdampften ^3He -Menge abgeschätzt werden. Der Gesamtdruck p_Σ des vollständig abgepumpten Gemischs betrug zu diesem Zeitpunkt noch 534 mbar. Somit ergibt sich für den Volumenanteil φ des leichteren Heliumisotops:

$$\varphi = \frac{p(^3\text{He})}{p_\Sigma} = \frac{98 \text{ mbar}}{534 \text{ mbar}} \approx 0,18 \quad (6.2)$$

Die Gasdrücke werden jeweils vor und nach jedem Betriebszyklus des Kryostaten (Einkondensieren- / Abpumpen) protokolliert und betragen zum Auslieferungszeitpunkt ca. 600 mbar. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit unterliegen die Druckwerte saisonalen Schwankungen. Um das laut Betriebshandbuch²² optimale Mengenverhältnis von $^3\text{He}:$ $^4\text{He} = 1 : 4$ herzustellen wurden daher 22 mbar ^3He und 44 mbar ^4He nachgefüllt.

Flussimpedanz

Die unterhalb des Kondensers befindliche Hauptflussimpedanz dient zum Aufbau des für die Verflüssigung von ^3He erforderlichen Gasdrucks. Der Leitungsquerschnitt wird dazu durch Einsatz eines Metallröhrchens auf 0,8 mm Innendurchmesser verjüngt. Ein passgenau eingesetzter Metalldraht mit 2 cm Länge verschließt die Kapillare fast vollständig und reduziert somit den ^3He -Durchfluss. Gelangt während des Betriebs Schmutz in die Impedanz, so friert dieser fest und kann zu einer Blockade des Kreislaufs führen. Abhängig von deren Art können Verunreinigungen auch durch langes Pumpen im aufgewärmten Zustand nur schwer wieder entfernt werden. So bewirkt beispielsweise die Grenzflächenspannung eine erhebliche Reduzierung des Dampfdrucks von Wasser in porösen Strukturen²³.

Vor dem Einkondensieren wird die Flussimpedanz regelmäßig auf ihren Durchfluss hin überprüft. Dies geschieht durch Aufzeichnung des Druckanstiegs im Kondensator nach Flutung der Main Pumping Line mit Helium. Der Durchfluss wird dabei tendenziell mit jedem Betriebszyklus schlechter, bis schließlich die Basistemperatur des Kryostaten ansteigt (siehe Abb. 6.11). Ab einem kritischen Wert kann kein stabiler Kühlkreislauf mehr hergestellt werden. Zur Reinigung der Flussimpedanz wird diese geöffnet und der Drahteinsatz poliert. Eine Heliumatmosphäre in den Leitungen mit leichtem Überdruck verhindert währenddessen ein Eindringen von Schmutz. Die Dichtung der Anschlussflansche erfolgt mit einem Ring aus Indiumdraht. Nach dem Zusammenbau wird die Impedanz für einige Zeit mit Helium gespült und das System anschließend wieder evakuiert.

Der Temperaturverlauf in Abbildung 6.11 weist neben einer zu hohen Basistemperatur ein sprunghaftes Verhalten auf, welches über einen gewissen Zeitraum hinweg regelmäßig beobachtet wurde. Das spontane Einsetzen der Fluktuationen ist dabei nicht mit einer

²² *Kelvinox Dilution Refrigerator and Superconducting Magnet System.*

²³ THOMSON, „4. On the Equilibrium of Vapour at a Curved Surface of Liquid“.

6. Messaufbau

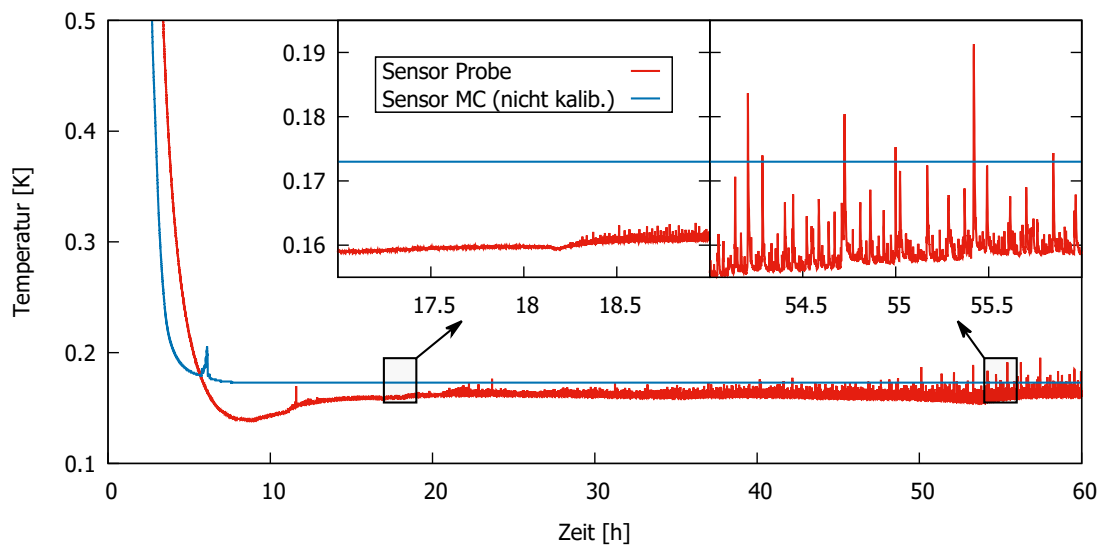


Abb. 6.11.: Hohe Basistemperatur und spontan einsetzende Temperaturoszillationen

Veränderung anderer aufgezeichneter Prozessparameter korreliert. Insbesondere zeigen die Messwerte des Mischkammersensors²⁴ einen glatten Kurvenverlauf. Die Temperatursprünge treten jeweils einige Stunden nach dem Einkondensieren in Erscheinung und werden in der Folge intensiver. Wenngleich dieses Phänomen nur in Verbindung mit schlechten Durchflüssen beobachtet wurde ist ein kausaler Zusammenhang fraglich.

Zur näheren Untersuchung wurde zunächst die Messung anhand eines zweiten, baugleichen Temperatursensors verifiziert. Durch Variation der Gemischmenge im laufenden Betrieb konnte diese als alleinige Problemursache ausgeschlossen werden. Auch zeigte eine Änderung der Still-Heizleistung keine Auswirkung auf die Fluktuationen. Hingegen konnten durch Erschütterungen des Kryostaten relativ starke Temperatursprünge provoziert werden.

Einen möglichen Erklärungsansatz liefert daher die Anregung mechanischer Schwingungen im Kryostatinsert. Aufgrund der beengten Platzverhältnisse führen bereits kleine Oszillationsamplituden des hängend montierten Probenstabes zu einer Berührung mit der 4 K warmen IVC-Wand. Über die dabei entstehenden Wärmebrücken kann kurzzeitig thermische Energie auf das Stabende fließen und dieses lokal aufheizen. Der massive Probenstab fungiert dabei als thermisches Reservoir, welcher eine Detektion durch den weiter entfernten Mischkammersensor unterdrückt. Zur weiteren Eingrenzung könnte ein zusätzlicher Temperatursensor auf halber Höhe des Probenstabes montiert werden. Anhand des zeitlichen Versatzes bei der Detektion von Messwertsprüngen ließen sich Rückschlüsse auf die Richtung ziehen, aus welcher der Energieeintrag erfolgt.

²⁴Die im Vergleich zum Probensensor höhere Temperatur ist auf eine falsche Kalibrierung zurückzuführen

6.2. Messelektronik

Die Tieftemperaturmessungen im $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostat wurden in einer Halle durchgeführt, deren Wände vollständig mit Aluminiumfolie verkleidet sind. Das Labor bildet somit einen Faradayschen Käfig, wodurch elektromagnetische Wellen weitgehend abgeschirmt werden. Diese können in den Messleitungen Wechselströme induzieren und stellen damit eine potentielle Rauschquelle dar. Frühere Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Maßnahme eine Absenkung der Basistemperatur um bis zu 30 mK bewirkt²⁵.

6.2.1. Hardware

Die zur Untersuchung von Quantenphänomenen erforderliche Auflösung stellt in Anbetracht der schwachen Probenströme und -spannungen erhöhte Anforderungen sowohl an die Messelektronik selbst, als auch deren Verkabelung. Der Aufbau weist eine sternförmige Führung der elektrischen Masse auf. Als zentraler Erdungspunkt dient dabei eine im Laborboden eingelassene massive Kupferplatte. Zur Vermeidung von Masseschleifen wurden die Schirme der Messleitungen einseitig aufgetrennt. Zudem erfolgt der Anschluss der Vakuumschläuche kryostatseitig mittels nicht leitfähiger Spann- und Zentrierringe aus Kunststoff. Die Messelektronik ist in einem 19-Zoll-Rack installiert und wird durch einen Trenntransformator galvanisch von der Netzspannung getrennt. Die Anordnung der Geräte soll dabei möglichst kurze Kabelwege zwischen den einzelnen Komponenten ermöglichen. Die Messungen wurden mit Hilfe der folgenden Hardware durchgeführt.

Messbox: Die Kontaktierung der Messleitungen und IR-Diode erfolgt über eine Break-out-Box mit BNC-Anschlussfeld. Das auf Kryostatseite steckbare Verbindungskabel besteht aus zwölf jeweils verdrehten und separat geschirmten Leiterpaaren. Über einen T-Adapter am Insert können sämtliche Leitungen mittels eines Erdungssteckers miteinander elektrisch kurzgeschlossen werden. Bis zum Anschließen der Messbox kann so ein Potentialausgleich zwischen allen Probenkontakten hergestellt werden um einer Beschädigung der Nanostruktur infolge elektrostatischer Entladungen vorzubeugen. Jede einzelne BNC-Buchse kann über einen Schalter an der Messbox intern mit dem Massepotential verbunden werden, um die Probe während des Umsteckens vor Spannungsspitzen zu schützen.

Multimeter: Ein *34401A Digital Multimeter* von *Hewlett Packard* wird hauptsächlich zur Messung des vorverstärkten Gleichstroms bei nichtlinearen Transportuntersuchungen eingesetzt. Des Weiteren dient es zur Bestimmung von Widerständen im Versuchsaufbau und zur Kontrolle des IR-Diodenstroms.

²⁵SCHFZYK, „Elektrische Charakterisierung niederdimensionaler Systeme zur Bestimmung der Temperatur in Nanostrukturen“.

Lock-In-Verstärker: Die Lock-In-Technik erlaubt die Erfassung kleinster Messwerte aus modulierten Signalen mit signifikantem Rauschanteil (siehe Abschnitt 6.2.2). Insgesamt stehen vier Verstärker zur Verfügung, welche eine weitgehend identische Funktionalität bzw. Leistungsmerkmale aufweisen:

- *Model 7260(5) DSP Lock-In Amplifier* von *Signal Recovery* (3 Stück)
- *Model SR830 DSP Lock-In Amplifier* von *Stanford Research Systems*

Beide Modelle verfügen über einen internen Oszillator mit einstellbarer Frequenz und Amplitude. Neben dem Verstärkungsfaktor können jeweils die Zeitkonstante der Mittelung, sowie verschiedene Filterparameter angepasst werden. Die Verstärker des Typs 7260(5) verfügen darüber hinaus über mehrere programmierbare DACs, welche als zusätzliche Spannungsquellen eingesetzt werden können.

Gleichspannungsquellen: Zur Erzeugung der negativen Gate-Potentiale und Source-Drain-Spannungen für nichtlineare Transportuntersuchungen können folgende stabilisierte Konstantspannungsquellen verwendet werden:

- *Model 213 Quad Voltage Source* von *Keithley* (2 Stück à 4 DACs)
- *Model 230 Programmable Voltage Source* von *Keithley*

Die Schrittweite der Quellen ist dabei abhängig vom jeweiligen Spannungsbereich und beträgt bei der Quad Voltage Source $250 \mu\text{V}$ zwischen -1V und $+1\text{V}$. Die Auflösung kann mit Hilfe von Spannungsteilern ggf. verkleinert werden. Sämtliche DACs wurden vor Durchführung der Messungen neu kalibriert.

Strom- / Spannungsverstärker: Die verwendeten Vorverstärker können über interne Bleiakkus unabhängig vom Stromnetz betrieben werden und sind daher besonders rauscharm. Integrierte Hoch- bzw. Tiefpassfilter mit einstellbarer Grenzfrequenz und Flankensteilheit ermöglichen zudem eine Begrenzung der Signalbandbreite.

- *Model SR560 Low-Noise Voltage Preamplifier* von *Stanford Research Systems*
- *Model SR570 Low-Noise Current Preamplifier* von *Stanford Research Systems*

Der Eingangswiderstand des Transimpedanzverstärkers beträgt 100Ω bei der als Standard gewählten Empfindlichkeit von 200 nA/V .

Sonstiges: Weitere, zum Teil universell einsetzbare elektronische Bauteile und Schaltungen sind in Rack-Einschubkassetten aus Aluminium verbaut, und können über BNC-Buchsen kontaktiert werden. Die Stromversorgung der aktiven Komponenten erfolgt dabei über 12V -Akkumulatoren. Zur Verfügung stehen unter Anderem:

- *Aktiver / passiver Spannungsaddierer (ac + dc)* mit integr. Spannungsteilern
- *Spannungsteiler* mit Verhältnissen $1 : 10^2$, $1 : 10^3$ und $1 : 10^4$, *Vorwiderstände*
- *Tiefpassfilter* mit $RC = 0,1\text{s}$

6.2.2. Messtechniken

Lock-In-Technik

Aufgrund des elektrischen Widerstands der Probe wird bei einem Stromfluss Energie im Bereich der Nanostrukturen dissipiert. Die damit einhergehende lokale Erwärmung führt zu einer thermischen Verbreiterung der gemessenen Quantenphänomene. Durch ein Übergehen zu möglichst kleinen Strömen ($\lesssim 10 \text{ nA}$) bzw. Spannungen ($\lesssim 100 \mu\text{V}$) kann dieser unerwünschte Effekt zwar minimiert werden, jedoch geht damit auch eine signifikante Verschlechterung des Signal-Rausch-Verhältnisses (kurz *SNR*) einher. Der erwartete Messwert kann dabei auf die Größenordnung der Rauschamplitude abfallen und unter Umständen sogar komplett vom „Hintergrund“ verdeckt werden. Hierbei treten im Wesentlichen zwei Rauschtypen in Erscheinung, die anhand ihrer charakteristischen Frequenzabhängigkeit unterschieden werden:

Weißes Rauschen: Die Leistungsdichte ist über das gesamte Spektrum konstant. Dies trifft beispielsweise weitgehend auf das an Widerständen in Erscheinung tretende thermische Rauschen zu, welches auch als *Johnson-Nyquist-Rauschen* bezeichnet wird. Für die an einem Widerstand R gemessene effektive Rauschspannung im Leerlauf²⁶ gilt bei einer Bandbreite der Messung von Δf :

$$U_{R,\text{eff}} = \sqrt{4k_B T R \Delta f} \quad (6.3)$$

Rosa Rauschen: Die Rauschamplitude verhält sich in einem großen Frequenzbereich proportional zu $1/f^\alpha$ mit $\alpha \approx 1$. Diese Charakteristik wird unter anderem in MOS-FETs beobachtet. Besonders im niederfrequenten Grenzfall der Gleichstrommessung führt dies zu stark verrauschten Signalen.

Die in den 60er Jahren entwickelte *Lock-In-Technik* erlaubt die Messung schwacher elektrischer Wechselsignale bei gleichzeitiger Unterdrückung des Rauschens. Hierbei wird eine sinusförmige Wechselspannung mit fester Frequenz f (bzw. ein Wechselstrom) an die Probe angelegt. Das auf diese Weise modulierte Messsignal A wird in der Eingangsstufe des Lock-In-Verstärkers zunächst vorverstärkt und gegebenenfalls gefiltert. Anschließend erfolgt eine Multiplikation mit dem Referenzsignal B im sogenannten Mischer und eine zeitliche Mittelung über mehrere Perioden durch einen Tiefpassfilter. Die resultierende Gleichspannung repräsentiert dabei die Kreuzkorrelation aus Mess- und Referenzsignal bei einer festen relativen Phasenverschiebung von $\Delta\varphi$. Diese beträgt für Signale unterschiedlicher Frequenz Null, worauf die Filterung des Rauschens letztlich beruht. Mittels Variation der Phasenverschiebung zwischen beiden Eingangssignalen $\Delta\varphi$ wird der Ausgangspegel maximiert und somit die eigentliche Signalstärke bestimmt. Um Netzbrummen als mögliche Störquelle auszuschließen, werden Lock-In-Frequenzen im

²⁶NYQUIST, „Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors“.

6. Messaufbau

Bereich um 50 Hz (bzw. Vielfachen davon) grundsätzlich vermieden. Die Aufnahme der Messdaten erfolgte mit Oszillatorfrequenzen von 28,314 Hz, 30,653 Hz bzw. 32,970 Hz.

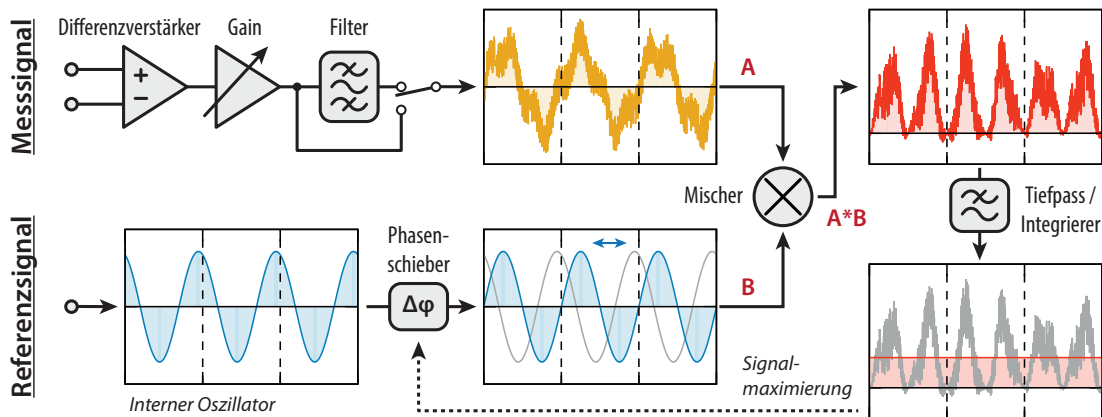


Abb. 6.12.: Vereinfachte schematische Darstellung des Lock-In-Messprinzips²⁷

Zweipunkt-Messung

Abbildung 6.13 stellt zwei im Rahmen dieser Arbeit angewandte Methoden zur Widerstandsbestimmung schematisch gegenüber. Bei Messungen in Zweipunkt-Anordnung erfolgen Stromprägung und Potentialmessung über ein gemeinsames Kontaktpaar. Abhängig von der externen Beschaltung können sowohl $I(U)$ - als auch $U(I)$ -Kennlinien aufgenommen werden. Bei einer angelegten Spannung von U_0 erhält man über das Ohmsche Gesetz für den Gesamtwiderstand $R_{\text{ges}}^{2\text{Pkt}}$:

$$R_{\text{ges}}^{2\text{Pkt}} = \frac{U_0}{I_{\text{ds}}} \quad (6.4)$$

Dieser setzt sich dabei aus mehreren Beiträgen verschiedener Schaltungskomponenten zusammen. Hierzu zählen unter anderem:

- **Zuleitungen:** jeweils 118Ω (gemessen zwischen BNC-Messbox und IC-Sockel)
- **Ohmsche Kontakte:** $R_{K_i} < 500 \Omega$
- **2DEG:** geometrieabhängig, $R_{2\text{DEG}} = 53,4 \Omega/\square$ (unbeleuchtet)
- **Nanostruktur:** $\gtrsim 2 \text{ k}\Omega$ bei definierten Gates (QPC), dominanter Beitrag
- **Innenwiderstand TIV:** $R_i = 1 \Omega - 1 \text{ M}\Omega$ (abhängig vom Messbereich)

²⁷KEITHLEY INSTRUMENTS, *Nanotechnology Measurement Handbook: A Guide to Electrical Measurement for Nanoscience Applications*.

Zur Bestimmung des reinen Nanostruktur-Widerstandes ist daher eine Korrektur des Messwerts um den statischen Offset erforderlich. Dieser wird vor der Kennlinienaufnahme bei vollständig geöffneten Gates ermittelt. Die Messungen werden in der Regel mit Hilfe eines Lock-In-Verstärkers durchgeführt, wobei die Wandlung der Ströme durch einen Transimpedanzverstärker erfolgt. Die Amplitude der angelegten Wechselspannung beträgt dabei für gewöhnlich $100 \mu\text{V}$.

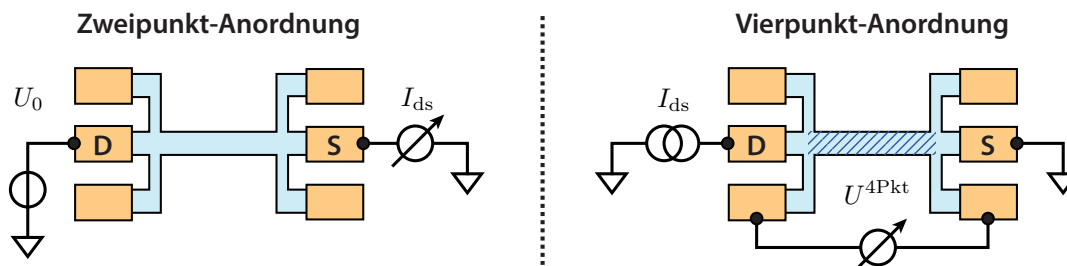


Abb. 6.13.: Messung des Widerstandes in Zweipunkt- und Vierpunkt-Anordnung

Vierpunkt-Messung

Bei Messungen in Vierpunkt-Anordnung werden für die Stromprägung und Spannungsmessung zwei separate Kontaktpaare verwendet (siehe Abbildung 6.13 rechts). Aufgrund des hochohmigen Potentialabgriffs²⁸ sind die betreffenden Zuleitungen quasi stromfrei und tragen somit nicht zum gemessenen Spannungsabfall $U^{4\text{Pkt}}$ bei. Dies erlaubt eine Bestimmung des reinen 2DEG-Widerstandes $R^{4\text{Pkt}}$ im Bereich zwischen den kontaktierten Abgriffen. Als Stromquelle dient der Oszillatorausgang (Spannungsamplitude U_0) des Lock-In-Verstärkers mit seriell geschaltetem Vorwiderstand R_V .

$$R^{4\text{Pkt}} = \frac{U^{4\text{Pkt}}}{I} = \frac{R_V + R_R}{\frac{U_0}{U^{4\text{Pkt}}} - 1} \approx (R_V + R_R) \cdot \frac{U^{4\text{Pkt}}}{U_0} \quad \text{mit} \quad I = \frac{U_0}{R_V + R_R + R^{4\text{Pkt}}} \quad (6.5)$$

Im Restwiderstand R_R sind dabei konstante Beiträge durch Zuleitungen, ohmsche Kontakte, Impedanz der Spannungsquelle, etc. zusammengefasst. Die Näherung in Gleichung 6.5 setzt einen genügend groß dimensionierten Vorwiderstand $R_V = 100 \text{ M}\Omega \gg R^{4\text{Pkt}}$ voraus und verliert erst bei sehr niedrigen Leitwerten der Nanostruktur (z. B. im Bereich der Coulomb-Blockade) ihre Gültigkeit. Beachtet werden muss, dass in dieser Messkonfiguration die Probe zusammen mit den restlichen Serienwiderständen einen Spannungsteiler bildet. Bei vollständig geschlossenen Gates fällt daher die gesamte Quellspannung $U_0 = 1 \text{ V}$ über die Nanostruktur ab und kann dort zu Überschlägen führen.

²⁸Nominelle Eingangsimpedanz des verwendeten Lock-In-Verstärkers: $10 \text{ M}\Omega \parallel 30 \text{ pF}$

Nichtlineare Transportmessungen

Abbildung 6.14 zeigt die schematische Darstellung einer typischen Zweipunkt-Anordnung zur Messung des nichtlinearen differentiellen Leitwerts. Der verwendete aktive Spannungsaddierer wurde von C. Höppler hergestellt und beinhaltet Spannungsteiler für die Eingangssignale mit Übersetzungsverhältnissen $f^{ac} = 1 : 10^{-4}$ bzw. $f^{dc} = 1 : 10^{-2}$.

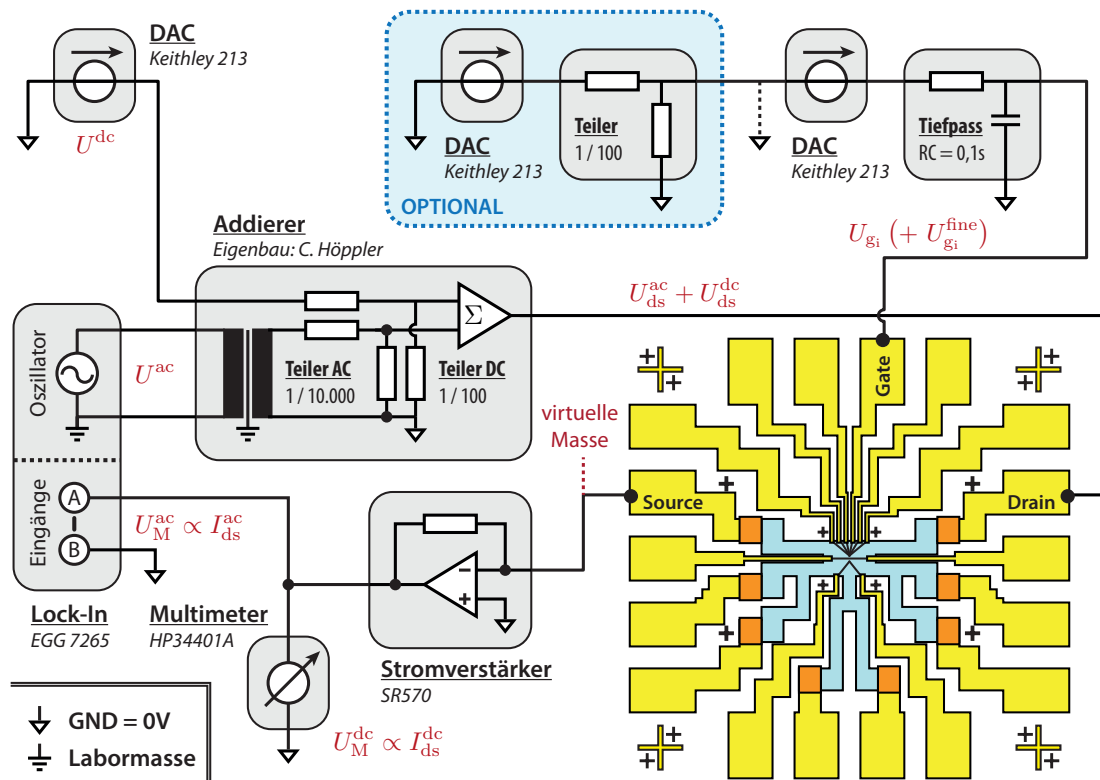


Abb. 6.14.: Schematische Darstellung des elektronischen Messaufbaus zur (nichtlinearen) Zweipunkt-Messung des differentiellen Leitwerts

Die Einkopplung des Wechselspannungssignals U^{ac} erfolgt induktiv durch einen Übertrager. Das summierte Ausgangssignal wird als *Drain*-Potential direkt an den entsprechenden Mesakontakt angelegt. Der Eingang des mit dem *Source*-Kontakt verbundenen Transimpedanzverstärkers fungiert dabei als virtuelle Masse und ermöglicht einen Stromfluss durch die Nanostruktur. Das Ausgangssignal des Strom-Spannung-Wandlers wird über ein T-Stück zum Multimeter und dem Lock-In-Verstärker geführt, wo die getrennte Messung der Wechsel- und Gleichspannungsanteile U_M^{ac} bzw. U_M^{dc} erfolgt. Mit der gewählten Eingangsempfindlichkeit s des Transimpedanzverstärkers können schließlich die Ströme $I_{ds}^{ac/dc} = s \cdot U_M^{ac/dc}$ bestimmt werden. In Abhängigkeit des Messbereichs muss dabei die

jeweilige Eingangsimpedanz R_{TIV} als zusätzlicher Serienwiderstand berücksichtigt werden. Für den differentiellen Drain–Source–Widerstand folgt somit:

$$R_{\text{ds}}^{\text{ac}}(U_{\text{ds}}^{\text{dc}}, U_{\text{g}}) + R_{\text{TIV}} = \frac{\partial U_{\text{ds}}^{\text{ac}}}{\partial I_{\text{ds}}^{\text{ac}}} = \frac{s}{U_{\text{ac}} \cdot f_{\text{ac}}} \cdot U_{\text{M}}^{\text{ac}} \quad (6.6)$$

Daraus kann durch Subtraktion des Restwiderstands R_{R} (siehe Abschnitt 6.2.2) der differentielle Leitwert der Nanostruktur berechnet werden:

$$g(U_{\text{ds}}^{\text{dc}}, U_{\text{g}}) = \frac{1}{R_{\text{ds}}^{\text{ac}}(U_{\text{ds}}^{\text{dc}}, U_{\text{g}}) - R_{\text{R}}} \quad (6.7)$$

Mit Hilfe von Spannungsteilern kann die Auflösung der angelegten Gatepotentiale U_{g} signifikant verbessert werden. Durch „Vorspannen“ eines zweiten DACs in einer Kaskadenschaltung bleibt dabei der zugängliche Spannungsbereich erhalten. Zur Dämpfung von hochfrequentem Rauschen auf den Gatepotentialen werden jeweils Tiefpassfilter am Ende der Signalketten eingesetzt. Diese schützen die Nanostrukturen zudem vor Potentialsprüngen durch eine Begrenzung der Änderungsraten.

6.2.3. Messdatenerfassung

Die Datenkommunikation zwischen den Messgeräten erfolgt per gemeinsamem *IEEE-488*-Bus (GPIB), welcher über eine Ethernet–Schnittstelle²⁹ mit dem Messrechner verbunden ist. Um Masseschleifen und Einstreuung von Störsignalen zu vermeiden, ist der PC mittels Optokoppler galvanisch von der Messapparatur isoliert. Die IGH–Einheit des Kryostaten, sowie die Stromversorgung des Magneten werden über eine serielle *RS-232*-Schnittstelle in das Messsystem eingebunden.

Zur Gerätesteuerung und Datenerfassung kommt das Programm „*Measkern*“ zum Einsatz. Die für Linux–Betriebssysteme konzipierte Software wurde ursprünglich am Max–Planck–Institut für Festkörperphysik Stuttgart entwickelt und durch C. Höppler im Rahmen seiner Promotion weiter verbessert³⁰. Komplette Messabläufe werden vorab in Protokolldateien definiert und bei der Ausführung sequentiell abgearbeitet. Die dabei verwendete Skriptsprache ermöglicht mit Kontrollstrukturen wie z. B. Schleifen die Realisierung komplexer Messprogramme. Durch Hinzufügen neuer Gerätetreiber (Programmiersprache C++) kann die von *Measkern* unterstützte Hardware erweitert werden.

²⁹NI GPIB–ENET/1000 Ethernet–zu–GPIB Controller von *National Instruments*

³⁰HÖPPLER, „Nichtlinearer Transport durch ballistische Quantenpunktkontakte“.

7 Kapitel 7.

Probencharakterisierung

Die 2DEG–Charakterisierung des verwendeten Heterostruktur–Wafers erfolgte im ^4He –Verdampfungskryostaten bei einer Basistemperatur von ca. 1,69 K. Sämtliche Messungen wurden dabei an Probe *V815–A9a* durchgeführt, deren Mesa eine Hallbar–Geometrie mit vier Potentialabgriffen aufweist (siehe Abbildung 7.1). Die ohmschen Kontakte sind entsprechend ihrer Pinzuordnung innerhalb des Chipcarriers nummeriert. Für die anschließende Berechnung der 2DEG–Flächenwiderstände sind die folgenden Längenverhältnisse der Struktur relevant:

$$a_1 \equiv \frac{l_1}{b} = \frac{586,7 \mu\text{m}}{49,3 \mu\text{m}} = 11,90 \square \quad a_2 \equiv \frac{l_2}{b} = \frac{254,8 \mu\text{m}}{49,3 \mu\text{m}} = 5,17 \square \quad (7.1)$$

Hierbei bezeichnet b die Breite der Mesa, l_1 die Länge zwischen den Kontaktreihen und l_2 den lateralen Abstand der Potentialabgriffe (gemessen zwischen den jeweiligen Zentren). Die Vermessung der Geometrie erfolgte am Computer anhand von Lichtmikroskop–Aufnahmen der Probe.

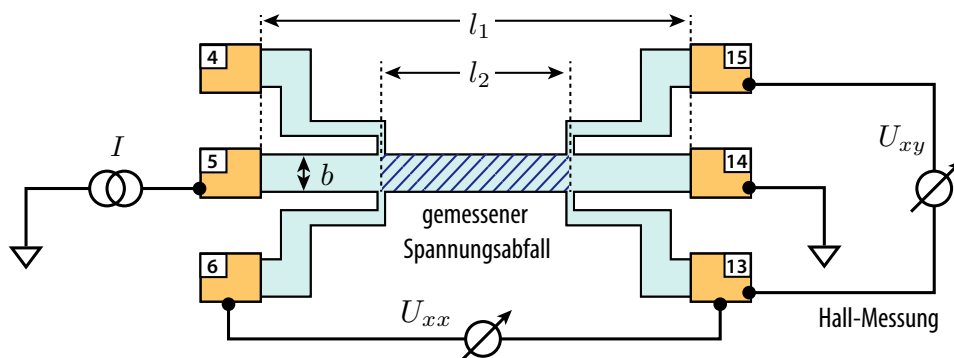


Abb. 7.1.: Vierpunkt–Anordnung zur Bestimmung des 2DEG–Flächenwiderstandes

7.1. Flächenwiderstand des 2DEGs

7.1.1. Spezifischer Flächenwiderstand

Der elektrische Widerstand einer dünnen leitfähigen Schicht ist abhängig von deren Geometrie. Dabei weisen quadratische Flächenelemente bei einem homogenen Stromfluss zwischen zwei gegenüberliegenden Seitenkanten stets den selben Widerstandswert R_{\square} auf, welcher als *spezifischer Flächenwiderstand* bezeichnet wird. Im Spezialfall eines konstanten Leiterquerschnitts lässt sich der effektive Widerstand als Parallel- bzw. Serienschaltung kleinerer quadratischer Flächensegmente analytisch berechnen (siehe Abbildung 7.2). Für einen rechteckigen Leiter mit Länge m und Querschnittslänge n ergibt sich somit für dessen Gesamtwiderstand $R_{n \times m}$:

$$R_{n \times m} = n \cdot \left[\sum_m \frac{1}{R_{\square}} \right]^{-1} = \frac{n}{m} R_{\square} \quad (7.2)$$

Insbesondere folgt hieraus direkt die Unabhängigkeit des elektrischen Widerstandes quadratischer Flächen von deren Kantenlänge.

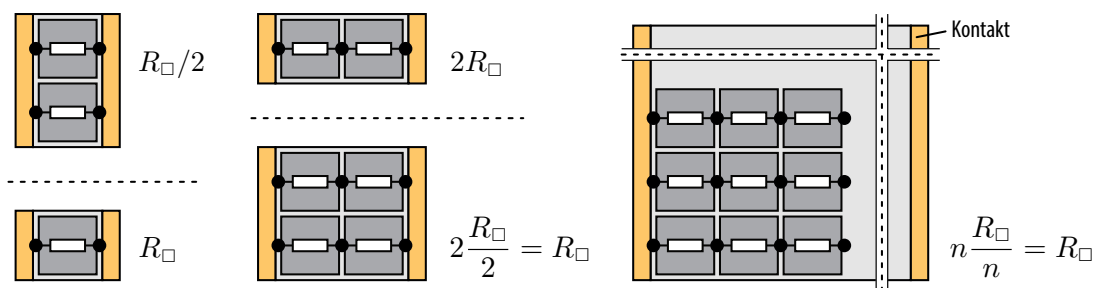


Abb. 7.2.: Geometrieabhängigkeit des Flächenwiderstandes dünner Schichten

Die Bestimmung des 2DEG-Widerstandes erfolgt in einer Vierpunkt-Anordnung mittels Lock-In-Verstärker (siehe Abbildung 7.1). Dabei wird der Mesa über das Kontaktpaar 5-14 ein Strom von 100 nA aufgeprägt. Anhand des gemessenen Spannungsabfalls U_{xx} in Längsrichtung kann der elektrische Widerstand $R_{xx} = U_{xx}/I$ der Fläche zwischen den Potentialabgriff-Zentren berechnet werden. Die spezifischen Flächenwiderstände ergeben sich durch eine Skalierung mit dem zuvor bestimmten Längenverhältnis a_2 :

$$\text{unbeleuchtet:} \quad R_{xx}^u = \frac{27,90 \mu\text{V}}{100 \text{ nA}} = 279,0 \Omega \quad \Rightarrow \quad R_{\square}^u \stackrel{(7.2)}{=} \frac{R_{xx}}{a_2} = 54,0 \Omega \quad (7.3a)$$

$$\text{beleuchtet:} \quad R_{xx}^b = \frac{14,55 \mu\text{V}}{100 \text{ nA}} = 145,5 \Omega \quad \Rightarrow \quad R_{\square}^b = 28,1 \Omega \quad (7.3b)$$

7.1.2. Numerische Berechnung von Flächenwiderständen komplexer Geometrien

Die spätere Berechnung der einzelnen ohmschen Kontaktwiderstände (siehe Abschnitt 7.2) setzt Kenntnis über den 2DEG-Schichtwiderstand für alle realisierten Messkonfigurationen voraus. Dieser ist abhängig von den jeweils stromführenden Kontakten und kann aufgrund der komplexen Mesa-Geometrie nicht analytisch bestimmt werden. Zur numerischen Simulation des Stromflusses innerhalb dünner Schichten wurde daher ein Computerprogramm entwickelt, welches die Modellierung beliebig geformter Widerstandsflächen und Kontaktpotentiale erlaubt. Die in einer Eingabedatei definierten Strukturen werden hierzu zunächst in quadratische Pixel unterteilt. Diese stellen Stromknotenpunkte dar, die über ein Widerstandsnetzwerk mit den jeweils angrenzenden Zellen verbunden sind (siehe Abbildung 7.3, Inlay).

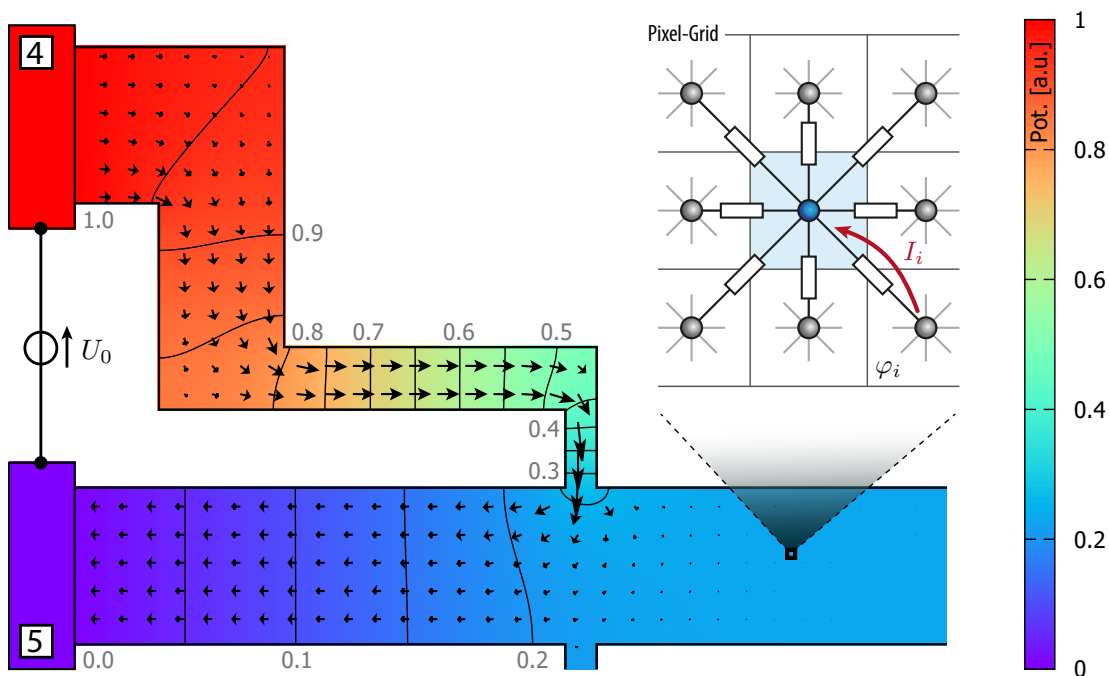


Abb. 7.3.: Detailansicht eines simulierten Potentialverlaufs innerhalb des 2DEGs einer 3-Bein-Mesa, *Inlay*: Modell zur numerischen Berechnung des Potentials

In einem iterativen Verfahren wird unter Anwendung der Kirchhoffschen Knotenregel das Potential jedes einzelnen Pixels φ_0 aus den Werten seiner jeweiligen Nachbarnpunkte φ_i berechnet. Der hierfür angenommene Widerstandswert skaliert linear mit dem Pixelabstand, wobei nur Zellen innerhalb der Strukturgrenzen einen Strombeitrag liefern¹.

¹Die zusätzliche Berücksichtigung der Diagonalelemente führt dabei zu einer schnelleren Konvergenz der Simulation, ohne jedoch das Endergebnis zu beeinflussen.

7. Probencharakterisierung

Die als Simulationsparameter festgelegten Potentiale der Kontaktflächen werden als konstant angenommen, sodass ein typisches Randwertproblem vorliegt. Im dynamischen Gleichgewicht des Systems gilt für jeden Knotenpunkt:

$$\sum_i I_i = \sum_i \frac{\varphi_i - \varphi_0}{R_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit} \quad R_i = \begin{cases} R & \text{horizont. / vertik.} \\ \sqrt{2}R & \text{diagonal} \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{\sum_i \frac{\varphi_i}{R_i}}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \quad (7.5)$$

Zur Beurteilung des Simulationsfortschritts wird für jede Iteration n die Betragssumme der Potentialänderungen $\Delta\Phi_n \equiv \sum_i |\varphi_{i,n} - \varphi_{i,n-1}|$ aller Pixel bestimmt. Diese konvergiert bei der Annäherung an das dynamische Gleichgewicht des Systems gegen Null. Nach Erfüllung eines zuvor definierten Epsilon-Kriteriums $\Delta\Phi_n < \varepsilon$ kann die Rechenschleife schließlich abgebrochen werden. Der Strom durch die Widerstandsfläche wird entlang zuvor definierter Querschnittslinien aus dem Gradienten des elektrischen Potentials berechnet. Durch Integration über die Beiträge aller Pixel auf einem Pfad \mathcal{C} erhält man für den Gesamtstrom $I_{\mathcal{C}}$:

$$I_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} dI = \left\| \sum_{i \in \mathcal{C}} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \varphi(x_i + dx, y_i) - \varphi(x_i, y_i) \\ \varphi(x_i, y_i + dy) - \varphi(x_i, y_i) \end{pmatrix} \right\| \quad (7.6)$$

Mit steigender Iterationszahl konvergieren die Ströme in den Zuleitungen der aktiven Kontakte gegen den selben Grenzwert I_g . Beliebige Grenzlinien zu „freien Mesa-Bereichen“² werden hingegen im Mittel stromfrei. Der effektive Flächenwiderstand des 2DEGs bei einem Stromfluss zwischen den Kontakten A und B kann über das Ohmsche Gesetz direkt berechnet werden:

$$R_S^{A,B} = \frac{U_0}{I_g^{A,B}} \quad (7.7)$$

Zur Verkürzung der Rechenzeit wird die Pixelgröße sukzessive verkleinert und das Potential zunächst nur grob genähert. Abbildung 7.3 zeigt die Detailansicht eines simulierten Potentialverlaufs innerhalb einer 3-Bein-Mesa bei einer angelegten Spannung zwischen den Kontakten 4 und 5. Die eingezeichneten Äquipotentiallinien verdeutlichen dabei die Zunahme des Spannungsabfalls pro Längeneinheit im Bereich kleinerer Leitungsquerschnitte. Die resultierenden elektrischen Ströme sind in Form eines Vektorfeldes dargestellt. In den Abbildungen 7.4 und 7.5 findet sich eine Zusammenstellung ausgewählter Simulationsergebnisse für die verwendeten Mesa-Geometrien bei unterschiedlichen Kontakt-Konfigurationen. Die angegebenen Widerstände sind jeweils auf die Bezugsgröße R_{5-14} normiert, welche durch Skalierung des spezifischen Flächenwiderstands (siehe Gl. 7.3) mit dem Geometriefaktor a_1 bestimmt werden kann:

$$R_0 \equiv R_{5-14} = a_1 \cdot R_{\square} = 642,4 \, \Omega \quad (7.8)$$

²kein Kontakt mit extern definiertem Potential innerhalb des Flächensegments

Die Potentiale sind in willkürlichen Einheiten von 0 bis +1 angegeben. Zur Abschätzung des lokalen Flächenwiderstands dienen die im Abstand von $2,5 \cdot 10^{-2}$ dargestellten Äquipotentiallinien. Graue Balken markieren die Positionen der Leiterquerschnitte, durch welche die elektrischen Ströme gemäß Gleichung 7.6 berechnet werden.

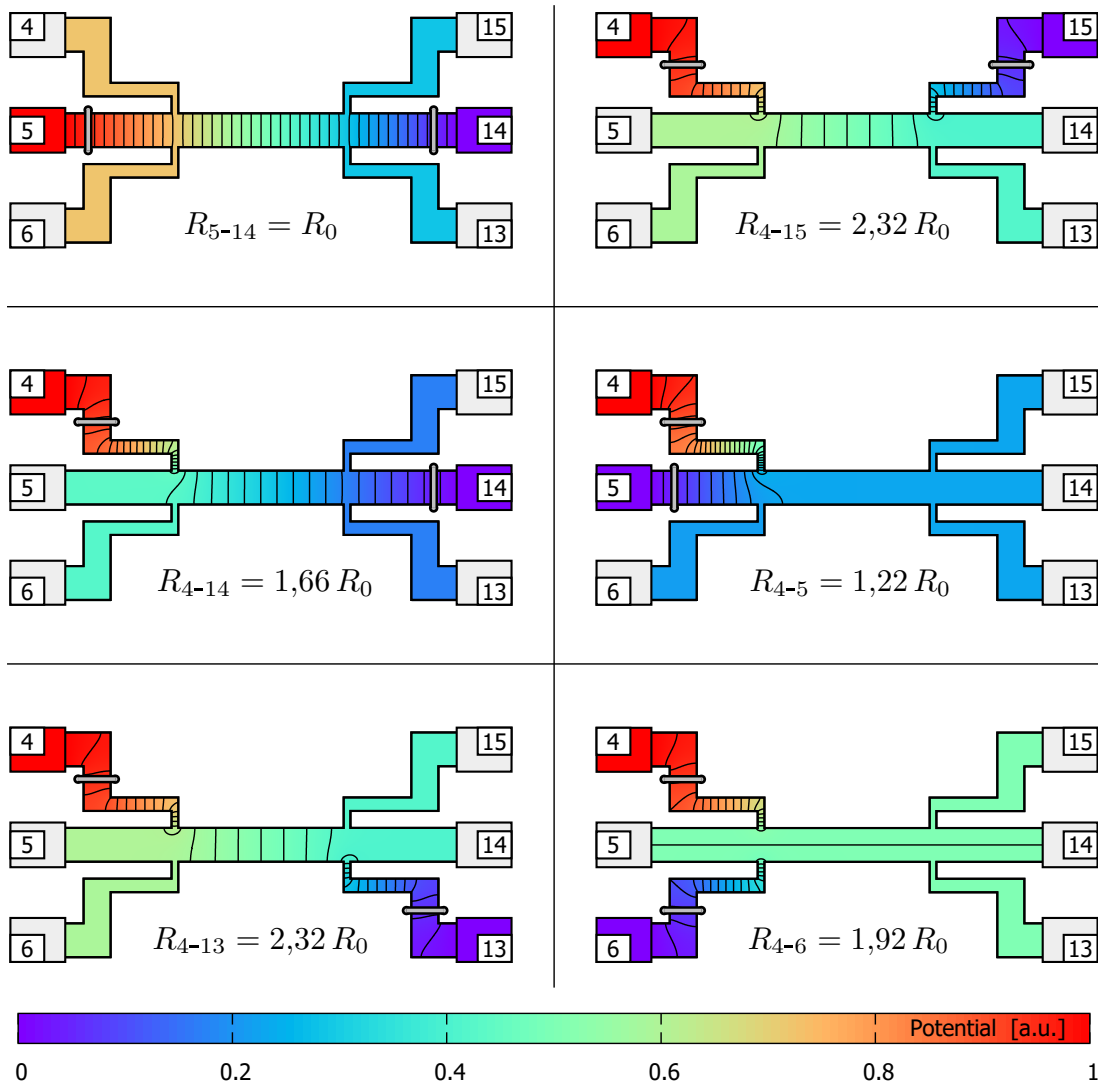


Abb. 7.4.: Simulierte Potentialverläufe im 2DEG für verschiedene Konfigurationen zur numerischen Berechnung des Flächenwiderstandes (3-Bein-Mesa)

7. Probencharakterisierung

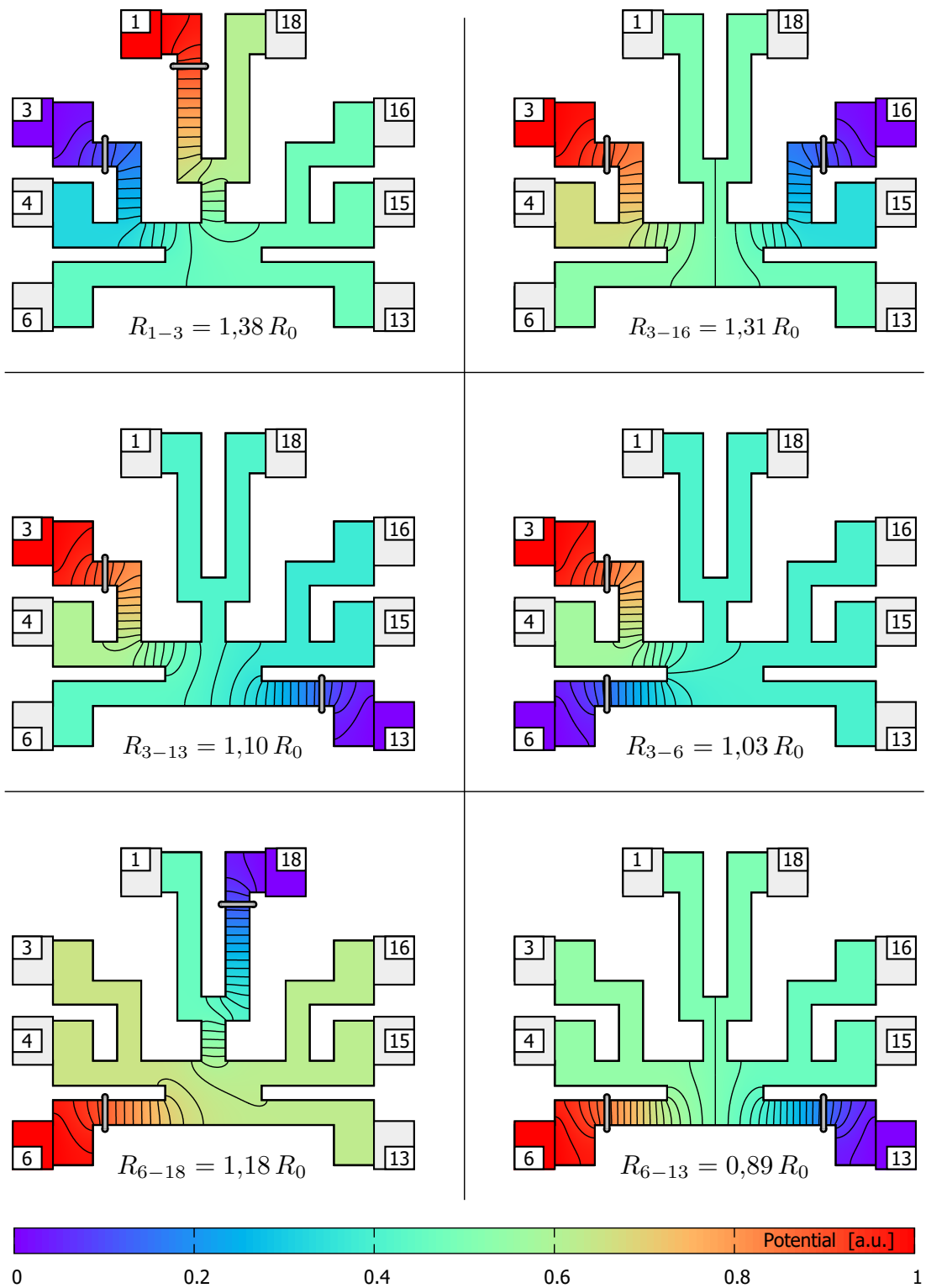


Abb. 7.5.: Simulierte Potentialverläufe im 2DEG für verschiedene Konfigurationen zur numerischen Berechnung des Flächenwiderstandes (4-Bein-Mesa)

In Tabelle 7.1 sind die elektrischen Ströme und Flächenwiderstände aller möglichen Kontaktpaare zusammengefasst. Unter Berücksichtigung der Symmetrieachsen beider Flächen lassen sich dabei sechs (3-Bein-Mesa), respektive 16 (4-Bein-Mesa) Anordnungen unterscheiden. Alle Größen sind auf die Referenz-Konfiguration 5-14 der Hallbar-Geometrie normiert, deren Widerstand in Gleichung 7.8 berechnet wurde. Die angegebenen Fehler resultieren aus geringfügigen Abweichungen der an jeweils beiden Stromkontakten numerisch bestimmten Ströme.

Mesa	Kontakte				Strom [I_0]		Widerstand R_S [R_0]	
3-Bein	4-5	5-6	13-14	14-15	0,8176	$\pm 1,86 \cdot 10^{-3}$	1,2230	$\pm 2,79 \cdot 10^{-3}$
	4-6	13-15			0,5206	$\pm 1,41 \cdot 10^{-5}$	1,9209	$\pm 5,21 \cdot 10^{-5}$
	4-14	6-14	5-13	5-15	0,6018	$\pm 1,39 \cdot 10^{-3}$	1,6617	$\pm 3,85 \cdot 10^{-3}$
	4-13	6-15			0,4310	$\pm 1,75 \cdot 10^{-5}$	2,3200	$\pm 9,43 \cdot 10^{-5}$
	4-15	6-13			0,4310	$\pm 1,30 \cdot 10^{-5}$	2,3200	$\pm 7,00 \cdot 10^{-5}$
	5-14				1,0000	/	1,0000	/
4-Bein	1-3	16-18			0,7254	$\pm 4,69 \cdot 10^{-5}$	1,3786	$\pm 8,91 \cdot 10^{-5}$
	1-4	15-18			0,8661	$\pm 2,83 \cdot 10^{-4}$	1,1546	$\pm 3,77 \cdot 10^{-4}$
	1-6	13-18			0,8445	$\pm 1,45 \cdot 10^{-4}$	1,1841	$\pm 2,03 \cdot 10^{-4}$
	1-13	6-18			0,8448	$\pm 1,83 \cdot 10^{-4}$	1,1837	$\pm 2,57 \cdot 10^{-4}$
	1-15	4-18			0,8664	$\pm 2,03 \cdot 10^{-4}$	1,1542	$\pm 2,71 \cdot 10^{-4}$
	1-16	3-18			0,7253	$\pm 3,39 \cdot 10^{-6}$	1,3787	$\pm 6,44 \cdot 10^{-6}$
	1-18				0,9255	$\pm 2,26 \cdot 10^{-6}$	1,0805	$\pm 2,64 \cdot 10^{-6}$
	3-4	15-16			1,5217	$\pm 4,80 \cdot 10^{-4}$	0,6572	$\pm 2,07 \cdot 10^{-4}$
	3-6	13-16			0,9731	$\pm 2,85 \cdot 10^{-4}$	1,0276	$\pm 3,01 \cdot 10^{-4}$
	3-13	6-16			0,9094	$\pm 2,65 \cdot 10^{-4}$	1,0996	$\pm 3,20 \cdot 10^{-4}$
	3-15	4-16			0,9231	$\pm 4,11 \cdot 10^{-4}$	1,0833	$\pm 4,82 \cdot 10^{-4}$
	3-16				0,7647	$\pm 2,99 \cdot 10^{-5}$	1,3078	$\pm 5,12 \cdot 10^{-5}$
	4-6	13-15			1,2454	$\pm 1,07 \cdot 10^{-4}$	0,8029	$\pm 6,92 \cdot 10^{-5}$
	4-13	6-15			1,1429	$\pm 6,22 \cdot 10^{-5}$	0,8750	$\pm 4,76 \cdot 10^{-5}$
	4-15				1,1646	$\pm 6,22 \cdot 10^{-5}$	0,8587	$\pm 4,58 \cdot 10^{-5}$
	6-13				1,1274	$\pm 6,72 \cdot 10^{-5}$	0,8870	$\pm 5,29 \cdot 10^{-5}$

Tab. 7.1.: Simulierte Ströme und Flächenwiderstände des 2DEGs für verschiedene Konfigurationen und Mesa-Geometrien

7.2. Ohmsche Kontakte

Mit Hilfe des im Folgenden beschriebenen Verfahrens, können die elektrischen Widerstände der einzelnen ohmschen Kontakte in guter Näherung bestimmt werden. Hierzu wird in einer Zweipunkt-Anordnung eine Wechselspannung an die Probe angelegt und der sich einstellende Strom mittels Transimpedanz- und Lock-In-Verstärker gemessen. Der sich daraus ergebende Gesamtwiderstand setzt sich zusammen aus Beiträgen der stromführenden Kontakte R_{K_i} , der jeweiligen Zuleitungen³ R_{Z_i} und dem im vorigen Abschnitt bestimmten Flächenwiderstand des 2DEGs $R_S \cdot R_0$. Bei einer Mesa mit n ohmschen Kontakten existieren insgesamt $\sum_{i=1}^n i$ unterschiedliche Messkonfigurationen, die zusammen ein lineares Gleichungssystem (kurz „LGS“) bilden.

Probe V815-A9a: Für die untersuchte 3-Bein-Mesa gilt in Matrixschreibweise:

$$\begin{array}{c}
 \text{Ohmsche Kontakte und Zuleitungen} \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv A} \cdot \begin{pmatrix} R_{K4} + 226 \Omega \\ R_{K5} + 197 \Omega \\ R_{K6} + 199 \Omega \\ R_{K13} + 207 \Omega \\ R_{K14} + 205 \Omega \\ R_{K15} + 214 \Omega \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \mathbf{R}_K \quad \mathbf{R}_Z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1,223 \\ 1,921 \\ 2,320 \\ 1,662 \\ 2,320 \\ 1,223 \\ 1,662 \\ 1,000 \\ 1,662 \\ 2,320 \\ 1,662 \\ 2,320 \\ 1,223 \\ 1,921 \\ 1,223 \end{pmatrix}}_{= R_S} \cdot R_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1567 \Omega \\ 2067 \Omega \\ 2147 \Omega \\ 1969 \Omega \\ 2170 \Omega \\ 1764 \Omega \\ 1871 \Omega \\ 1696 \Omega \\ 1888 \Omega \\ 2358 \Omega \\ 2182 \Omega \\ 2371 \Omega \\ 1734 \Omega \\ 1944 \Omega \\ 1744 \Omega \end{pmatrix}}_{\equiv \mathbf{b}} \quad (7.9)
 \end{array}$$

Das vorliegende LGS ist mit insgesamt sechs Unbekannten und 15 Gleichungen überbestimmt und besitzt demzufolge im Allgemeinen keine exakte Lösung. Nach der *Methode der kleinsten Quadrate* von Gauß⁴ lässt sich allerdings die Näherung bestimmen, deren Fehlervektor die kleinste euklidische Norm annimmt. Es kann gezeigt werden⁵, dass diese Eigenschaft durch die eindeutige Lösung des Normalsystems erfüllt wird:

$$A \cdot \mathbf{R}_K = \mathbf{b}' \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}' = \mathbf{b} - A\mathbf{R}_Z - R_S R_0 \quad (7.10)$$

$$A^T A \cdot \mathbf{R}_K = A^T \cdot \mathbf{b}' \quad (7.11)$$

³Elektrischer Widerstand zwischen Messkabelanschlussbox und Probensockel

⁴GAUSS, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*.

⁵SCHWARZ und KÖCKLER, „Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate“.

Mit Hilfe der Software *Wolfram Mathematica 10.0* erhält man somit für die Kleinste-Quadrate-Lösung und deren sogenannten Defekt:

$$\mathbf{R}_K = \begin{pmatrix} R_{K4} \\ R_{K5} \\ R_{K6} \\ R_{K13} \\ R_{K14} \\ R_{K15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87,8 \, \Omega \\ 262,9 \, \Omega \\ 320,3 \, \Omega \\ 140,0 \, \Omega \\ 389,6 \, \Omega \\ 158,8 \, \Omega \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{b}' - \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_K\| = 14,17 \, \Omega \quad (7.12)$$

Letzterer kann dabei als Maß für die Güte der Näherungslösung interpretiert werden und ist im Idealfall Null. Die berechneten elektrischen Widerstände beziehen sich auf die gesamte Leitungsstrecke vom jeweiligen Chipcarrier-Pin bis zum 2DEG. Diese enthalten demzufolge auch Beiträge der Aluminium-Bonddrähte, sowie der strukturierten Leiterbahnen zwischen Bondpads und ohmschen Kontakten. Dabei weisen die bestimmten Widerstandswerte relative Abweichungen um bis zu Faktor 4,4 auf. Diese Streuung erscheint im Vergleich zu vorangegangenen Untersuchungen innerhalb der Arbeitsgruppe⁶ ungewöhnlich groß und könnte auf Probleme im Zusammenhang mit dem Einlegieren der ohmschen Kontakte hindeuten. Der Übergang zu einem anderen Halbleiter-Probenmaterial könnte dabei eine Adaption relevanter Prozessparameter erfordern. Der kleine Defekt wiederum lässt auf eine hohe Qualität der ermittelten Kleinste-Quadrate-Lösung schließen und indiziert somit eine gute Eignung des Modellansatzes zur Beschreibung des Widerstandssystems.

Probe V815-A3a: Eine analog durchgeführte Untersuchung der 4-Bein-Mesa mit einer Doppeldot-Nanostruktur liefert die folgende Kleinste-Quadrate-Näherung für die einzelnen ohmschen Kontaktwiderstände. Dabei wurden Messungen aller 25 möglichen Paarkombinationen ausgewertet. Die Widerstände der Zuleitungskabel im ³He/⁴He-Entmischungskryostaten betragen einheitlich 118 Ω:

$$\mathbf{R}_K = \begin{pmatrix} R_{K1} \\ R_{K3} \\ R_{K4} \\ R_{K6} \\ R_{K13} \\ R_{K15} \\ R_{K16} \\ R_{K18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 134,2 \, \Omega \\ 153,3 \, \Omega \\ 132,8 \, \Omega \\ 146,9 \, \Omega \\ 147,9 \, \Omega \\ 119,7 \, \Omega \\ 149,3 \, \Omega \\ 141,0 \, \Omega \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{b}' - \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_K\| = 186,8 \, \Omega \quad (7.13)$$

Wenngleich sämtliche Widerstandswerte von der selben Größenordnung wie die der zuvor betrachteten 3-Bein-Mesa sind, fällt der im direkten Vergleich deutlich größere Defekt der Näherungslösung auf. Bei einer genaueren Betrachtung des Fehlervektors \mathbf{d} zeigen

⁶RAISER, „Untersuchung der elektrischen Eigenschaften von AuGe-Kontakten in GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen“.

7. Probencharakterisierung

sich signifikante Abweichungen für einzelne Messungen, welche sich von den restlichen Fehlerwerten abheben.

$$\underbrace{\mathbf{b}' - \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_K}_{\equiv \mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ d_{3-4} \\ d_{3-6} \\ \vdots \\ d_{13-18} \\ d_{15-16} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 108,3 \Omega \\ 10,4 \Omega \\ \vdots \\ 3,6 \Omega \\ 107,1 \Omega \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Nichtsdestotrotz lässt die im Vergleich zu Probe *V815-A9a* deutlich geringere Streuung der Widerstandswerte sowie der kleinere Mittelwert auf eine höhere Qualität der ohmschen Kontakte schließen.

7.2.1. Diskussion der Ergebnisse

Im Fall der betrachteten 4-Bein-Mesa liefert das als Ansatz gewählte Widerstandsnetzwerk offenbar keine vollständige Beschreibung des Gesamtsystems. Insbesondere werden die Serienwiderstände der Konfigurationen 3-4 und 15-16 nur unzureichend durch die berechnete Näherungslösung reproduziert. Die symmetrische Lage der betroffenen Kontaktpaare legt einen systematischen Fehler bei der Berücksichtigung des 2DEG-Flächenwiderstands nahe. Mit Hilfe des kommerziellen Softwarepakets *Comsol Multiphysics 5.1* wurden daher die Simulationsergebnisse aus Abschnitt 7.1.2 zunächst auf Basis der *Finite-Elemente-Methode* stichprobenartig verifiziert. Dabei konnten keine signifikanten Abweichungen der jeweils berechneten relativen Flächenwiderstände festgestellt werden. Unter Anderem lassen sich jedoch folgende potentielle Fehlerursachen in Betracht ziehen.

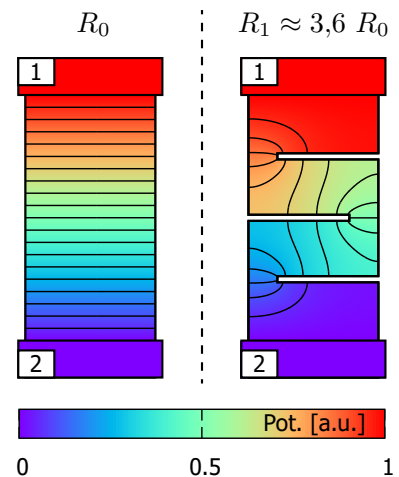


Abb. 7.6.: Erhöhung des Widerstandes durch Mesa-Defekte

Spezifischer Flächenwiderstand: Die Geometrie der 4-Bein-Mesa erlaubt keine triviale Bestimmung des spezifischen Flächenwiderstandes. Der an Probe *V815-A9a* exemplarisch ermittelte Wert für R_{\square} (siehe Gl. 7.2) wird daher im betreffenden Wafersegment als konstant angenommen und sämtlichen Berechnungen zu Grunde gelegt. Inhomogenitäten innerhalb der Heterostruktur, insbesondere Kristallbaufehler, können zu lokalen Fluktuationen der Leitfähigkeit führen. Des Weiteren muss beachtet

werden, dass die Messungen an Probe *V815-A3a* im Entmischungskryostaten bei einer deutlich tieferen Temperatur von ca. 100 mK erfolgte⁷.

Beschädigung der Mesa: Bei der Probenherstellung wird zur Unterstützung von Lift-Off-Prozessen im Bedarfsfall Ultraschall eingesetzt. Mikroskopaufnahmen zeigen, dass diese Behandlung zu kleinen Abplatzungen der Mesa in den Randbereichen führen kann und offenbar eine Belastung für das Halbleitermaterial darstellt. Die Auswirkungen auf dessen elektrische Eigenschaften sind dabei nur schwer abzuschätzen. Bei stark verschmutzten Waferoberflächen ist zudem eine mechanische Reinigung mit speziellen Wattestäbchen in Aceton erforderlich. Dabei können feine Kratzer im Halbleitermaterial entstehen, welche die Leitfähigkeit des 2DEGs einschränken bzw. lokal zerstören (siehe Abschnitt 3.2.5). Abbildung 7.6 illustriert dies anhand eines simulierten Leitersegments mit schmalen, schlitzförmigen Einkerbungen. Die Verlängerung der Strompfade bewirkt in diesem Fall eine drastische Erhöhung des effektiven Flächenwiderstands.

Degradation des 2DEGs: Im Zentrum der 4-Bein-Mesa von Probe *V815-A3a* befinden sich Top-Gates zur Definition von Quantenpunkten, welche mittels E-Beam-Lithographie strukturiert wurden. Untersuchungen haben gezeigt, dass die Einwirkung hochenergetischer Elektronenstrahlen während der Belichtung zu einer Beschädigung der GaAs/AlGaAs-Heterostruktur und somit zu einer Verschlechterung der 2DEG-Leitfähigkeit führen kann^{8,9}. Dies könnte insbesondere die großen Abweichungen der Näherungslösung vom Widerstandsmesswert für die Konfigurationen 1-18, 3-4 und 15-16 erklären. Besagten drei Kontaktpaaren ist gemeinsam, dass sich jeweils kein Top-Gate über dem dazwischenliegenden 2DEG-Segment befindet. Die betreffenden Flächenwiderstände müssten demnach im Verhältnis kleiner ausfallen, was durch die Messdaten qualitativ bestätigt wird.

7.2.2. Widerstandskennlinien

Zur weiteren Charakterisierung der ohmschen Kontakte wurden zudem nichtlineare Widerstandskennlinien aufgenommen. Dies erfolgte in einer Zweipunkt-Anordnung gemäß Abbildung 6.14 durch Addition einer variablen Drain-Source-Gleichspannung U_{ds} zum Wechselsignal des Lock-In-Verstärkers. Abbildung 7.7 zeigt den differentiellen Widerstand R_{ac} in Abhängigkeit der angelegten Gleichspannung für ausgewählte Kontaktpaare. Die als konstant angenommenen Beiträge durch die jeweiligen Zuleitungen wurden vom

⁷Die Überbestimmtheit des Gleichungssystems 7.9 erlaubt theoretisch eine Bestimmung von R_{\square} als zusätzliche Variable aus den gemessenen Gesamtwiderständen. Aufgrund eines signifikanten Fehlervektors zur berechneten Kleinste-Quadrate-Lösung ist dies jedoch im Fall von Probe *V815-A3a* mit einer entsprechend großen Unsicherheit verbunden.

⁸WADA u. a., „Electron Beam Induced Degradation of 2Deg in AlGaAs/GaAs Heterostructure“.

⁹TANAKA, KAWANISHI und ISHIKAWA, „Electron-Beam-Induced Damage in GaAs/AlGaAs Heterostructures“.

7. Probencharakterisierung

Messwert subtrahiert. Zu Vergleichszwecken wurde außerdem ein im IC-Sockel des Probenstabs montierter $1,5\text{ k}\Omega$ Metallschicht-Widerstand vermessen. Die deutlich sichtbare Rauschamplitude ist auf den im gewählten Messbereich kleinen Innenwiderstand ($1\ \Omega$) des Transimpedanzverstärkers zurückzuführen.

Einige Kennlinien von Probe *V815-A9a* (links) zeigen dabei Abweichungen von einer rein ohmschen Charakteristik mit unterschiedlich starker Ausprägung. Für die betreffenden Kontaktpaare nimmt der differentielle Widerstand im Grenzfall $U_{\text{ds}} = 0\text{ V}$ ein Maximum an und fällt mit betragsmäßig zunehmender Gleichspannung ab. Wenngleich sich die aufgezeichneten Messwerte jeweils aus Beiträgen von zwei ohmschen Kontakten und dem Flächenwiderstand des 2DEGs zusammensetzen, lassen sich dennoch qualitative Aussagen über die einzelnen Komponenten machen. So zeigen die Konfigurationen 4-13 und 4-15 ein näherungsweise ohmsches Verhalten, wohingegen die Kennlinie von Kontaktpaar 4-14 einen ausgeprägten Peak bei $U_{\text{ds}} = 0\text{ V}$ aufweist. Unter Annahme eines konstanten 2DEG-Beitrags lässt dies auf Kontakt 14 als Hauptursache für die nichtlineare Charakteristik schließen. Nach der selben Argumentation trifft dies außerdem für Kontakt 6 zu, allerdings in abgeschwächter Form. Erwartungsgemäß unterliegt daher der Probenwiderstand der entsprechenden Kombinationskonfiguration 6-14 einer noch größeren Variation (ca. $120\ \Omega$ im untersuchten Spannungsbereich). Dabei fällt auf, dass die betreffenden ohmschen Kontakte gemäß den in Abschnitt 7.2 angestellten Berechnungen mit $320,3\ \Omega$ (K6) bzw. $389,6\ \Omega$ (K14) die größten Widerstände aufweisen. Demnach lässt sich feststellen, dass geringe Kontaktwiderstände tendenziell mit einer ohmschen Kennlinien-Charakteristik einhergehen, und umgekehrt. Vor allem bei nichtlinearen Untersuchungen in Zweipunkt-Anordnung können „schlechte Kontakte“ zu einer Verfälschung der Messwerte führen, die nicht auf triviale Weise extrahiert werden kann.

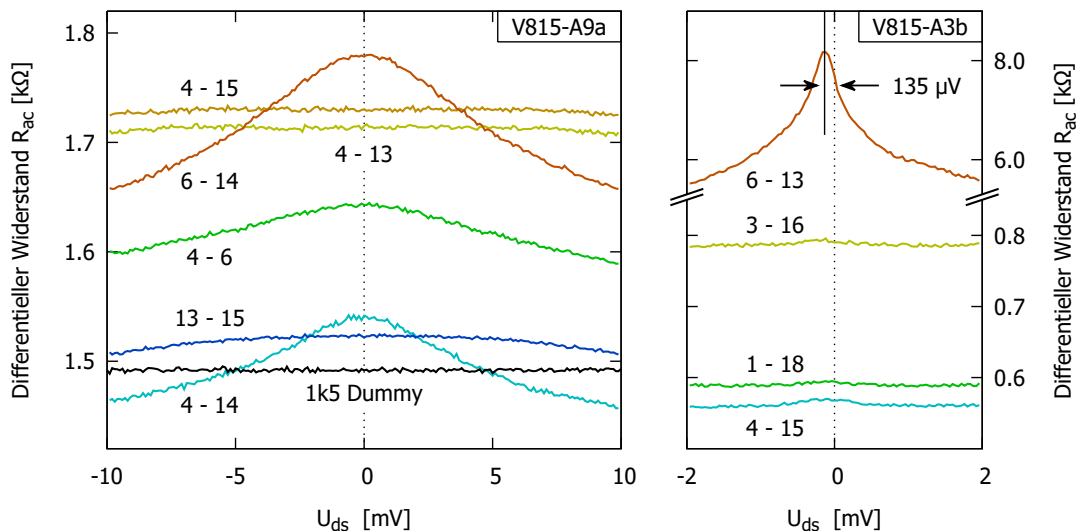


Abb. 7.7.: Differenzieller Widerstand bei nichtlinearer Zweipunkt-Messung in Abhängigkeit der Drain-Source-Gleichspannung für unterschiedliche Kontaktpaare

Im rechten Bereich von Abbildung 7.7 sind ausgewählte Widerstandskennlinien der Probe *V815-A3b* dargestellt. Diese besitzt eine 4-Bein-Mesa mit Doppeldot-Nanostruktur, welche aufgrund zweier hochohmiger Kontakte (K6 und K13) jedoch nicht weiter untersucht wurde. Messkonfiguration 6-13 liefert einen im Vergleich zehnfach größeren Gesamtwiderstand mit stark ausgeprägter nichtlinearer Charakteristik. Im Gleichspannungsintervall ± 2 mV wird eine Variation von mehr als 2 k Ω beobachtet, was in etwa 25 % des Maximalwerts entspricht. Darüber hinaus zeigt sich eine Verschiebung der Peakposition um ca. 135 μ V in Richtung negativer Drain-Source-Spannung. Dieser systematische Offset ist auf den elektronischen Aufbau am Entmischungskryostaten zurückzuführen und wurde bereits in früheren Messungen der Arbeitsgruppe beobachtet¹⁰. Der damit einhergehende Fehler kann entweder bereits während der Messung durch entsprechende Kompensation der dc-Spannung oder durch eine nachträgliche Korrektur der Spannungswerte erfolgen.

7.3. 2DEG-Charakterisierung

Die Charakterisierung des zweidimensionalen Elektronengases erfolgt durch eine Messung des Quanten-Hall-Effekts (siehe Abschnitt 2.5), aus derer sich zentrale elektronische Eigenschaften, wie z. B. Ladungsträgerdichte n_s , Beweglichkeit μ oder die mittlere freie Weglänge l_m , ableiten lassen. Hierzu wird der 3-Bein-Mesa über die zentralen Kontakte 5-14 ein konstanter Strom aufgeprägt und ein senkrecht zur 2DEG-Ebene orientiertes Magnetfeld angelegt. Abbildung 7.8 zeigt den in Vierpunkt-Anordnung gemessenen Längs- und Querwiderstand von Probe *V815-A9a* in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke. Der Potentialabgriff erfolgt über die Kontaktpaare 4-15 bzw. 4-6.

Ab einer Magnetfeldstärke von ca. 0,2 T bilden sich typische Schubnikow-de-Haas Oszillationen im Längswiderstand und Plateaus im Hall-Widerstand aus. Lediglich für das niedrigste Landauniveau kann bei unbeleuchteter Probe die Spinaufspaltung durch den *Zeeman-Effekt* aufgelöst werden. Die Widerstandswerte der Hall-Plateaus sind in sehr guter Übereinstimmung mit der gemäß Gleichung 2.40 geforderten Quantisierung von $R_H = h/ne^2$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$, wobei aufgrund von Spinartung nur jedes zweite Niveau (n geradzahlig) beobachtet wird. Minimale Abweichungen vom Erwartungswert liegen primär in einer prinzipiell imperfekten Probenbeschaffenheit begründet. Als potentielle Fehlerquellen müssen dabei vor allem inhomogene (Strom-)Kontakte oder kleinere Defekte im 2DEG in Betracht gezogen werden, die eine Verschiebung der Äquipotentiallinien bewirken können. Zudem führen Magnetfeldinhomogenitäten sowie eine nicht exakt orthogonale Orientierung der 2DEG-Ebene zum B -Feld zu einer Verfälschung der Messwerte.

¹⁰FLEISCHER, „Transporteigenschaften von Quantenpunktkontakten und Quantenpunkten“.

7. Probencharakterisierung

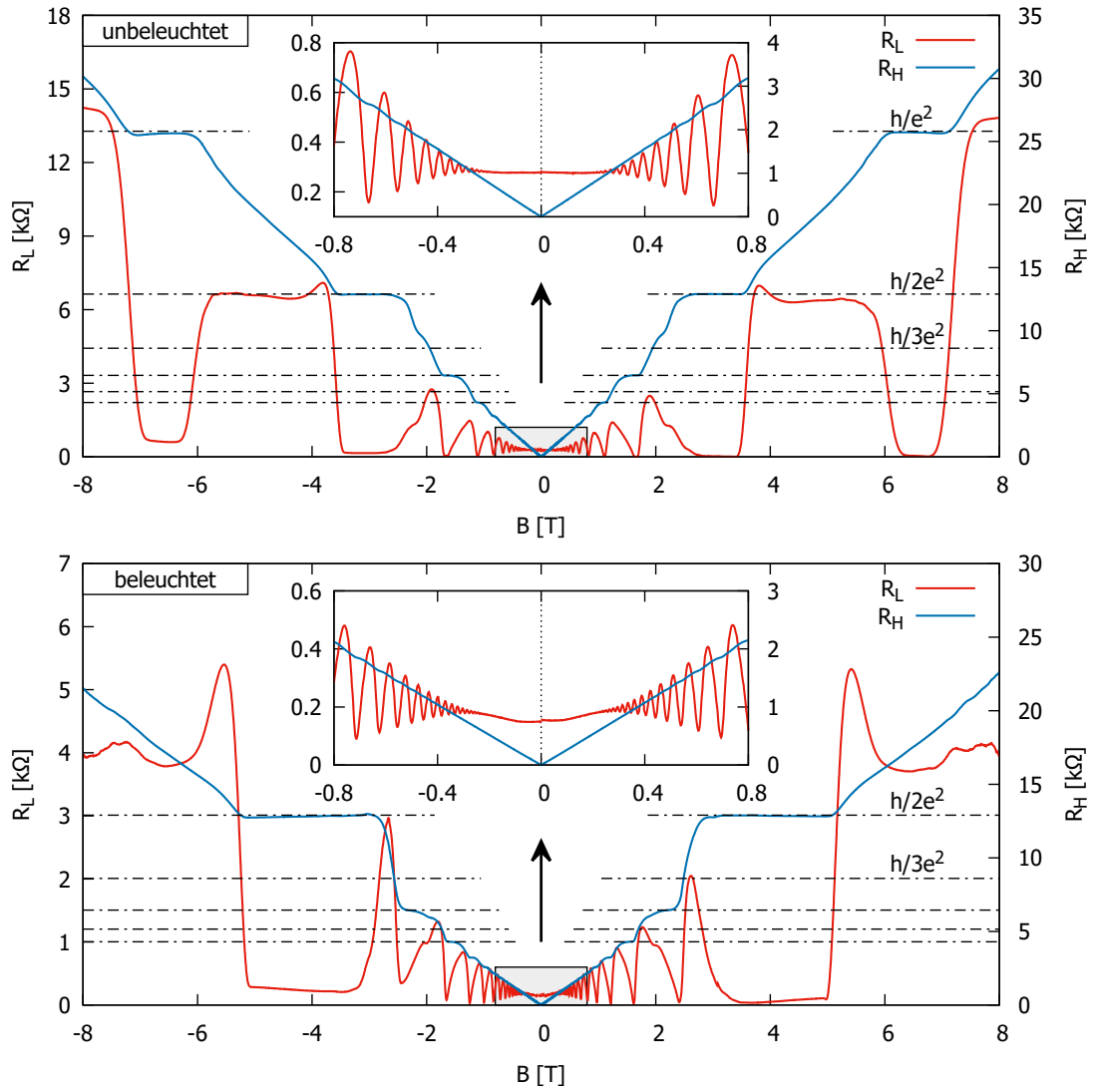


Abb. 7.8.: Längs- und Querwiderstand der Hallbar-Geometrie in Abhängigkeit des Magnetfeldes im unbeleuchteten (*oben*) und beleuchteten Fall (*unten*)

Ladungsträgerdichte: Anhand der $1/B$ -Periodizität der Schubnikow–de–Haas Oszillationen kann die Ladungsträgerdichte n_s im 2DEG berechnet werden. Für die Auswertung sind daher die Längswiderstände in Abbildung 7.9 gegen die reziproke Magnetfeldstärke dargestellt. Die in Form von Fehlerbalken angegebenen Unsicherheiten für die Minimumabstände ergeben sich aus der begrenzten zeitlichen Auflösung bei der Datenerfassung. Abhängig vom jeweiligen Messbereich wurde die Änderungsrate des Magnetfeldes stufenweise auf maximal $0,4 \text{ T/min}$ erhöht¹¹.

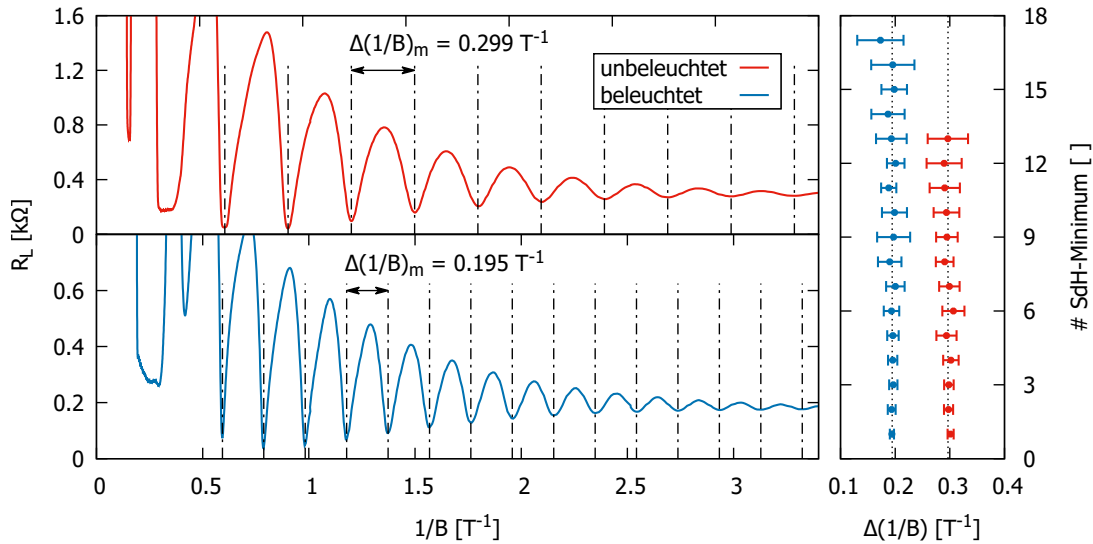


Abb. 7.9.: Längswiderstand in Abhängigkeit der reziproken Magnetfeldstärke bei unbeleuchteter (*oben*) und beleuchteter (*unten*) Probe

Mit dem fehlergewichteten Mittelwert der Periodizität $\Delta(1/B)$ folgt unter Berücksichtigung der Spinartung für die zweidimensionale Elektronendichte n_s :

$$n_s = \frac{2e}{h} \frac{1}{\Delta(1/B)} = \begin{cases} \text{unbeleuchtet:} & 1,62(\pm 0,02) \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2} \\ \text{beleuchtet:} & 2,49(\pm 0,03) \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2} \end{cases} \quad (7.15)$$

Alternativ lässt sich die Dichte der freien Ladungsträger auch aus der Anfangssteigung des Hall-Widerstandes bei kleinen Magnetfeldern (klassischer Hall-Effekt) berechnen. Dabei wird jeweils über die Fitparameter für beide Magnetfeldrichtungen gemittelt:

$$n_s|_{\text{k.H.}} = \frac{1}{e} \frac{1}{\frac{dR_H}{dB}} = \begin{cases} \text{unbeleuchtet:} & 1,60(\pm 0,00) \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2} \\ \text{beleuchtet:} & 2,36(\pm 0,04) \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^2} \end{cases} \quad (7.16)$$

Der im direkten Vergleich größere Fehler nach dem Beleuchten ist auf eine Relaxation der Probe während der Messung zurückzuführen. Dabei nähert sich die erhöhte Ladungsträgerdichte im 2DEG langsam einem neuen Gleichgewichtszustand an. Dennoch zeigt

¹¹Bei höheren Änderungsraten der Magnetfeldstärke ist eine signifikante Probenerwärmung durch induzierte (Wirbel-)Ströme zu beobachten.

7. Probencharakterisierung

sich in beiden Fällen eine gute Übereinstimmung mit den in Gleichung 7.15 berechneten Werten. Mit der effektiven Elektronenmasse¹² in GaAs von $m^* = 0,067 \cdot m_e$ und den zuvor ermittelten spezifischen Flächenwiderständen (siehe Gl. 7.3) lassen sich weitere charakteristische Größen ableiten:

$$\text{Fermigeschwindigkeit: } v_F = \frac{\hbar\sqrt{2\pi n_s}}{m^*} = \begin{cases} \text{unbel.: } 1,74(\pm 0,01) \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{bel.: } 2,16(\pm 0,01) \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (7.17)$$

$$\text{Fermiwellenlänge: } \lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}} = \begin{cases} \text{unbel.: } 62,3(\pm 0,4) \text{ nm} \\ \text{bel.: } 50,3(\pm 0,3) \text{ nm} \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\text{Beweglichkeit: } \mu = \frac{1}{en_s R_{\square}} = \begin{cases} \text{unbel.: } 71,4(\pm 1,1) \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \\ \text{bel.: } 89,3(\pm 1,9) \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \end{cases} \quad (7.19)$$

$$\text{Mittl. freie Weglänge: } l_m = \frac{\mu\hbar\sqrt{2\pi n_s}}{e} = \begin{cases} \text{unbel.: } 4,74(\pm 0,05) \mu\text{m} \\ \text{bel.: } 7,35(\pm 0,14) \mu\text{m} \end{cases} \quad (7.20)$$

Für die Berechnung der Unsicherheiten wurde eine Genauigkeit der 2DEG–Widerstände von $\pm 0,5 \Omega$ angenommen. Die mittleren freien Weglängen sind bei der verwendeten Heterostruktur somit deutlich größer als die typischen Abmessungen der hergestellten Nanostrukturen ($\leq 1,5 \mu\text{m}$). Es kann daher grundsätzlich von einem ballistischen Transport ausgegangen werden.

7.3.1. Vergleich mit Herstellerangaben

Das aus dem *Cavendish Laboratory* der *University of Cambridge* stammende Halbleitermaterial wurde bereits durch den Hersteller vorcharakterisiert. Die bei einer Temperatur von 1,5 K gemessenen Ladungsträgerdichten sind im beigelegten Herstellungsprotokoll¹³ mit $1,81 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ (unbeleuchtet) und $3,39 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ (beleuchtet) angegeben. Dies entspricht in etwa 110% bzw. 136% des selbst ermittelten Werts. Die nominelle Beweglichkeit liegt mit $135 \text{ m}^2/\text{Vs}$ (unbeleuchtet) bzw. $258 \text{ m}^2/\text{Vs}$ hingegen deutlich über den in Gleichung 7.19 berechneten Größen. Eine Ursache für die signifikanten Abweichungen könnte in einer möglichen Degradation der Heterostruktur bei der Probenherstellung liegen. So führen unter Umständen bereits feine Risse innerhalb der Mesa zu einer signifikanten Vergrößerung des Flächenwiderstandes durch das 2DEG (siehe Abschnitt 7.2.1).

¹²ADACHI, „GaAs, AlAs, and AlxGa1-xAs: Material parameters for use in research and device applications“.

¹³*Manufacturing Protocol*.

8. Messungen

Mit Hilfe eines sogenannten *Trenngates* TG kann die Mesa durch Verarmung des darunterliegenden 2DEGS in zwei galvanisch voneinander separierte Bereiche unterteilt werden. Im unteren Segment ermöglichen fünf Fingergates die Definition eines seriellen Doppeldot-Systems. Die hellgrau markierten Quantenpunktkontakte mit kleinem Abstand zum Trenngate KL , KM und KR dienen dabei primär zur Steuerung der Kopplung an die jeweiligen Reservoirs bzw. zwischen den Einzeldots. Mittels der beiden zentral angeordneten Gates GL und GR können die Potentiale der Quantenpunkte variiert und damit deren Größe bzw. Ladungszahl modifiziert werden. Bei der untersuchten Struktur beträgt der Abstand zwischen den äußeren QPCs ca. $1,5 \mu\text{m}$ (siehe auch Abb. 3.10). Auf der gegenüberliegenden Seite des Trenngates befinden sich zwei weitere Quantenpunktkontakte SL und SR , welche als Sensoren zur Detektion von Ladungsänderungen auf den Dots eingesetzt werden.

Wie in Abbildung 8.2 illustriert, sind beide Strukturseiten in Relation zur Symmetrieachse geometrisch verkippt, was mehrere Vorteile mit sich bringt. Der dabei entstehende Höcker im Trenngate verhindert ein direktes, ballistisches Tunneln von Elektronen durch beide Sensoren und erlaubt damit eine unabhängige Messung beider QPC-Leitwerte. Mit zunehmendem Kippwinkel vergrößert sich der Abstand zwischen den zwei Ladungssensoren bei konstant gehaltener Entfernung zum zugehörigen Quantenpunkt. Dies bewirkt einen geringeren Störeinfluss durch Gatepotentialänderungen auf den Leitwert des jeweils anderen Sensors. Gleichzeitig nimmt die Empfindlichkeit der Sensoren für eine Ladungsänderung des weiter entfernten Dots aufgrund der vergrößerten Distanz ab.

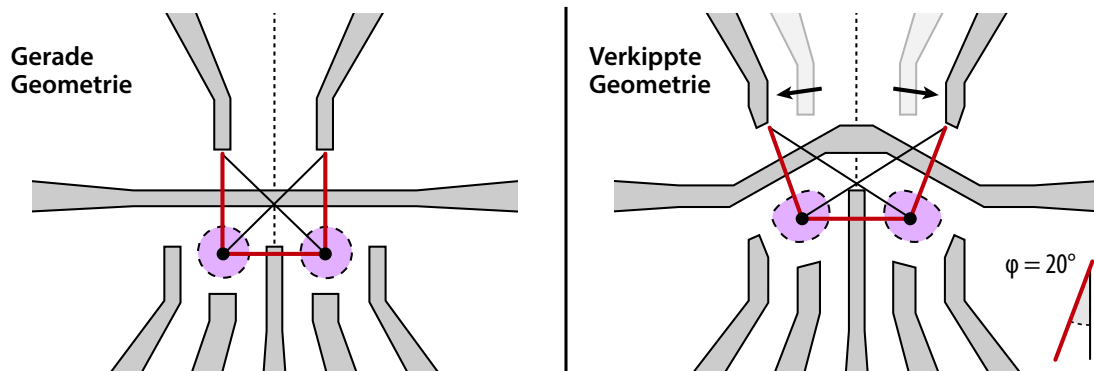


Abb. 8.2.: Verkipfung der Doppeldotgeometrie bei konstant gehaltenen Abständen zwischen Quantenpunkt und jeweiligem Ladungssensor

Eine direkte Messung des Ladungstransports durch das Doppeldotssystem kann aufgrund der Mesageometrie nur in einer Zweipunkt-Anordnung erfolgen. Ein „schlechter“ ohmscher Kontakt 6 oder 13 bedeutet aufgrund der fehlenden Redundanz dieses Strukturdesigns daher zwangsläufig einen Defekt der Probe. Sensorseitig sind hingegen unabhängige Leitwertmessungen in Vierpunkt-Anordnung möglich.

8.1. QPC–Kennlinien

Abbildung 8.3 zeigt eine Übersicht der aufgenommenen Leitwertkennlinien aller Quantenpunktkontakte. Sämtliche Messungen wurden dabei in Zweipunkt–Anordnung mit einer angelegten Wechselspannung von $U_{\text{osc}} = 100 \mu\text{V}$ aufgenommen. Zur Bestimmung des Abschnürpotentials am Trenngate (oben links) erfolgte der Stromfluss diagonal über die Kontaktkonfiguration 3–13. Die restlichen Top–Gates wurden jeweils gegen das geschlossene Trenngate gefahren, welches für die nachfolgenden Untersuchungen auf einem konstanten Potential von $-0,28 \text{ V}$ gehalten wurde.

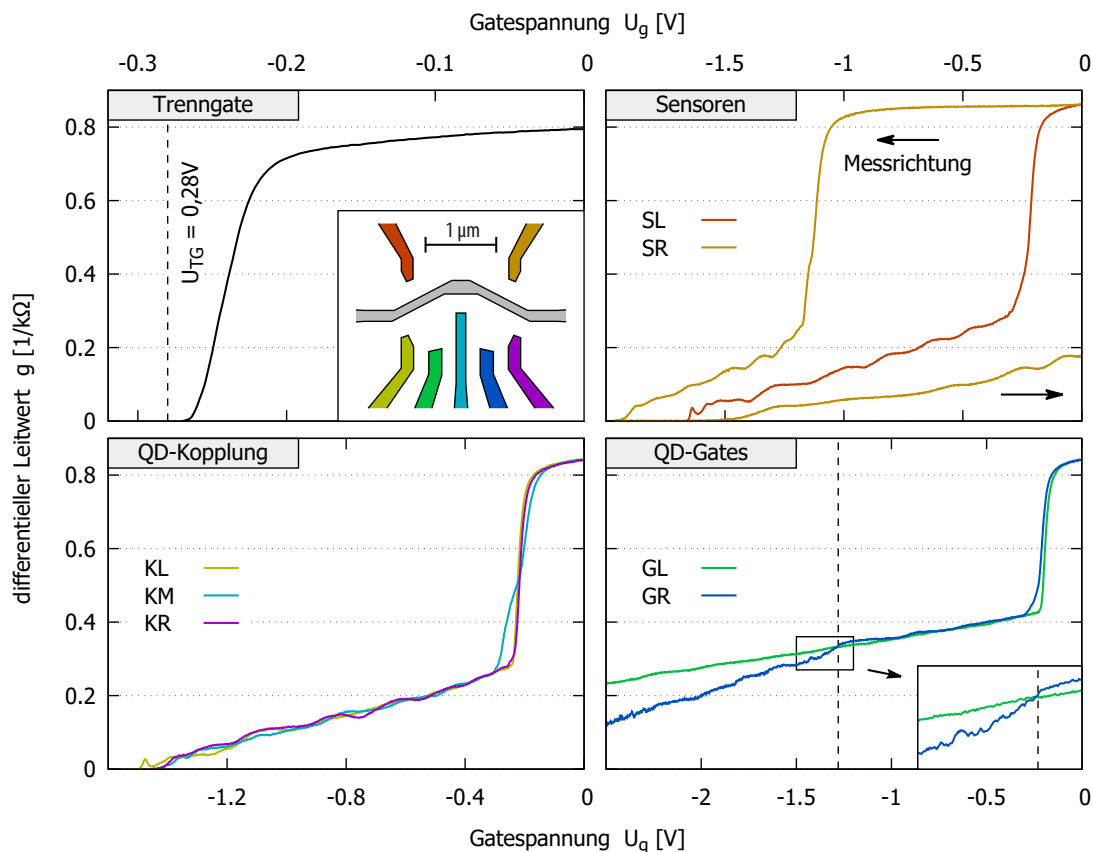


Abb. 8.3.: Lineare QPC–Leitwertkennlinien von Probe *V815–A3a* bei einem Trenngate–Potential von $U_{\text{TG}} = -0,28 \text{ V}$

Mit Ausnahme des rechten Sensors *SR* zeigen sämtliche Kennlinien eine ausgeprägte Definitionsstufe zwischen $-0,2$ und $-0,3 \text{ V}$, an welcher der Leitwert signifikant abfällt. Aufgrund des Abstands der Gateebene zum 2DEG werden zunächst nur die Ladungsträger im Bereich großer Strukturbreiten vollständig verdrängt¹. Mit sinkendem Potential breitet

¹Dies betrifft vor allem den (noch) großflächigen Übergangsbereich zur Nanostruktur, ab welchem die Strukturbreite in Richtung Probenzentrum kontinuierlich abnimmt

8. Messungen

sich der Rand der Verarmungszone immer weiter in Richtung der schmalen Gatespitze aus, bis schließlich das komplette Areal unter der metallisierten Struktur ladungsfrei und demnach nicht mehr elektrisch leitfähig ist. Im Falle des durchgehenden Trenngates bedeutet dies eine Teilung der Mesa in zwei voneinander isolierte Segmente. Eine weitere Absenkung des Potentials bewirkt schließlich eine annähernd gleichmäßige Ausdehnung der Verarmungszone.

Die Koppel-Gates des Doppeldot-Systems (Abb. 8.3 unten links) zeigen aufgrund ihres jeweils gleichen Abstands zum Trenngate eine sehr ähnliche Charakteristik. Hinter der Definitionsstufe zeigt sich die für Quantenpunkte typische Leitwertquantisierung, wenngleich die erwartete Stufenform teilweise nur schwach ausgeprägt ist und zudem von schwachen Oszillationen überlagert wird. Dies trifft insbesondere auf die erste Leitwertstufe zu, welche im Bereich des sogenannten *Pinch-Offs* (Abschnürpotentials) häufig einen markanten Peak aufweist. Dies ist möglicherweise auf Reflexionen, bedingt durch die verwinkelte Trenngategeometrie zurückzuführen, welche im Hinblick auf eine optimale Positionierung der Sensor-QPCs konzipiert wurde. Eine weitere Ursache könnten durch lokale Störstellen im Kanalbereich gegeben sein.

Mit einem Abstand von ca. 650 nm zum Trenngate, schließen die Centergates der Quantenpunkte *GL* und *GR* deutlich langsamer. Zur Prävention von elektrischen Überschlüssen zwischen den eng beieinanderliegenden Strukturen wurde die maximal angelegte Spannung zunächst auf $-2,5$ V begrenzt. Dies reicht nicht aus, um die betreffenden Gates vollständig abzuschließen (Abb. 8.3 unten rechts). Auffällig ist dabei vor allem das Verhalten des rechten Quantenpunktkontakts, welches in mehreren aufeinanderfolgenden Messungen reproduziert werden konnte. Während die Leitwertcharakteristik bis ca. $-1,3$ V mit der seines Pendants weitgehend übereinstimmt, schließt das Gate bei niedrigeren Spannungen hingegen unvermittelt schneller. Dies äußert sich in einem deutlichen Abknicken der Kennlinie und geht einher mit einer signifikanten Zunahme der gemessenen Rauschamplitude (siehe Inset).

Zum Vergleich werden jeweils für beide Sweep-Richtungen des Gatepotentials Kennlinien aufgenommen. Dabei zeigt sich beim Leitwert des rechten Sensors *SR* eine extreme Hysterese (oben rechts). Während beim Schließen des Quantenpunktkontakts die Definitionsstufe erst ungewöhnlich spät beobachtet wird, tritt diese beim anschließenden Öffnen überhaupt nicht mehr in Erscheinung. Wird die Gatespannung nach einer Änderung festgehalten, so zeigt sich in der Folge ein anhaltender Drift im Leitwert. Das Potential im Bereich der Nanostruktur scheint demnach der angeschlossenen Quelle nicht instantan zu folgen, sondern nähert sich stattdessen langsam einem Gleichgewichtszustand an. Dieses Verhalten ist typisch für einen Kontaktbruch des Gates im Übergangsbereich zur Nanostruktur² (siehe Abschnitt 3.2.5). Die träge Reaktion des QPCs macht diesen für weitere Untersuchungen – insbesondere aktive Sensormessungen – unbrauchbar. *SR* wird daher im Folgenden stets auf Massepotential gelegt.

²Waferstück *V815-A3* wurde nach alter Rezeptur mit kombinierter Maske für Bondpads und innere Zuleitungen prozessiert. Die Topographie der Gatestruktur begünstigt die Entstehung von Rissen.

8.2. Leitwertmessungen an Quantenpunkten

Mit Hilfe der Gates KL , KM und GL wird zunächst auf der linken Strukturseite ein einzelner Quantenpunkt definiert, welcher sich für eine spätere spektroskopische Untersuchung mittels Ladungssensor eignet. Die Suche nach einer optimalen Konfiguration mit ausgeprägten Coulomb-Blockade-Oszillationen erfolgt dabei nach einem Rasterverfahren. Hierbei werden die Potentiale der Kopplungs-QPCs zu den Reservoirs im Bereich ihrer ersten Leitwertstufe schrittweise variiert und jeweils eine Dot-Kennlinie $g(U_{GL})$ aufgenommen. Abbildung 8.4 zeigt im oberen Bereich eine Auswahl der gemessenen Leitwertverläufe. Diese sind entsprechend ihrer zugeordneten Kopplungspotentiale farbkodiert (siehe Inset).

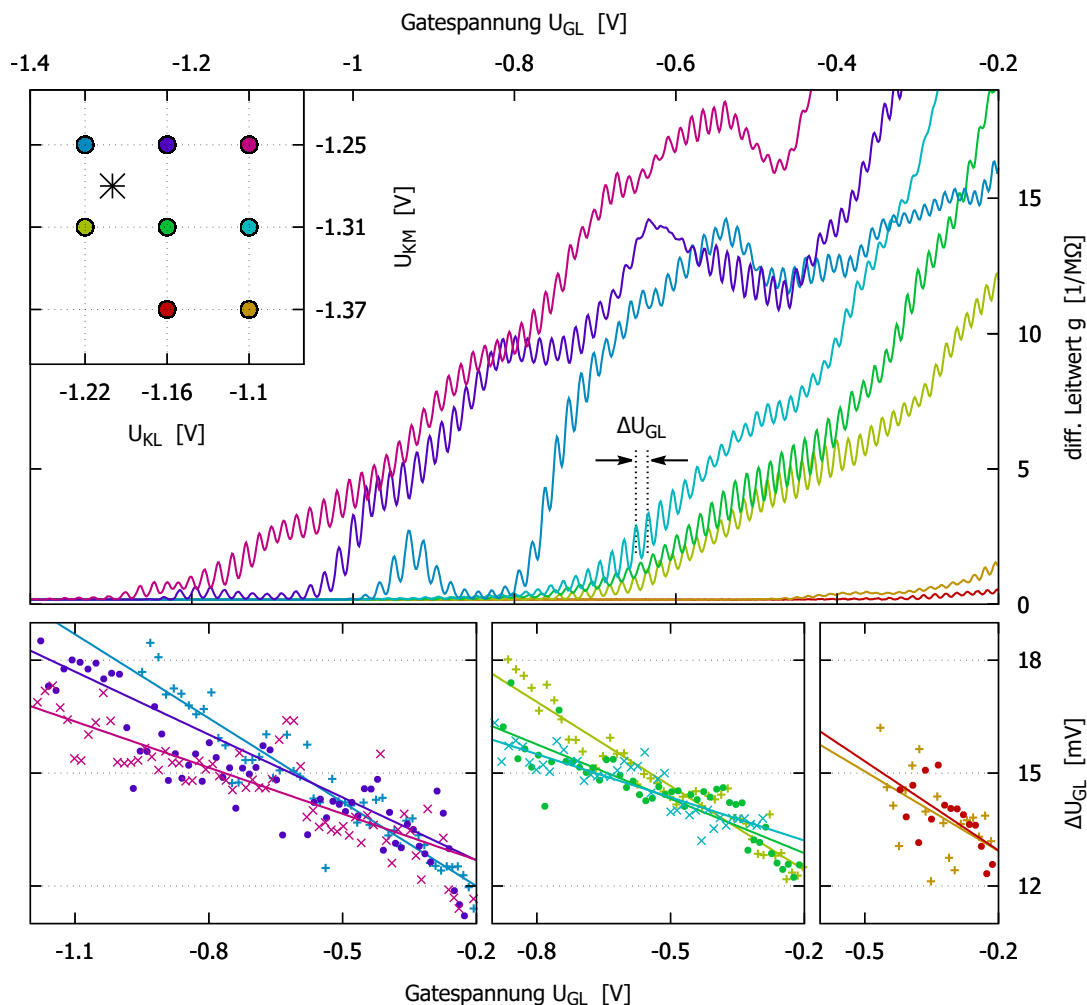


Abb. 8.4.: *Oben:* Coulomb-Blockade-Oszillationen im Leitwert (linker Quantenpunkt) bei unterschiedlicher Kopplung an die Reservoirs, *unten:* Oszillationsperiode in Abhängigkeit der Gatespannung

Für eine nichtlineare Untersuchung des Dots eignen sich vor allem stabile Konfigurationen, in welchen der Leitwert nach dem Absinken auf die Basislinie noch möglichst viele, ausgeprägte Peaks aufweist. Dies ist jedoch nur in einem verhältnismäßig kleinen Parameterbereich gegeben. Bei zu starker Kopplung des Quantenpunkts an ein Reservoir verschwinden die Coulomb-Blockade-Oszillationen infolge zunehmender Ladungsfluktuationen. Hingegen bewirken zu weit geschlossene QPCs ein Abfallen der Ströme unter den gemessenen Rauschwert. Zu beachten gilt weiterhin, dass sich die Leitwerte der einzelnen Gates durch Superposition der jeweiligen Potentiale gegenseitig beeinflussen. Demnach bewirkt eine Absenkung des Gatepotentials U_{GL} ein zusätzliches Abschnüren der benachbarten QPCs und somit eine Verschlechterung der Reservoiranbindung.

Im unteren Bereich von Abbildung 8.4 ist der Abstand zwischen benachbarten Leitwertpeaks dargestellt. Zudem wurde für jeden Datensatz eine lineare Ausgleichsgerade berechnet. Die Auswertung erfolgte durch Anfitzen der einzelnen CB-Peaks mit Hilfe der Datenanalyse-Software *OriginPro 2016* von *OriginLab*. Dabei zeigt sich mit abnehmendem Gatepotential für alle Konfigurationen tendenziell eine Vergrößerung der Oszillationsperiode. Dies ist gleichbedeutend mit einer Abnahme der Gatekapazität $C_{GL} = e/\Delta U_{GL}$ und kann als Folge des zunehmenden Abstands zwischen dem kleiner werdenden Quantenpunkt und dem Steuergate *GL* gesehen werden. Letzteres „drückt“ den Ladungsschwerpunkt des Dots bei einer Potentialabsenkung in Richtung Trenngate. Ein Vergleich zwischen den unterschiedlichen Konfigurationen zeigt darüber hinaus einen deutlichen Einfluss der Koppelgates auf die Ausdehnung des Quantenpunkts. Diese fungieren zusätzlich als seitliche Begrenzungen der Ladungsinsel und definieren damit maßgeblich deren Breite.

8.2.1. Nichtlineare Messung

Für die nachfolgenden Untersuchungen wurden die Potentiale der Kopplungs-QPCs auf $U_{KL} = -1,20$ V bzw. $U_{KM} = -1,28$ V festgelegt. (siehe Kreuzmarkierung in Abb. 8.4, oben links). Abbildung 8.5 zeigt den nichtlinear gemessenen Leitwert des linken Quantenpunkts im Bereich der ersten ausgeprägten Coulomb-Blockade-Peaks. Das Anlegen der Source-Drain-Spannung erfolgte gemäß Abbildung 6.14 asymmetrisch durch Erden jeweils eines Kontaktes über den Transimpedanzverstärker. Zur späteren Bestimmung aller Koppelkapazitäten wurden beide möglichen Konfigurationen vermessen. Deutlich zu erkennen ist die typische Rautenstruktur der Coulomb-Blockade-Regionen. Die eingezeichneten roten Konturlinien helfen dabei, die Steigungen der Begrenzungsgeraden möglichst exakt zu bestimmen. Im linken Kennlinienfeld sind bei den Centergatespannungen $-0,939$ V und $-1,046$ V Sprünge im Leitwert auszumachen. Diese deuten jeweils auf eine Umkonfiguration³ der Probe hin und sind im Kennlinienfeld grün markiert. Die Auswertung erfolgt ausschließlich im stabilen zentralen Bereich.

³Dies kann beispielsweise durch Umladung einer Störstelle verursacht werden

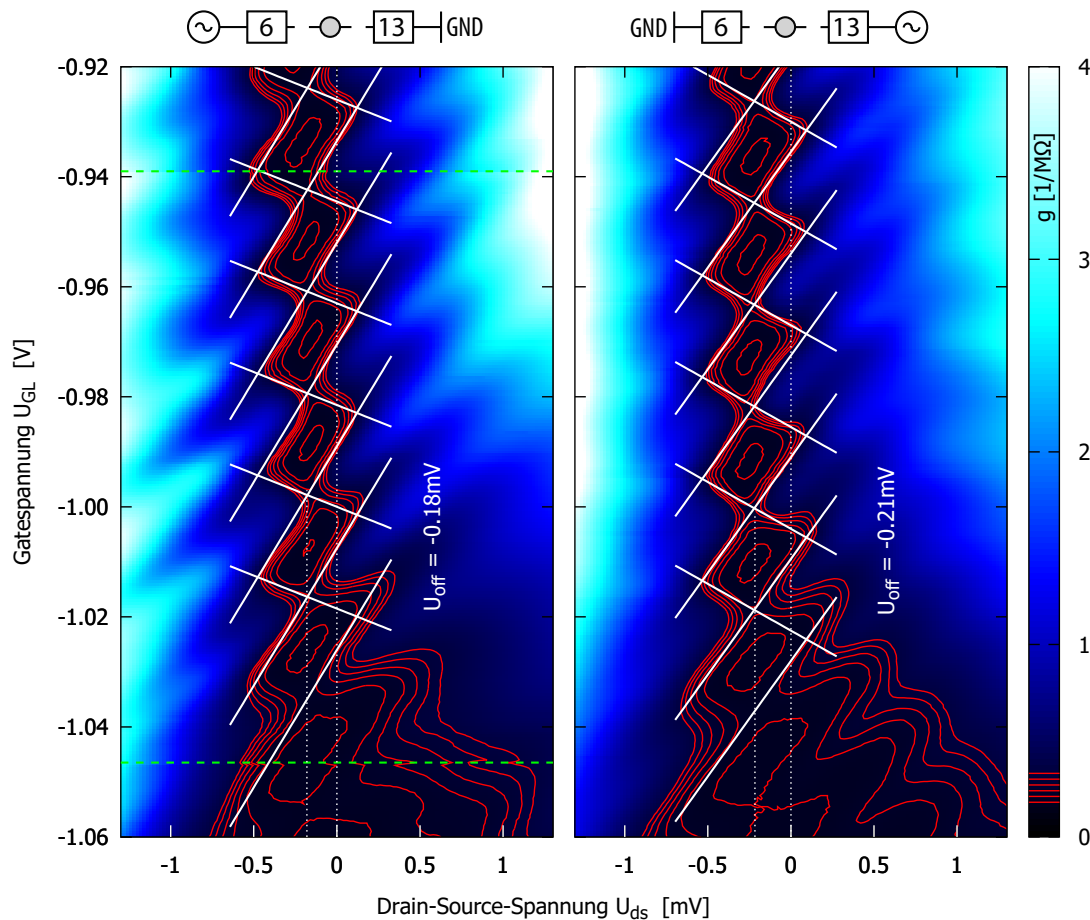


Abb. 8.5.: Nichtlineare Leitwertmessung des linken Quantenpunkts von Probe *V815-A3a* für unterschiedliche Source–Drain–Konfigurationen

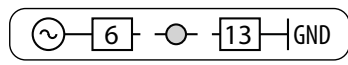
Es zeigt sich ein Offset der grafisch bestimmten Rautenzentren zur 0 V–Linie der Drain–Source–Spannung von $U_{\text{off}} \approx -0,18$ V bzw. $-0,21$ V. Dieses Phänomen trat bereits bei der nichtlinearen Messung der ohmschen Kontaktwiderstände (siehe Abschnitt 7.2) in Erscheinung. Die beobachtete Verschiebung konnte durch Folgeuntersuchungen schließlich auf eine nicht korrekt abgegliche virtuelle Masse am Stromeingang des verwendeten Transimpedanzverstärkers zurückgeführt werden.

Bestimmung der Koppelkapazitäten

Im Weiteren wird die Koppelkapazität zum ohmschem Kontakt 13 stets mit dem Index „s“ (Source) und die zu Kontakt 6 mit „d“ (Drain) bezeichnet. Diese Nomenklatur definiert die Standardkonfiguration und wird auch bei vertauschten Reservoiranschlüssen beibe-

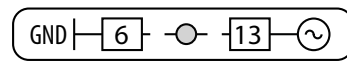
8. Messungen

halten. Aus den Messdaten in Abbildung 8.5 lassen sich jeweils folgende Steigungen der Rautenränder extrahieren:



$$\left. \frac{dU_g^+}{dU_{ds}} \right|_{13} = +50 (\pm 10)$$

$$\left. \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right|_{13} = -12 (\pm 2)$$



$$\left. \frac{dU_g^+}{dU_{ds}} \right|_6 = +42 (\pm 8) \quad (8.1)$$

$$\left. \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right|_6 = -18 (\pm 4) \quad (8.2)$$

Mit den in beiden Fällen identischen Abständen der Kreuzungspunkte können schließlich die Kapazitäten des definierten Quantenpunkts gemäß Gleichung 2.19 und 2.20 bestimmt werden:

$$\Delta U_g = 18,0 (\pm 0,5) \text{ mV} \quad (8.3)$$

$$C_g = \frac{e}{\Delta U_g} = 8,9 (\pm 0,2) \text{ aF} \quad (8.4)$$

$$C_s = -C_g \cdot \left. \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right|_{13} = 107 (\pm 20) \text{ aF} \quad \left| \quad C_d = -C_g \cdot \left. \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right|_6 = 160 (\pm 39) \text{ aF} \quad (8.5)$$

Weiter lassen sich damit nun jeweils der Konvertierungsfaktor α , sowie die Gesamtkapazität des Dots berechnen:

$$\alpha = \left[\frac{dU_g^+}{dU_{ds}} - \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right]^{-1} = 0,016 (\pm 0,003) \Big|_{13} \quad (8.6)$$

$$= 0,017 (\pm 0,003) \Big|_6$$

$$C_\Sigma = \frac{C_g}{\alpha} = 556 (\pm 104) \text{ aF} \Big|_{13} \quad (8.7)$$

$$= 524 (\pm 92) \text{ aF} \Big|_6$$

Im Vergleich zu den von D. Schefzyk untersuchten Nanostrukturen⁴ ergibt sich eine um den Faktor 2–3 größere Gatekapazität und ein ca. doppelt so großer Konvertierungsfaktor α . Dies kann unter anderem auf deutlich breitere Centergateelektroden bei ansonsten ähnlichen Abmessungen der Quantenpunkte zurückgeführt werden.

⁴SCHEFZYK, „Quantenbauelemente als aktive Sensoren zur Ladungsbestimmung in elektronischen Nanostrukturen“.

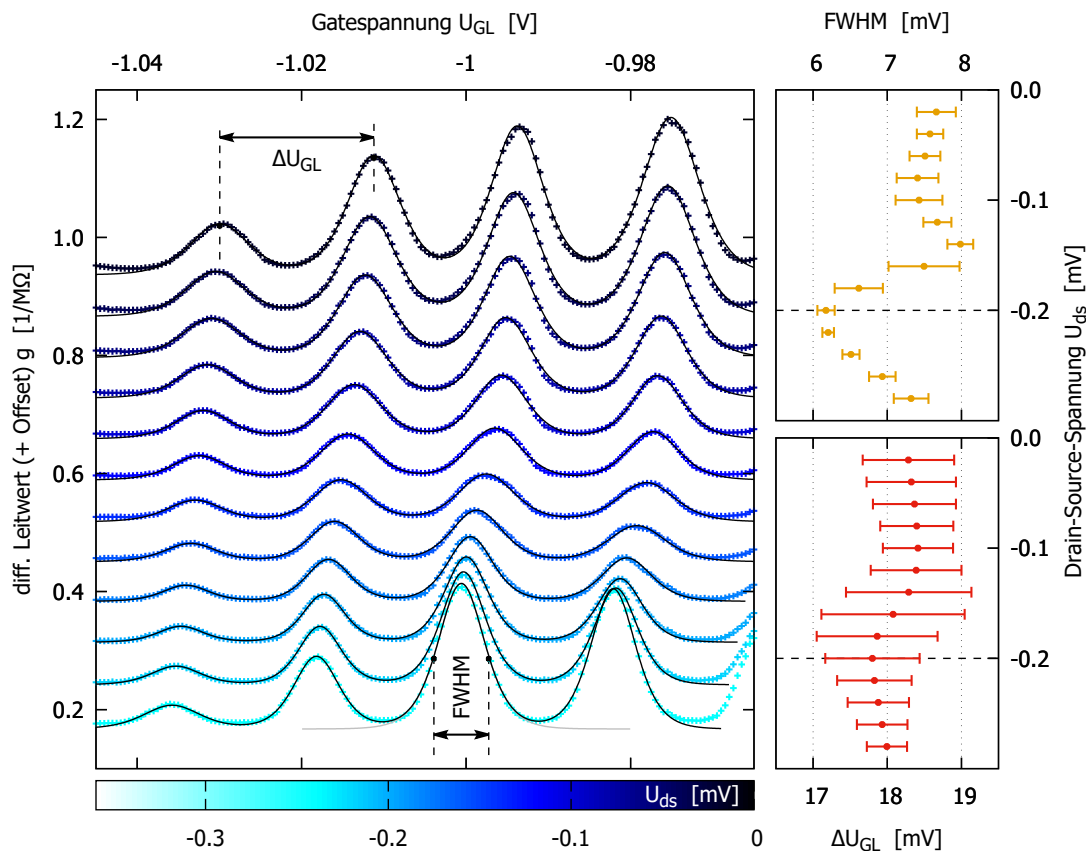


Abb. 8.6.: Links: Coulomb-Blockade-Oszillationen bei Variation der Drain-Source-Spannung (dc), rechts: Halbwertsbreiten und Abstände der angefitzten Peaks

Abbildung 8.6 zeigt die ersten vier signifikanten Coulomb-Blockade-Oszillationen für unterschiedliche Drain-Source-Gleichspannungsanteile (K_{13} auf Massepotential). Dabei handelt es sich um senkrechte Schnitte durch das in Abbildung 8.5 links dargestellte Kennlinienfeld. Zur Analyse des Messsignals sind Multipeakfunktionen an die einzelnen Kurven angefitzt. Als Ansatz wurde hierzu eine Superposition einzelner, rein thermisch verbreiterter CB-Peaks gemäß Gleichung 2.17 bzw. 2.18 gewählt.

$$g(U_{GL}) = \sum_i \frac{a_i}{\cosh^2[b_i(U_{GL} - U_{GL,i})]} \quad (8.8)$$

Die Parameter U_i und a_i definieren hierbei Position und Höhe der einzelnen Peaks. Die jeweiligen Halbwertsbreiten sind gegeben durch:

$$\Delta U_i^{\text{FWHM}} = \frac{2 \cdot \text{arcosh} \sqrt{2}}{b_i} \quad (8.9)$$

Zur genaueren Untersuchung des dc-Offsets wurden jeweils die gemittelten Halbwertsbreiten und relativen Abstände der Leitwertpeaks gegen U_{ds} aufgetragen⁵. Dabei zeigt sich,

⁵ausgewertet wurden hierfür die Peaks 2-4 (von links)

dass die Verbreiterung bei einer Drain–Source–Spannung von ca. $-0,2$ mV ein Minimum annimmt. Dies entspricht im Rahmen der Messauflösung dem zuvor grafisch ermittelten Versatz der CB–Rautenzentren (siehe Abbildung 8.5). Folglich unterliegen die vermeintlich linearen Leitwertmessungen einem zusätzlichen, Offset–bedingten Verbreiterungsmechanismus. Dieser Effekt kann beispielsweise durch Addition einer entgegengerichteten Gleichspannung kompensiert werden. Erwartungsgemäß zeigen die Peakabstände im betrachteten Regime keine signifikante Abhängigkeit von U_{ds} . Die dargestellten Fehlerbalken ergeben sich aus den ermittelten Unsicherheiten für die Fitparameter, sowie der Mittelung über mehrere Peaks.

Bestimmung der Elektronentemperatur

Unter Annahme eines metallischen Coulomb–Blockade–Regimes kann über Gleichung 2.17 die Elektronentemperatur T_e aus den Halbwertsbreiten der Leitwertpeaks berechnet werden. Mit dem zuvor bestimmten, gemittelten Konvertierungsfaktor α folgt für den Fall einer kompensierten U_{ds} –Offsetspannung:

$$T_e \simeq \frac{e}{5k_B \operatorname{arcosh} \sqrt{2}} \cdot \alpha \Delta U^{\text{FWHM}} = 272 (\pm 50) \text{ mK} \quad (8.10)$$

Diese Temperatur liegt ca. $150 - 200$ mK über dem Messwert des in unmittelbarer Probenfläche positionierten RuO_2 –Widerstandsthermometers (siehe Abschnitt 6.1.3), was auf mehrere Ursachen zurückgeführt werden kann:

Hochfrequentes Rauschen: Über die Messleitungen können Störsignale aus der Umgebung in das System eingekoppelt werden. Die Dissipation der damit verbundenen elektrischen Energie im Bereich der hochohmigen Nanostruktur bedeutet letztlich einen lokalen Wärmeeintrag. Die tatsächliche Proben­temperatur kann somit über dem Thermometerwert liegen. Durch den Einsatz entsprechender Tiefpassfilter⁶ lässt sich der Rauschanteil dämpfen.

Nicht–thermische Verbreiterung: Die angesetzte Fitfunktion berücksichtigt lediglich die thermisch bedingte Verschmierung der Leitwertpeaks. Eine weitere Störquelle stellt beispielsweise das Wech­selspannungssignal der Lock–In–Messung dar, welches eine periodische Modulation des Quanten­punkt­potentials und somit eine zusätzliche Verbreiterung bewirkt (siehe Abschnitt 8.4.2). Die aus der Peak–Halbwertsbreite berechnete Elektronentemperatur ist demnach potentiell fehlerbehaftet.

⁶BLADH u. a., „Comparison of cryogenic filters for use in single electronics experiments“.

8.3. Charakterisierung des Sensor-QPCs

8.3.1. Prinzip einer Elektrometermessung

Die im vorigen Abschnitt präsentierten Transportmessungen zeigen, dass mit sinkendem Gatepotential die Ausprägung der Coulomb-Blockade-Peaks immer weiter abnimmt, bis diese schließlich komplett im Grundrauschen des Messsignals verschwinden. Dies kann mit der bereits diskutierten, sukzessiven Verschlechterung der Reservoirankopplung erklärt werden, welche ein Abfallen des Stroms unter die Nachweisgrenze bewirkt. Eine Aussage über die zu diesem Zeitpunkt verbleibende Zahl von Elektronen auf dem Dot ist dabei nicht möglich. Eine spektroskopische Untersuchung des Quantenpunkts im Regime weniger Ladungsträger kann jedoch mittels einer indirekten Elektrometermessung erfolgen. Das hierbei zu Grunde liegende Messprinzip basiert auf der Leitwertänderung eines auf der gegenüberliegenden Trenngateseite positionierten QPCs bei einer Umladung des zu vermessenden Dots. Abhängig von der Ansteuerung des Sensors unterscheidet man zwischen:

Passive Sensormessung: Der Sensor-QPC wird auf einem festen Potential gehalten und dessen Leitwert als Messsignal detektiert. Der zur Verfügung stehende Messbereich ist abhängig vom gewählten Bias-Punkt durch die in beide Richtungen jeweils nächstliegenden Leitwertstufen begrenzt. Im Übergangsbereich zu den Plateaus ist die Sensorempfindlichkeit aufgrund der abnehmenden Kennliniensteilheit entsprechend reduziert.

Aktive Sensormessung: Durch eine Variation des Sensorpotentials wird der QPC-Leitwert konstant gehalten. Als Messsignal dient die hierfür erforderliche Spannungsänderung ΔU . Die kontinuierliche Regelung des Arbeitspunktes bewirkt eine quasi beliebige Ausdehnung des Messbereiches bei nahezu unveränderter Empfindlichkeit. Jedoch bedeutet die Nachführung des Potentials aufgrund der kapazitiven Kopplung zum Dot eine direkte Beeinflussung bzw. Störung des zu vermessenden Systems.

Basierend auf dem von D. Schefzyk⁷ angewandten Verfahren wird im Folgenden zunächst die gegenseitige Wechselwirkung zwischen Ladungsdetektor und Quantenpunkt untersucht und dabei der Sensor-QPC charakterisiert. Dies ermöglicht bei der späteren Datenauswertung eine mathematische Kompensation des induzierten Fehlers und erleichtert darüber hinaus die Wahl eines geeigneten Bias-Punkts auf der Leitwertkennlinie.

⁷SCHFZYK, „Quantenbauelemente als aktive Sensoren zur Ladungsbestimmung in elektronischen Nanostrukturen“.

8.3.2. Wechselwirkung zwischen Sensor und Quantenpunkt

Die bestehende Konfiguration wird um eine Vierpunkt-Leitwertmessung des Sensor-QPCs SL über die ohmschen Kontakte 4–18 (Drain–Source) und 1–3 (Potentialabgriff) erweitert. Die Potentiale zur Definition des gegenüberliegenden Dots bleiben dabei zunächst unverändert bei $U_{TG} = -0,28\text{ V}$, $U_{KL} = -1,20\text{ V}$ bzw. $U_{KM} = -1,28\text{ V}$. Abbildung 8.7 stellt im oberen Bereich die Abhängigkeit des Quantenpunkt-Leitwerts von den Potentialen seines Centergates U_{GL} und des Sensors U_{SL} dar. Letzteres wurde über den kompletten Kennlinienbereich von der Definitionsstufe bis zum Pinch-Off variiert. Beim Schließen des Sensor-QPCs zeigt sich eine Verschiebung der beobachteten Coulomb-Blockade-Peaks in Richtung höherer Gatespannungen U_{GL} . Dies kann durch eine Modifikation des elektrischen Dotpotentials $\Delta\varphi$ durch den kapazitiv gekoppelten Sensor erklärt werden, welcher als zusätzliches Gate fungiert:

$$\Delta\varphi \propto -eU_{SL} \frac{C_{SL}}{C_{\Sigma}} \quad (8.11)$$

Im unteren Abbildungsbereich ist die sogenannte *Transkonduktanz* $\partial g_{\text{Sen}}/\partial U_{GL}$ des Sensors dargestellt, welche die lokale Steilheit des Kennlinienverlaufs widerspiegelt. Hierbei zeigt sich eine deutliche Korrelation zwischen den Coulomb-Blockade-Peaks in der Leitwertmessung und Sprüngen im Sensorleitwert. Die Deckungsgleichheit der jeweiligen Positionen wird exemplarisch anhand zweier angefitteter Kurvenverläufe illustriert. Als passiver Sensor erlaubt der Quantenpunktkontakt dabei die Detektion von Ladungsänderungen selbst in den Bereichen, in welchen kein Nachweis über eine direkte Leitwertmessung mehr möglich ist. Der Farbkontrast kann in der gewählten Darstellung als Maß für die Sensorempfindlichkeit interpretiert werden und zeigt eine starke Abhängigkeit vom QPC-Potential U_{SL} . Unter anderem im Bereich der Leitwertplateaus existieren aufgrund der verschwindenden Kennliniensteilheit nicht-sensitive Streifen, in welchen Umladungen nicht messtechnisch erfasst werden können.

Abbildung 8.8 enthält die aus den jeweiligen Transportmessungen extrahierten Positionen der Umladungen. Diese sind entsprechend ihrer Quelle farbig kodiert. An die Datenpunkte wurde ab einem Sensorpotential von $U_{SL} = -0,7\text{ V}$ eine quadratische Funktionsschar der Form

$$U_{GL,i} = \underbrace{a \cdot (U_{SL} - b)^2}_{= U_{GL,k}} + c_i \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a = 0,091 \pm 0,006\text{ V}^{-1} \\ b = 0,290 \pm 0,095\text{ V} \end{cases} \quad (8.12)$$

angefittet. Bei sämtlichen im Folgenden durchgeführten aktiven Sensormessungen wurde das QPC-Potential nur innerhalb des hellgrau markierten Kennlinienbereichs variiert. Bei der typischen Wahl des Bias-Punktes zwischen der ersten und zweiten Leitwertstufe⁸

⁸In Folge einer Änderung der Messverkabelung kam es im weiteren Verlauf zu einer Umkonfiguration der Probe. Dies äußerte sich unter anderem in einer Verschiebung der Sensorkennlinie in Richtung höherer Potentiale.

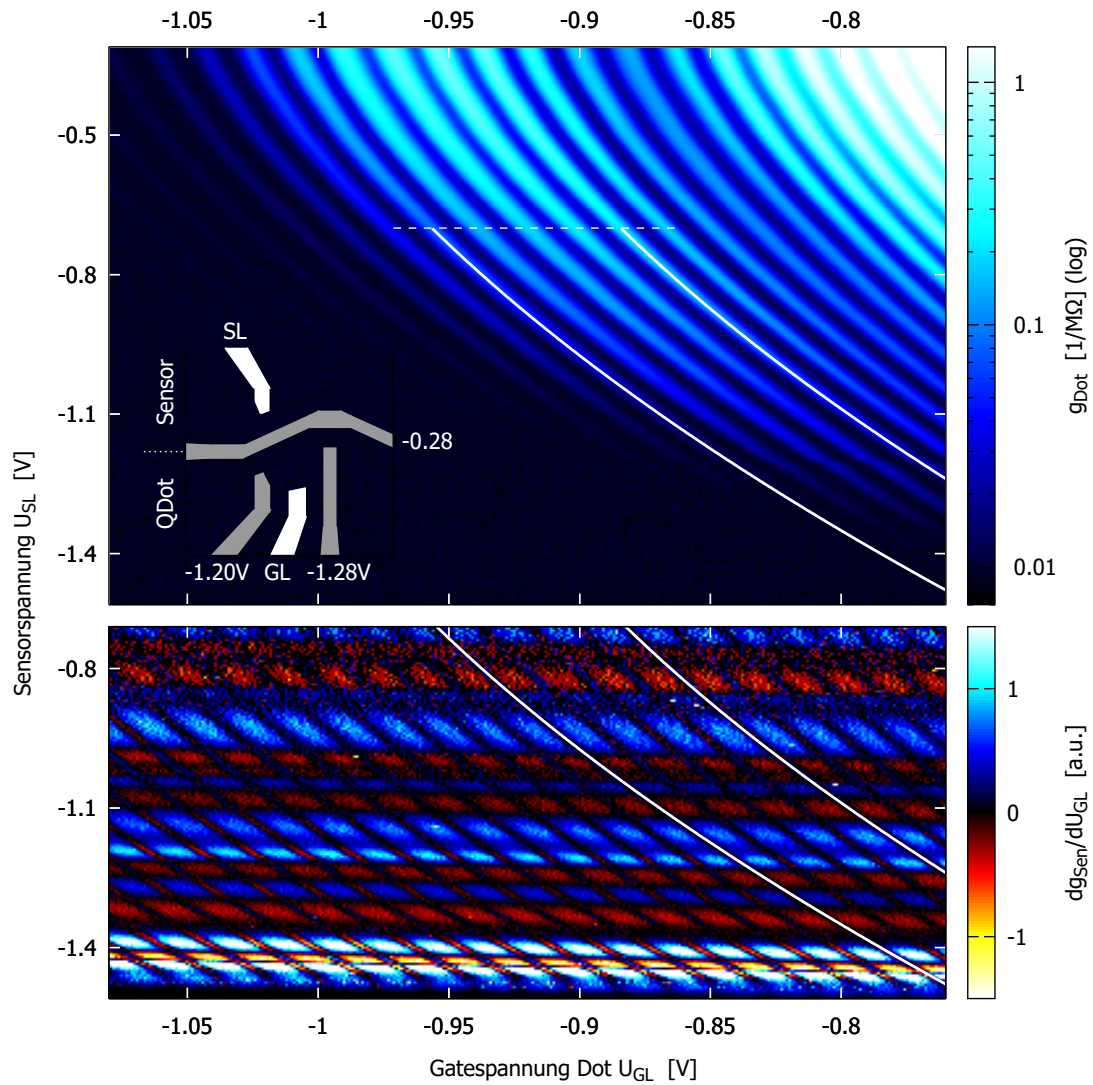


Abb. 8.7.: Einfluss des Sensorpotentials U_{SL} auf die Coulomb-Blockade-Oszillationen. *Oben:* Leitwertmessung durch den Quantenpunkt $g_{\text{Dot}}(U_{SL}, U_{GL})$, *unten:* Transkonduktanz des Sensor-QPCs $\partial g_{\text{Sen}}/\partial U_{GL}(U_{SL}, U_{GL})$.

8. Messungen

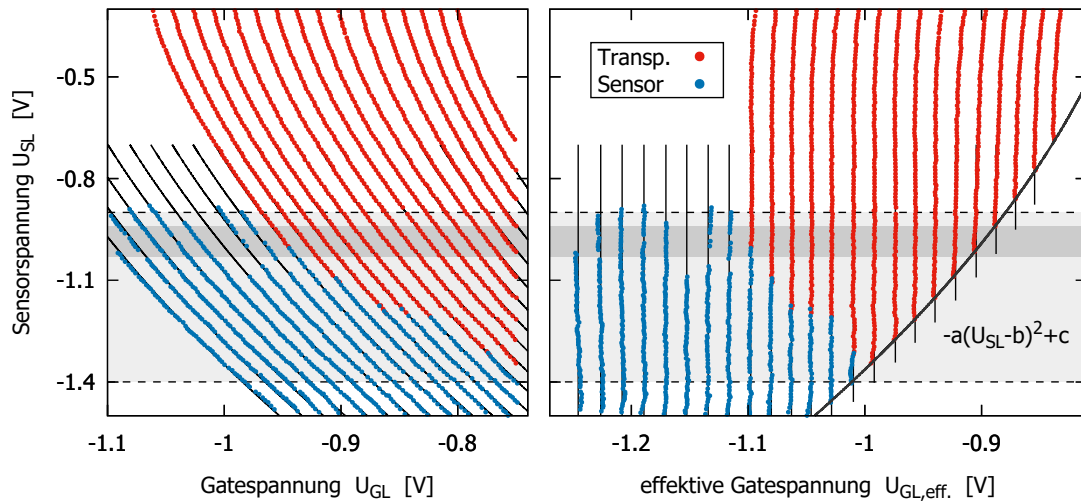


Abb. 8.8.: *Links:* Position der Coulomb-Blockade-Peaks aus Abb. 8.7 und angefittete Funktionsschar; *rechts:* Kompensation des Sensoreinflusses durch parabolische Korrektur der Gatespannung U_{GL}

reduziert sich der erforderliche Regelbereich auf das dunkelgrau eingefärbte Segment. In diesem Regime zeigt die angefittete Parabelschar eine gute Übereinstimmung mit den aufgezeichneten Rohdaten und erlaubt somit eine mathematische Kompensation des durch die Ladungsmessung induzierten Fehlers. Hierzu wird die Gatespannung $U_{GL,eff} = U_{GL} - U_{GL,k}$ nachträglich um den Störeinfluss korrigiert, woraus sich eine Darstellung der Coulomb-Blockade-Peaks unabhängig vom Sensorpotential U_{SL} ergibt (siehe Abb. 8.8 rechts).

Bei genauer Betrachtung ist eine minimale Abhängigkeit der Fitparameter a, b von der Gatespannung zu erkennen. Diese äußert sich in Form einer leichten Auffächerung der effektiven Umladungspositionen. Beim Schließen des Sensor-QPCs wird eine geringfügige Verkleinerung der Peak-Abstände beobachtet. Dies kann damit erklärt werden, dass mit sinkendem Gatepotential der Ladungsschwerpunkt des Quantenpunkts sukzessive in Richtung des Sensors verschoben wird. In der Folge verstärkt sich die Kopplung zwischen Sensor-QPC und Dot, woraufhin dieser letztlich „empfindlicher“ auf Potentialänderungen reagiert.

Abbildung 8.9 verdeutlicht dies anhand simulierter Ladungsverteilungen und Potentiale innerhalb der 2DEG-Ebene. Die Berechnung erfolgte numerisch mit Hilfe des in Kapitel 5 vorgestellten Computerprogramms. Während das Trenn- (TG) und die beiden Koppelgates (KL, KM) jeweils auf festen Potentialen liegen, wird das Sensorpotential beim Schließen des Centergates GL entsprechend erhöht. Dies berücksichtigt die Nachführung des Arbeitspunktes bei einer Ladungsmessung mit geregelterm Sensor. Die hierfür angenommene lineare Korrekturspannung $U_{SL,k} \approx -0.1 \cdot \Delta U_{GL}$ basiert auf Messdaten aktiver Elektrometermessungen. Mit der Größenänderung geht eine Deformation des

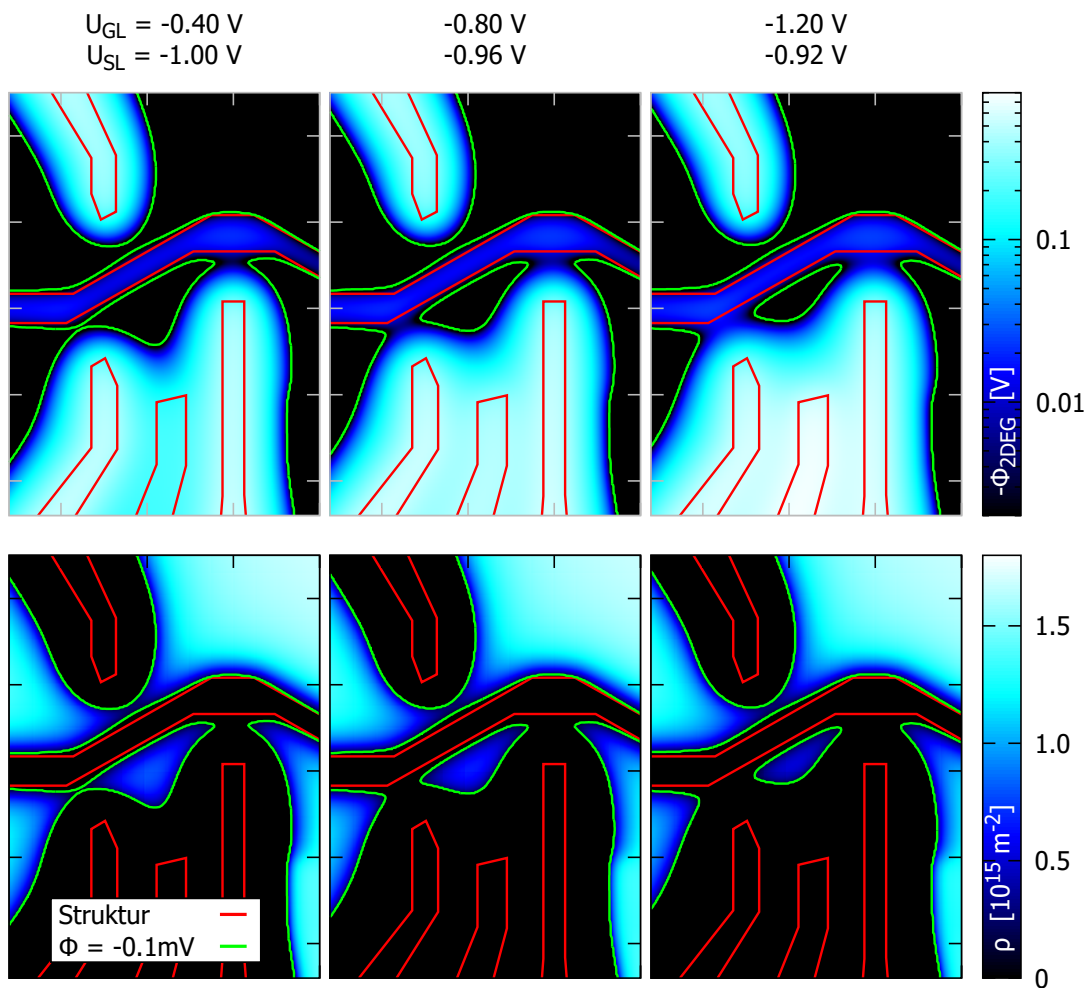


Abb. 8.9.: Simuliertes Potential und Ladungsverteilung im 2DEG beim Schließen des linken Steurgates *GL* bei aktiver Elektromessung mittels QPC-Sensor *SL*

Quantenpunkts einher, was in der Variation des Einschlusspotentials in der 2DEG-Ebene begründet liegt. Der Dot wird durch das begrenzende Centergatepotential zunehmend gestaucht und sein Zentrum zum Trenngate hin verschoben. Darüber hinaus wird die bereits diskutierte Verschlechterung der Reservoirankopplung beobachtet. Die Superposition der einzelnen Gatepotentiale führt zu einer Abschnürung der seitlichen Quantenpunktkontakte, infolgedessen die Tunnelströme durch den Dot drastisch reduziert werden. Aufgrund der kürzeren Distanz ist der Effekt am linken Kontakt sichtbar stärker, was letztlich eine Änderung des Kopplungsverhältnisses zwischen Source und Drain bedeutet.

8.3.3. Empfindlichkeit

Für die erreichbare Auflösung der Elektrometermessungen mittels Sensor-QPC ist die Wahl eines geeigneten Bias-Punktes auf der Leitwertkennlinie entscheidend. Dieser muss dabei den folgenden Anforderungen genügen:

Stabilität: Der umliegende Kennlinienabschnitt darf keinen zeitlichen Fluktuationen im Leitwert unterliegen, welche beispielsweise mit der Umladung lokaler Störstellen einher gehen. Dies ist vor allem bei aktiven Sensormessungen entscheidend, da die permanente Nachführung des Arbeitspunktes lange Messzeiten erfordert.

Monotonie: Der Leitwert muss in der Nähe des Bias-Punktes eine monotone Abhängigkeit vom Sensorpotential aufweisen. Nur so ist eine eindeutige Zuordnung zwischen der Quantenpunktladung und dem Sensorleitwert bzw. der Regelspannung (aktive Messung) gewährleistet.

Sensitivität: Generell skaliert die Empfindlichkeit des Sensors für eine Ladungsänderung auf dem Dot direkt mit der Kennliniensteilheit am gewählten Bias-Punkt. Gleichwohl werden vereinzelt nicht-sensitive „Blind Spots“ in Abschnitten mit signifikanter Leitwertsteigung beobachtet (siehe Abbildung 8.10).

Darüber hinaus spielt bei passiven Messungen die Ausdehnung des geeigneten Kennlinienabschnitts eine entscheidende Rolle. Diese bestimmt aufgrund des beweglichen Arbeitspunktes maßgeblich den praktisch nutzbaren Messbereich. Der Bias-Punkt wird in diesem Fall unter Berücksichtigung der Driftrichtung an den Rand des entsprechenden Segments gesetzt. Im Falle einer aktiven Sensormessung kann der Arbeitspunkt hingegen direkt auf den optimalen Leitwert eingestellt werden.

In Abbildung 8.10 ist oben links der Sensor-Leitwert g_{Sen} in Abhängigkeit des Gatepotentials U_{GL} für verschiedene Bias-Punkte dargestellt. Die darunter befindlichen, vergrößerten Darstellungen der rot markierten Kennlinienausschnitte zeigen Sprünge im Leitwert, die jeweils mit einer Ladungsänderung auf dem gegenüberliegenden Quantenpunkt einhergehen. Deutlich ist dabei eine Abhängigkeit der Stufenausprägung vom gewählten Sensorpotential (*Arbeitspunkt*) zu erkennen. Im Bereich der Leitwertplateaus kommt es zu einer Verdichtung der einzelnen Kennlinien und einem damit verbundenen signifikanten

Rückgang der Sensitivität. Der obere rechte Abbildungsbereich zeigt eine Projektionsansicht sämtlicher $g_{\text{sen}}(U_{\text{GL}})$ -Kennlinien. Die Länge der einzelnen vertikalen Linien illustriert dabei die maximale Änderung des Sensorleitwerts am jeweiligen Bias-Punkt über den gesamten Wertebereich des Gatepotentials. Diese kann somit als Maß für die Empfindlichkeit des Sensor-QPCs interpretiert werden.

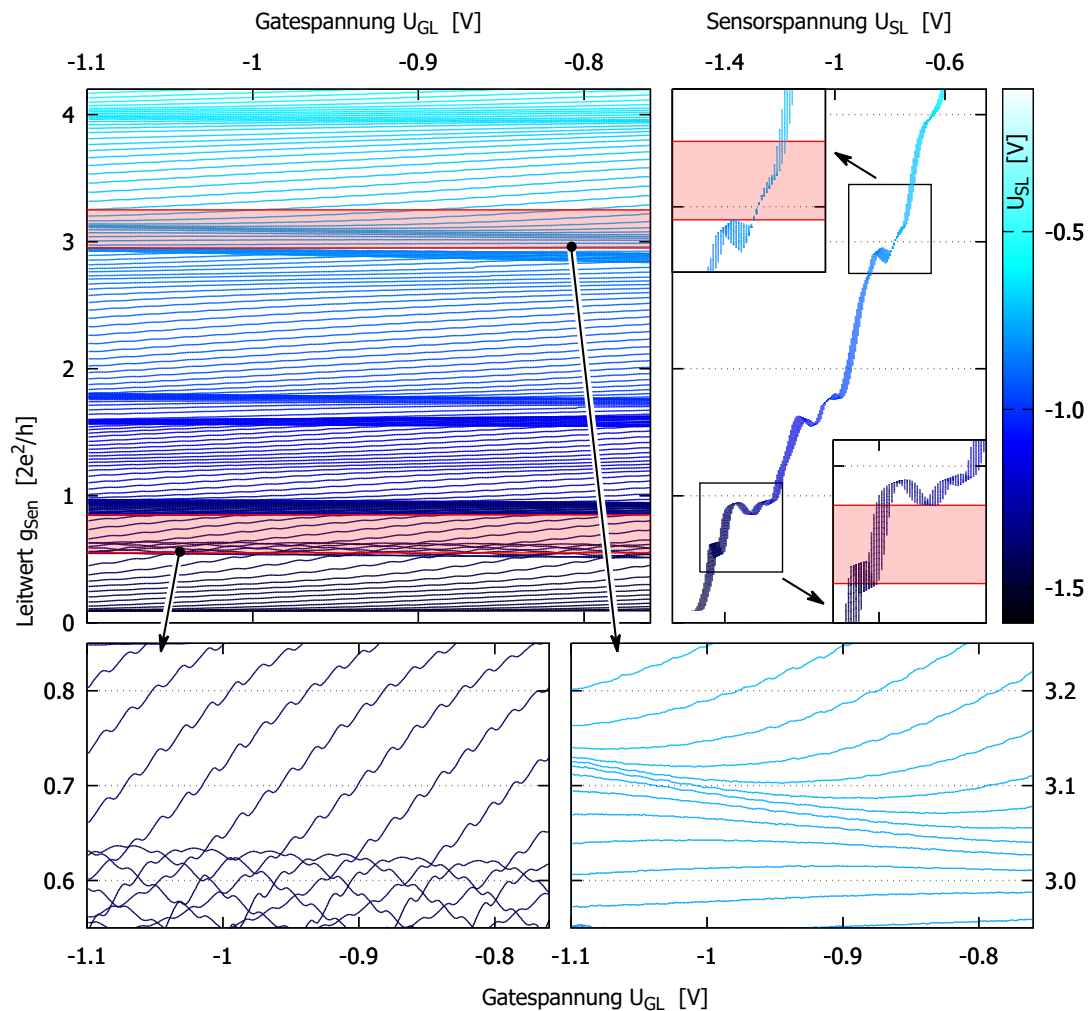


Abb. 8.10.: *Oben:* QPC-Leitwert des Sensors SL in Abhängigkeit der Gatespannung U_{GL} und Projektionsansicht zur Bestimmung der Sensorempfindlichkeit, *unten:* Vergrößerte Darstellung der rot markierten Kennlinienbereiche

8.4. Aktive Sensormessung am Einzeldot

Bedingt durch die Superposition einzelner Gatepotentiale führt beispielsweise das Schließen des Sensor-QPCs zu einer Veränderung der elektrostatischen Verhältnisse auf der gegenüberliegenden Trenngateseite. Basierend auf Simulationsergebnissen (siehe Kapitel 5) wird daher bereits während der Suche nach einer idealen Quantenpunkt-Konfiguration der Sensor grob vorgespannt, um ein nachträgliches Driften der Kopplungsparameter zu minimieren. Abschließend werden durch Aufnehmen einer Leitwertkennlinie geeignete Arbeitspunkte ermittelt und angefahren. Bei Systemen mit starker Kopplung zwischen Sensor und zu detektierendem Quantenpunkt kann hierbei ein iteratives Vorgehen zur Feinjustage der einzelnen Potentiale erforderlich sein.

Im Zuge einer Erweiterung des Messaufbaus kam es zu einer sprunghaften Änderung der elektronischen Probenparameter⁹. Bei einer anschließend durchgeführten Charakterisierung zeigten sich im Vergleich zu früheren Messungen sehr ähnliche Verläufe der einzelnen QPC-Kennlinien, jedoch mit kollektiv zu höheren Potentialen hin verschobenem Pinch-Off. Durch eine entsprechende Adaption der Gatespannungen konnten Quantenpunkte mit nahezu unveränderten Eigenschaften (Größe, Kapazitäten, etc.) definiert werden. Eine quantitative Vergleichbarkeit der Messergebnisse ist somit gegeben.

8.4.1. Vergleich zu direkter Leitwertmessung

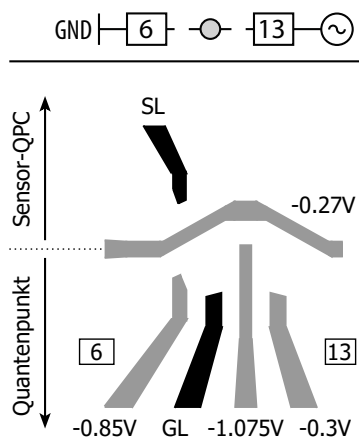


Abb. 8.11.: Messanordnung

Bei den nachfolgenden Elektrometermessungen ist der Dot durch einen höheren Leitwert des linken QPCs stärker an den geerdeten Source-Kontakt 6 angebunden (siehe Abbildung 8.11). Die Gründe für diese Wahl der asymmetrischen Reservoir-Kopplung werden in Abschnitt 8.4.2 diskutiert. Abbildung 8.12 zeigt typische Coulomb-Blockade-Oszillationen im Leitwert des Quantenpunkts, sowie das angelegte Potential zur Regelung des Sensorarbeitspunktes. Dieser wurde in die Mitte des sensitiven Segments zwischen erster und zweiter Leitwertstufe der QPC-Kennlinie gesetzt. Ein Absenken des Dot-Centergatepotentials bewirkt zwangsläufig ein zusätzliches Abschnüren des gegenüberliegenden Quantenpunktkontakts. Um dessen Leitwert konstant zu halten muss die Sensorspannung zur Kompensation dieses Effekts entsprechend erhöht werden. Dies geht mit einer leichten Verschiebung des Kanalzentrums vom Trenngate weg einher. Verringert sich nun in Folge

des Abschnürens des gegenüberliegenden Quantenpunktkontakts, um dessen Leitwert konstant zu halten muss die Sensorspannung zur Kompensation dieses Effekts entsprechend erhöht werden. Dies geht mit einer leichten Verschiebung des Kanalzentrums vom Trenngate weg einher. Verringert sich nun in Folge

⁹vermutlich zurückzuführen auf einen Störimpuls beim Ein- bzw. Ausschalten eines mit 230 V Netzspannung versorgten Messgeräts

der Potentialänderung die Ladungszahl auf dem Dot um ein Elektron, so ist dies mit einer Öffnung des Sensor-QPCs und folglich einer Stufe in dessen Regelkennlinie korreliert. Diese, je nach Ausprägung, sprunghaften Übergänge sind dabei insbesondere in Bereichen zu erkennen, in denen aufgrund der zu schlechten Reservoirankopplung keine Leitwertoszillationen mehr detektiert werden können. Nach dem vollständigen Entleeren der Ladungsinsel sinkt die Steigung der Sensorkennlinie zunächst unvermittelt ab und das Rauschen der Messwerte nimmt signifikant zu. Letzteres könnte auf den Wegfall einer Abschirmung des Sensor-QPCs durch die negative Dotladung zurückzuführen sein. Für die Auswertung der Messdaten wurden die Gatespannungen gemäß Gleichung 8.12 korrigiert.

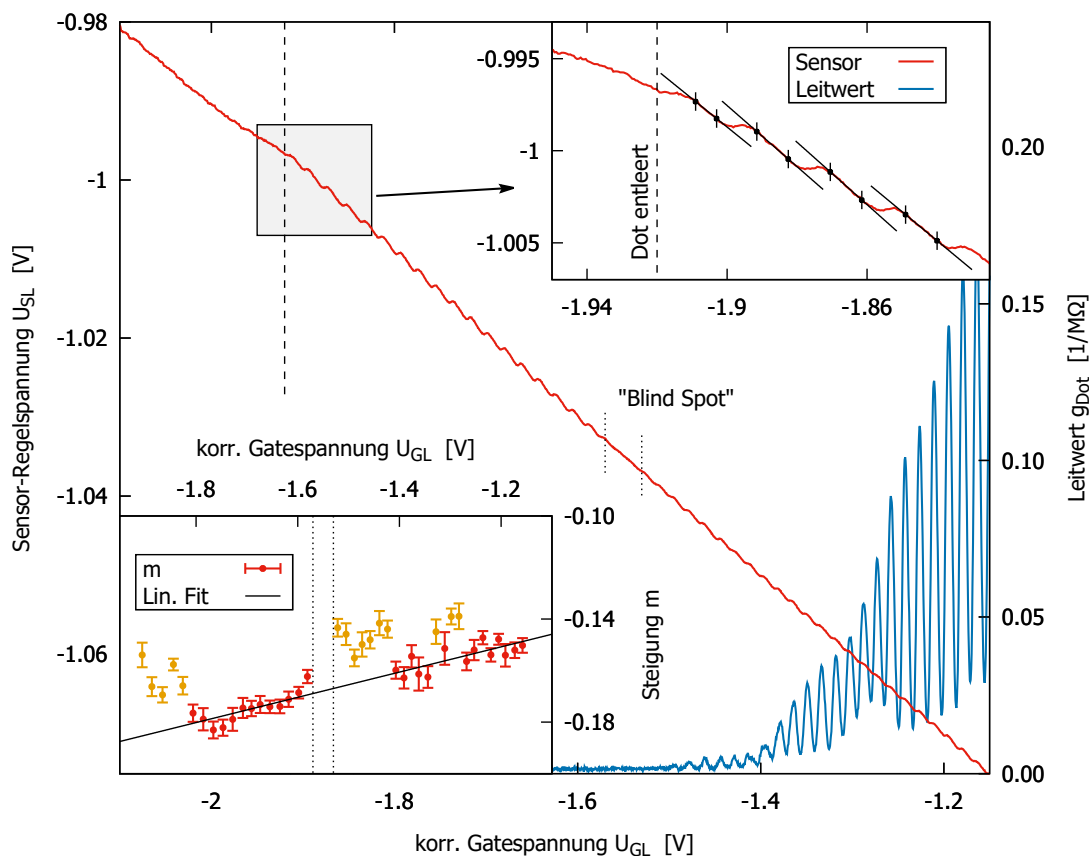


Abb. 8.12.: Aktive Elektrometermessung am linken Quantenpunkt mittels Sensor *SL*. *Inset:* Auswertung der Kennliniensteigung auf den Ladungsstufen zur Kompensation des direkten Gatepotentialeinflusses.

Mittels linearer Regression wird jeweils die Kennliniensteigung auf den einzelnen Ladungsstufen bestimmt, um den direkten Einfluss des Gatepotentials U_{GL} auf den Sensor-QPC zu quantifizieren (siehe Inset). Hierbei zeigt sich tendenziell eine Zunahme der Steilheit beim Schließen des Centergates *GL*. Segmentweise wird ein Abflachen der Sensorregelspannung in Bereichen mit konstant angenommener Dotladung beobachtet. Insbesondere

8. Messungen

fällt hierbei ein markanter *Blind Spot* bei einer Besetzung zwischen 19 und 21 Elektronen, kurz nach dem Verschwinden der letzten Coulomb–Blockade–Peaks im Leitwert, auf. Die betreffenden Stufen sind so schwach ausgeprägt, dass die Umladungen kaum mehr aufgelöst und somit nicht ausgewertet werden können.

Zur Kompensation des Gatepotentialeinflusses wird zunächst ein linearer Fit des ermittelten Steigungsverlaufs berechnet. Aus Darstellungsgründen werden dabei einzelne, separierte Datenpunkte nicht berücksichtigt und sind zur Kennzeichnung orange eingefärbt¹⁰. Durch Integration kann schließlich eine quadratische Funktion $U_{\text{SL},k}$ zur Korrektur der Sensorrohdaten bestimmt werden:

$$\left. \frac{\partial U_{\text{SL},k}}{\partial U_{\text{GL}}} \right|_{n=\text{konst.}} (U_{\text{GL}}) = a \cdot U_{\text{GL}} + b \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a = 0,049 \pm 0,003 \text{ V}^{-1} \\ b = -0,092 \pm 0,004 \end{cases} \quad (8.13)$$

$$\Rightarrow U_{\text{SL},k}(U_{\text{GL}}) = \frac{a}{2} \cdot U_{\text{GL}}^2 + b \cdot U_{\text{GL}} + c \quad (8.14)$$

Über die Integrationskonstante c kann der Bezugspunkt für das kompensierte Sensorsignal frei gewählt werden. Abbildung 8.13 zeigt die durch Subtraktion der Korrekturfunktion bereinigte Kennlinie. Diese weist Plateaus mit verschwindender Steigung in Bereichen mit konstanter Elektronenzahl n auf. Zur möglichst exakten Bestimmung der einzelnen Umladungspotentiale wurden den Stufen jeweils Funktionen der folgenden Form angefitet:

$$U_{\text{SL},n}(U_{\text{GL}}) = a_n \cdot \frac{\exp[b_n (U_{\text{GL}} - U_{\text{GL},n})]}{\exp[b_n (U_{\text{GL}} - U_{\text{GL},n})] + 1} + c_n \cdot U_{\text{GL}} + d_n \quad (8.15)$$

Die Kantenform wird hierbei formal analog zu einer inversen Fermiverteilung beschrieben. Eine überlagerte, konstante Steigung auf den Plateaus durch lokale Abweichungen der durchgeführten Korrektur erster Ordnung wird durch einen zusätzlichen linearen Term berücksichtigt. Den Coulomb–Blockade–Oszillationen im Leitwert werden Peak–Funktionen gemäß Gleichung 2.17 angefitet:

$$g_n(U_{\text{GL}}) = \frac{a_n}{\cosh^2[b_n (U_{\text{GL}} - U_{\text{GL},n})]} \quad (8.16)$$

Der zu erwartende Fehler bei dieser separaten Analyse der einzelnen Peaks bzw. Stufen ist vernachlässigbar, sofern der relative Abstand größer als die jeweilige Verbreiterung ist und die Funktionen nicht „überlappen“. Dieser Ansatz erlaubt aufgrund der großen Zahl an Freiheitsgraden insbesondere eine sehr genaue Bestimmung der Kanten-, bzw. Maximums–Positionen.

¹⁰Diese Form der Korrektur soll negativen Stufensteigungen in den korrigierten Sensorspannungen vorbeugen und damit eine Interpretation der Daten erleichtern. Die spätere Analyse der Umladungspositionen wird hierdurch nicht beeinflusst.

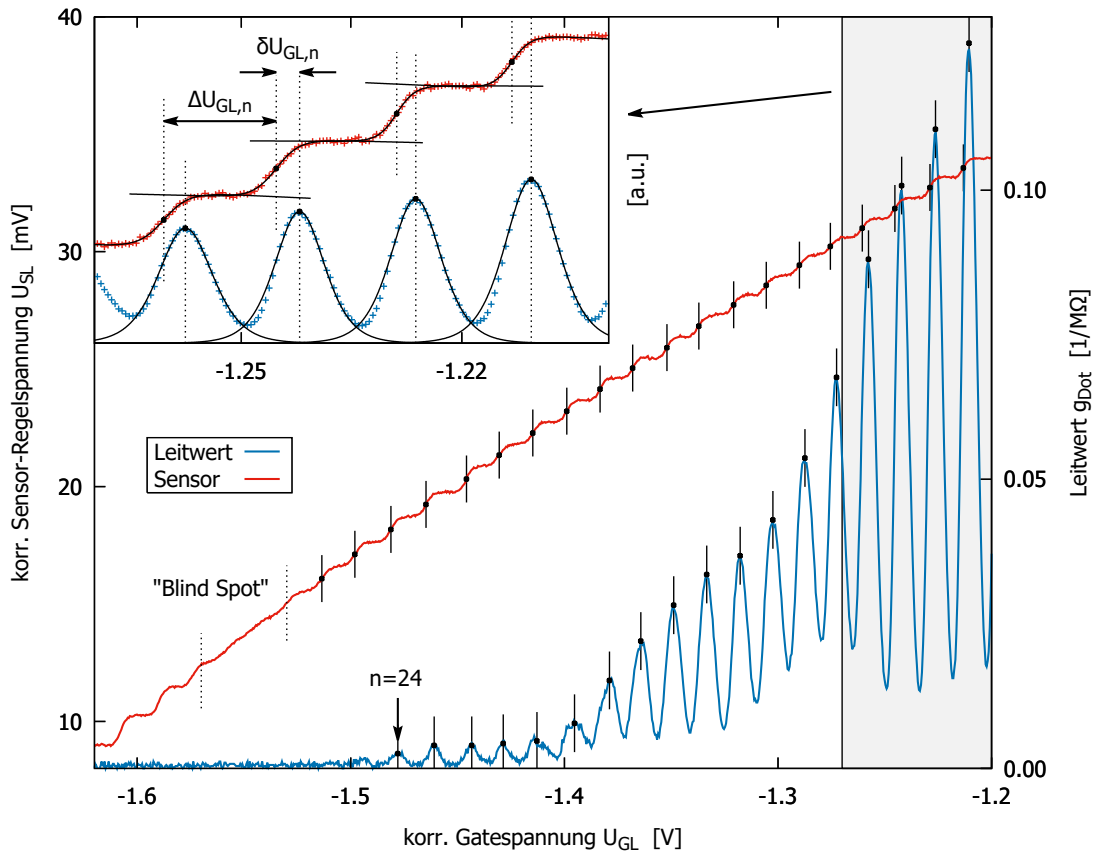


Abb. 8.13.: Kompensation des direkten Gatepotentialeinflusses auf die Sensorregelspannung durch quadratischen Korrekturterm. *Inset:* Charakterisierung der Stufenkanten und Leitwertpeaks mittels Fitfunktionen.

8. Messungen

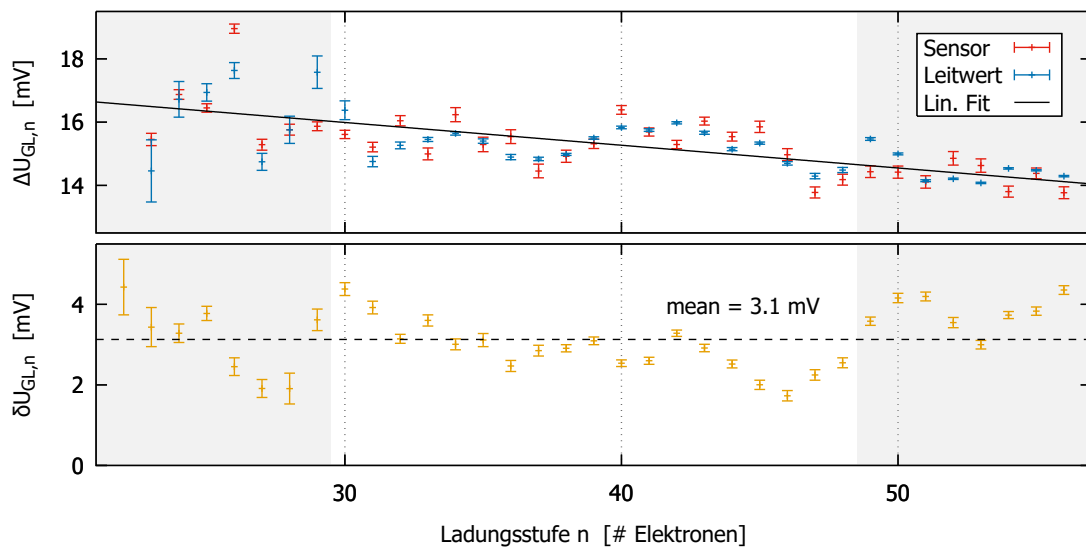


Abb. 8.14.: *Oben:* Vergleich der aus Sensordaten und Leitwertmessung gewonnenen Energiespektren; *unten:* Abstand zwischen den Positionen der korrespondierenden Sensorstufen und Leitwertpeaks.

Abbildung 8.14 zeigt grafisch die Abhängigkeit der jeweils berechneten Zentrumspositionen von der Quantenpunktbesetzung. Stufe n bezeichnet dabei im Folgenden stets den Ladungsübergang $n - 1 \rightarrow n$. Einige der Coulomb-Blockade-Peaks weisen eine leichte Asymmetrie in Form einer flacheren rechten Flanke auf, weshalb die Funktionen nur in unmittelbarer Nähe des Maximums angefitet wurden. Aufgrund des geringen Stromes und des damit verbundenen großen Rauschanteils eignen sich die ersten sechs messbaren Leitwertoszillationen (Ladungsstufen 24–29) nur bedingt für eine quantitative Auswertung. Bei weit geöffnetem Centergate wird die Ausprägung der Sensorstufen signifikant schwächer, was auf ein starkes Ansteigen der Dot-Leitfähigkeit und die damit verbundene zunehmende Linienverbreiterung zurückzuführen ist. Die mit einem größeren Fehler behafteten Randregionen sind daher grau eingefärbt. Im oberen Abbildungsbereich sind jeweils die Abstände zweier benachbarter Umladungspositionen ($\Delta U_{GL,n} = U_{GL,n} - U_{GL,n-1}$) dargestellt. Zwischen den Ladungsstufen 30 und 48 zeigen beide Datensätze im Rahmen der Messauflösung eine gute Übereinstimmung und lassen darüber hinaus eine feine Struktur im Energiespektrum des Quantenpunkts erkennen. Als limitierender Faktor tritt dabei vor allem der vergleichsweise flache Verlauf der Sensorkennlinie im betrachteten Regime in Erscheinung. Erst mit schlechter werdender Ankopplung des Dots an die Reservoirs und folglich geringeren Strömen werden die Umladungen tendenziell markanter, was eine präzisere Bestimmung der jeweiligen Zentren ermöglicht. Aufgrund der gewählten Darstellung als Potentialdifferenz wirkt sich jeder Fehler stets auf zwei Datenpunkte mit unterschiedlichem Vorzeichen aus. Beim Entladen des Quantenpunkts nimmt der mittlere Abstand benachbarter Energieniveaus erwartungsgemäß zu, was auf eine kleiner werdende Gatekapazität zurückzuführen ist.

Die Positionen der Sensorstufen sind, bezogen auf die korrespondierenden Leitwertpeaks, jeweils in Richtung niedrigerer Potentiale verschoben (siehe Abb. 8.14 unten). Die mittlere Differenz beträgt dabei ca. 3,1 mV, was in etwa 20 % des Stufenabstands entspricht, mit einer Standardabweichung von 0,7 mV. Diese Verschiebung kann auf einen bereits zuvor beobachteten Gleichspannungsoffset zwischen Source- und Drain-Kontakt zurückgeführt werden (siehe Abschnitt 8.2.1), wie im Folgenden gezeigt wird. In einer rein linearen Messkonfiguration werden Strommaxima bei einer statistischen Halbbesetzung und somit eine Übereinstimmung der jeweiligen Fitparameter erwartet.

Simulation eines Quantenpunkts im nichtlinearen Regime

Abbildung 8.15 zeigt die numerisch berechnete mittlere Ladung (oben), sowie den Strom (unten) im nichtlinearen Bereich zwischen zwei Coulomb-Blockade-Rauten für unterschiedliche Drain-Source-Gleichspannungen. Die der Simulation zu Grunde gelegten Koppelkapazitäten entsprechen den in Gleichungen 8.4, 8.5 und 8.7 experimentell ermittelten Werten. Aufgrund geänderter Gatepotentiale an den QPCs *KL* und *KR* zur asymmetrischen Reservoiranbindung wird eine Abweichung der tatsächlichen Kapazitäten¹¹ erwartet. Dies hat jedoch keine qualitative Auswirkung auf die Ergebnisse. Die unterschiedlichen Kopplungsstärken werden exemplarisch durch ein Widerstandsverhältnis von $R_d/R_s = 20$ berücksichtigt.

Aus Darstellungsgründen wurden die Positionen aller Strommaxima durch Addition eines entsprechenden Offsets in U_g -Richtung zur Deckungsgleichheit gebracht. Der resultierende Kennlinienversatz ist bei den jeweils korrespondierenden Ladungsverläufen in gleichem Maße berücksichtigt. Mit zunehmender Drain-Source-Spannung zeigt sich eine relative Verschiebung der Halbladungspunkte ($n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) in Richtung negativer Gatepotentiale. Dabei besteht im betrachteten Regime näherungsweise eine lineare Abhängigkeit des relativen Abstandes von U_{ds} (siehe Inset). Darüber hinaus ist mit zunehmender Kontaktspannung eine sich ausbildende Asymmetrie in den Kurvenverläufen zu beobachten. Die Coulomb-Blockade-Peaks bilden in Übereinstimmung mit den Messdaten eine im Vergleich steilere positive (linke) Flanke aus. Dies spiegelt sich in einem zunächst schnellen Ladungsanstieg wider, welcher jedoch bereits vor dem Erreichen des Strommaximums deutlich abflacht. Für den in Abschnitt 8.2.1 bestimmten Gleichspannungsoffset von ca. 0,2 mV sagt das Modell einen Abstand von 1,8 mV voraus. Unter Berücksichtigung der nur grob abgeschätzten Kopplungsparameter lässt sich somit der beobachtete Verschiebungseffekt qualitativ erklären. Ferner zeigt sich, dass im Bereich großer Source-Drain-Spannung aufgrund der starken Asymmetrien die Funktionen aus Gleichungen 8.15 und 8.16 nicht mehr zur Beschreibung der Kurvenverläufe geeignet sind.

¹¹Die Gatekapazität, repräsentiert durch den Abstand der Coulomb-Blockade-Peaks, stimmt in guter Näherung überein (vgl. Gl. 8.3 und Abb. 8.14)

8. Messungen

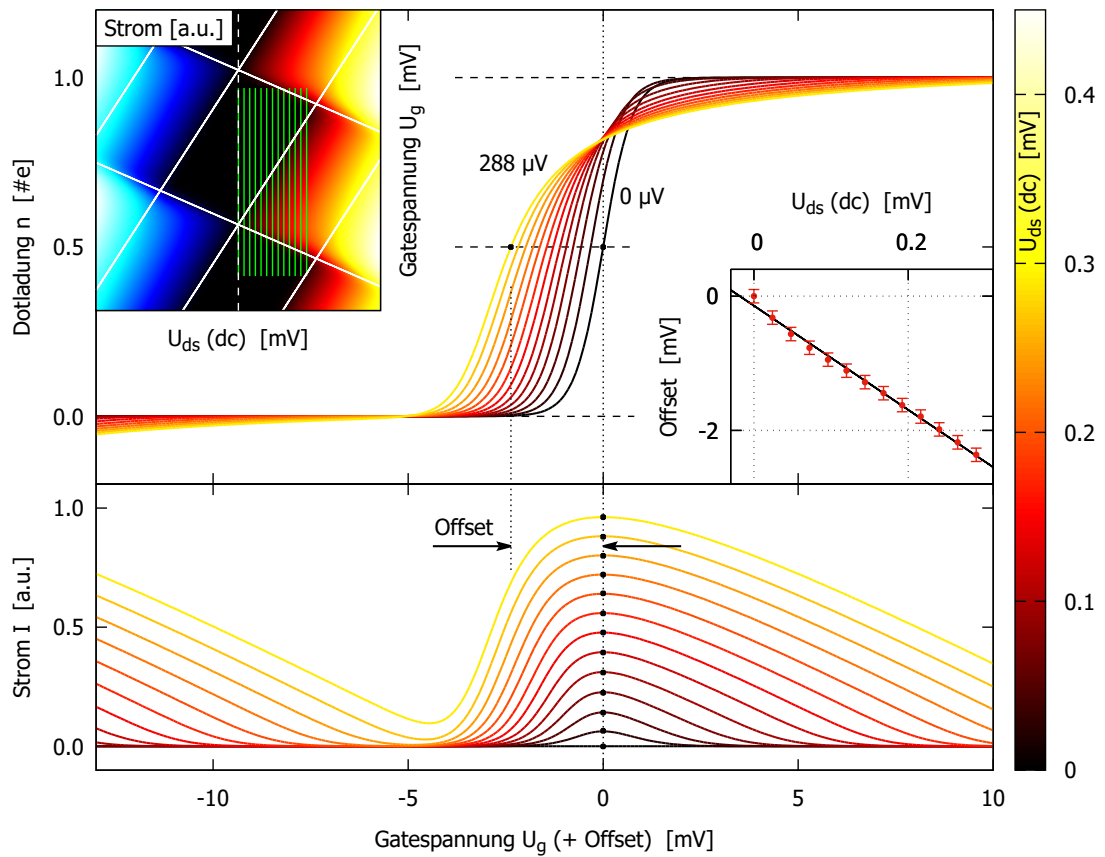


Abb. 8.15.: Simulierte Quantenpunktladung (*oben*) und -strom (*unten*) im nichtlinearen Regime bei asymmetrischer Reservoirankopplung ($R_d/R_s = 20$); $T = 70$ mK; *Inset:* Differenz der Gatespannungen bei Strommaximum und halbzahliger Quantenpunktladung.

8.4.2. Auswirkung der Drain–Source–Wechselspannung auf die Sensormessung

Abbildung 8.16 illustriert die Auswirkung unterschiedlicher Drain–Source–Wechselspannungsamplituden (differentielle Leitwertmessung am Dot) auf die Stufenausprägung der Sensorkennlinie. Für die Messung wurde der Quantenpunkt durch die Wahl entsprechender Gatepotentiale (siehe Inset) asymmetrisch an die beiden Reservoirs gekoppelt. Der rechte QPC ist mit $U_{KM} = -1,1\text{V}$ fast vollständig abgeschnürt und erzeugt mit dem zusätzlich definierten rechten Centergate ($U_{GR} = -0,3\text{V}$) eine verhältnismäßig große Potentialbarriere. Der Arbeitspunkt des geregelten Sensors befindet sich zwischen der ersten und zweiten Leitwertstufe des Quantenpunktkontakts. Für beide Drain–Source–Anschlusskonfigurationen wurde die mittels Lock–In–Verstärker angelegte Wechselspannung über den Dot schrittweise erhöht und jeweils eine Gatekennlinie über ein bestimmtes Potentialintervall aufgenommen.

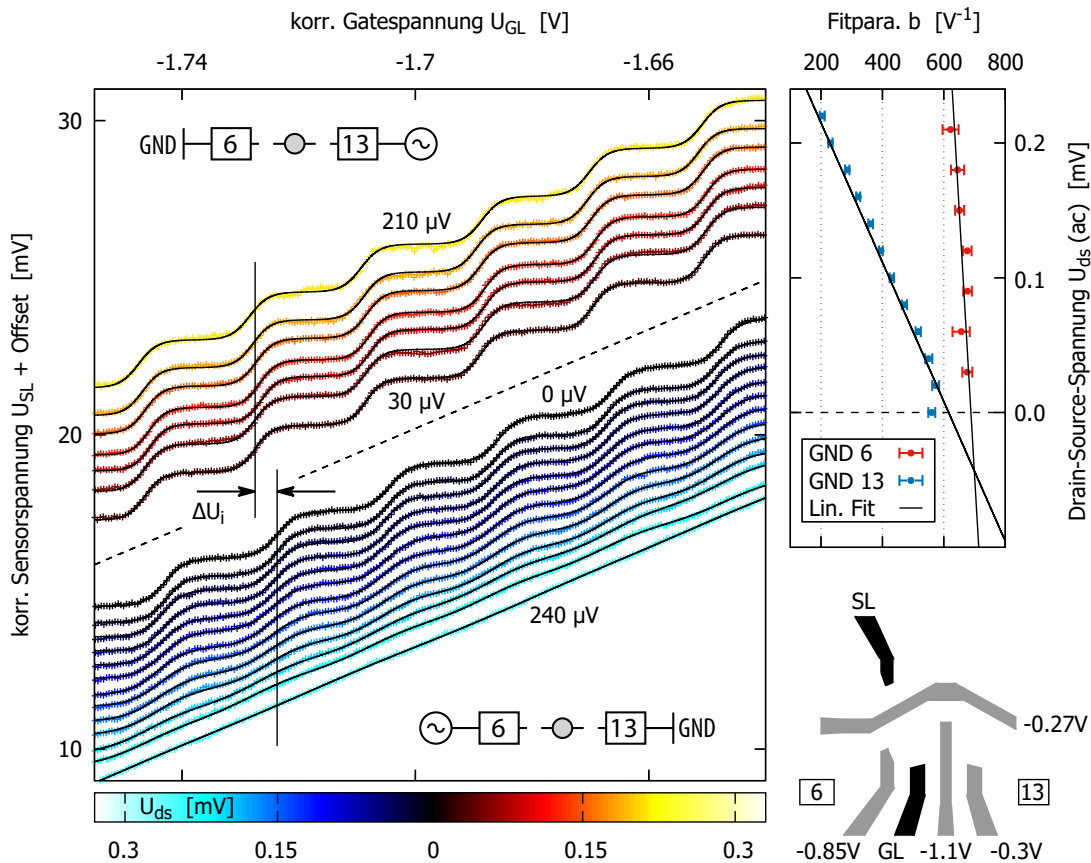


Abb. 8.16.: Links: Sensormessungen am linken Quantenpunkt für unterschiedliche Drain–Source–Spannungsamplituden bei asymmetrischer Kopplung des Dots an die Reservoirs. Rechts: Abhängigkeit der Stufenausprägung für beide Messkonfigurationen; Übersicht der angelegten Gatespannungen.

8. Messungen

Für die Auswertung der Messdaten wurde die Gatespannung U_{GL} gemäß Gleichung 8.12 zunächst quadratisch korrigiert. Aus Darstellungsgründen sind die Kennlinien durch einen Offset in U_{SL} -Richtung gegeneinander verschoben. Der direkte Einfluss des Gatepotentials auf den Sensorleitwert wird durch Subtraktion einer Geraden mit Steigung $U_{\text{SL},k} = 0.18 \cdot U_{\text{GL}}$ kompensiert¹². Die so bereinigten Spannungswerte zur Nachführung des Bias-Punktes zeigen Plateaus in den Bereichen mit konstanter Dotladung. Im gewählten Ausschnitt weisen alle Kennlinien sechs Stufen auf. Zur quantitativen Analyse wurde analog zu Gleichung 8.15 jeweils eine Funktion der folgenden Form angefitet¹³:

$$q_{\text{dot}} \propto U_{\text{SL}}(U_{\text{GL}}) = \sum_i \left[a \cdot \frac{\exp[b(U_{\text{GL}} - U_{\text{GL},i})]}{\exp[b(U_{\text{GL}} - U_{\text{GL},i})] + 1} \right] + d \quad (8.17)$$

Die Parameter a für die Stufenhöhe und b für den Grad der „Verschmierung“ sind dabei für jeweils alle Stufen einer Kennlinie gleich. $U_{\text{GL},i}$ bezeichnet das Gatepotential, welches der i -ten Umladung zugeordnet ist. Wird die Wechsellspannung an den besser gekoppelten Kontakt 6 angelegt, so ist tendenziell ein zunehmendes Aufweichen der Stufenkanten mit steigender Oszillationsamplitude (blauer Farbskalenbereich) zu beobachten. Ab einem Wert von $U_{\text{ds}}^{\text{ac}} \approx 240 \mu\text{V}$ ist schließlich keine Ladungsquantisierung in den Messdaten mehr zu erkennen.

Der Fitparameter b zeigt hierbei eine näherungsweise lineare Abhängigkeit von der angelegten Wechsellspannungsamplitude (siehe Abb. 8.16, rechts). Ein gleiches Verhalten ist prinzipiell auch bei vertauschten Reservoirs (virtuelle Masse an Kontakt 6) zu beobachten, wenngleich mit deutlich schwächerer Ausprägung. Dies kann durch die asymmetrische Kopplung des Quantenpunkts an Source und Drain erklärt werden. Das elektrische Potential φ_n eines n -fach geladenen Dots ergibt sich über die jeweiligen Koppelkapazitäten C_i aus den Potentialen U_i der angeschlossenen Reservoirs gemäß¹⁴:

$$\varphi_n = \frac{\sum C_i U_i + ne}{C_\Sigma} \quad (8.18)$$

Eine starke Kopplung der Ladungsinsel an die Drain-Wechsellspannung über Kontakt 6 bedeutet demnach eine signifikante Störung des Dotpotentials selbst, welches in Relation zu dem auf Masse bezogenen Gate oszilliert. Bei einem Vertauschen der Anschlüsse wird das Inselpotential hingegen maßgeblich durch die virtuelle Masse (Transimpedanzverstärker) am nun als Source fungierenden Reservoir bestimmt. Abbildung 8.17 illustriert dies schematisch für beide Anschlusskonfigurationen. Die Koppelstärken werden dabei durch unterschiedlich breite Barrieren symbolisiert.

Im Grenzfall $U_{\text{ds}}^{\text{ac}} \rightarrow 0$ wären demnach scharfe Kanten an den Umladungspunkten zu erwarten, was eine Divergenz des Fitparameters b bedeuten würde. In diesem Regime

¹²Innerhalb des betrachteten kleinen Intervalls ist eine lineare Korrektur ausreichend

¹³Eine separate Auswertung der einzelnen Stufen ist aufgrund des teilweise großen Überlappbereichs nur eingeschränkt möglich

¹⁴TINKHAM, *Introduction to Superconductivity: Second Edition*.

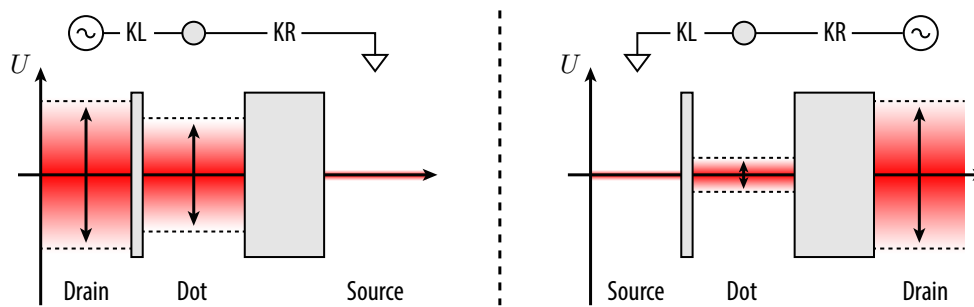


Abb. 8.17.: Störung des Dotpotentials φ durch Lock-In-Wechselspannung bei asymmetrischer Reservoirankopplung. Virtuelle Masse an Kontakt 13 (*links*) / 6 (*rechts*)

dominiert daher offenbar ein weiterer Verbreiterungsmechanismus, dessen Effekt die Verschmierung durch das Störpotential überlagert. Neben der thermischen Verbreiterung könnte eine mögliche Ursache durch das Lock-In-Wechselspannungssignal auf der gegenüberliegenden Sensorseite gegeben sein. Zugunsten einer möglichst hohen Empfindlichkeit wird das Trenngate in der Regel nur knapp über den Pinch-Off hinaus gefahren. Dies bedeutet eine vergleichsweise niedrige Potentialbarriere (vgl. Abbildung 8.9), welche Tunnelprozesse einzelner Elektronen zwischen den beiden Mesahälften ermöglicht. Für eine vollständige Beschreibung muss zudem die kapazitive Kopplung des Dots an die sensorseitigen Reservoirs berücksichtigt werden.

Bei einem Vergleich der Kurvenscharen zwischen beiden Messkonfigurationen ist eine relative Verschiebung der Umladungspotentiale um ca. $\Delta U_i = 3 - 4 \text{ mV}$ zu erkennen. Dies könnte auf eine dc-Offsetspannung zwischen Source und Drain hindeuten, welche bereits in vorherigen Messungen beobachtet wurde. Die damit einhergehende Verschiebung aus dem linearen Coulomb-Blockade-Bereich würde darüber hinaus eine zusätzliche Stufenverbreiterung auf den Sensorkennlinien erklären (siehe Abschnitt 8.2.1). Für schwach geladene Quantenpunkte kann ein Nachweis von Umladungen aufgrund des geringen Stroms nicht mehr über eine direkte Leitwertmessung anhand von Coulomb-Blockade-Oszillationen erfolgen. Zur Minimierung von Störeinflüssen werden daher bei linearen spektroskopischen Untersuchungen sämtliche Meskontakte auf Seiten der Doppeldotstruktur direkt an der Messkabelanschlussbox geerdet.

8.4.3. Untersuchung des Energiespektrums

Im Folgenden wird die Geometrie des linken Quantenpunkts mit Hilfe des weiter entfernten zweiten Steuergates *GR* geringfügig modifiziert und die Auswirkung auf das Energiespektrum des Dots untersucht. Die Ladungsdetektion erfolgt dabei mittels aktiv geregelter Sensor im Regime weniger Ladungsträger. Im Gegensatz zu vorherigen Messungen wird nun der rechte Punktkontakt *KM* durch Anlegen eines entsprechend niedrigen

8. Messungen

Potentials quasi komplett abgeschnürt, sodass die Reservoirankopplung maßgeblich über den linken QPC erfolgt.

Simulation der Quantenpunktgeometrie

Abbildung 8.18 zeigt die simulierten Ladungsverteilungen innerhalb des 2DEGs für eine Auswahl realisierter Messkonfigurationen. Von links nach rechts wird dabei jeweils die Dotgröße durch „Zufahren“ des zentralen Steuergates sukzessive verkleinert. Die grün eingezeichnete 0,1 mV-Äquipotentiallinie markiert den Rand der Verarmungszone innerhalb der 2DEG-Ebene und kann somit als Kontur des Quantenpunkts interpretiert werden. Zur Erhaltung der Dotladung muss bei einer Absenkung des „Störpotentials“ U_{GR} das Steuergate GL entsprechend weiter geöffnet werden. Bei den numerischen Berechnungen ist darüber hinaus die Änderung der Sensorspannung im Zuge der Arbeitspunktnachführung berücksichtigt. Basierend auf den ausgewerteten Messdaten wurden hierfür Empfindlichkeiten von $\Delta U_{SL} = -10\% \Delta U_{GL}$ bzw. $\Delta U_{SL} = -5\% \Delta U_{GR}$ angesetzt.

Erwartungsgemäß verschlechtert sich bei einer Verkleinerung des Dots auch die jeweilige Reservoirankopplung aufgrund eines zusätzlichen Abschnürens der begrenzenden Quantenpunktkontakte. Durch eine geeignete Wahl der QPC-Potentiale muss dabei auch im Bereich kleiner Ladungszahlen eine ausreichend hohe Tunnelrate der Elektronen sichergestellt werden, um den elektrochemischen Gleichgewichtszustand des Systems zu erreichen. Ein direkter Vergleich von Konfigurationen ähnlicher Dotgröße zwischen beiden simulierten Serien deutet auf einen schwachen Einfluss des Steuergates GR auf die Form der Ladungsinsel hin. Diese wird beim Absenken des Störpotentials von rechts leicht gestaucht und deren Form somit geringfügig modifiziert.

Messergebnisse

Abbildung 8.19 zeigt ausgewählte Sensorrohdaten einer Serie von aktiven Elektrometermessungen bei einer Variation des Potentials am rechten Steuergate GR . Die einzelnen Kennlinien weisen dabei einige übereinstimmende, charakteristische Merkmale auf. Das Verschwinden der Ladungsstufen in Folge der vollständigen Entleerung des Dots geht mit einer signifikanten Zunahme des Messwertauschens einher. Dies ist korreliert mit einem plötzlichen Abflachen des Potentialverlaufs und entspricht dem bereits in vorangegangenen Messungen beobachteten Verhalten (vgl. Abschnitt 8.4.1). Der Übergang zwischen beiden Kennlinienbereichen ist mit einer gestrichelten Linie markiert. Für eine Quantenpunktladung zwischen 16 und 18 Elektronen ist ein markanter *Blind Spot* zu beobachten, der sich in einer signifikant schwächeren Ausprägung der betreffenden Ladungsstufen äußert und somit eine spektrale Analyse in diesem Regime erschwert. Bei weiter geschlossenem rechten Steuergate tritt dieser Effekt tendenziell weniger stark in Erscheinung und die Umladungen werden demnach besser sichtbar.

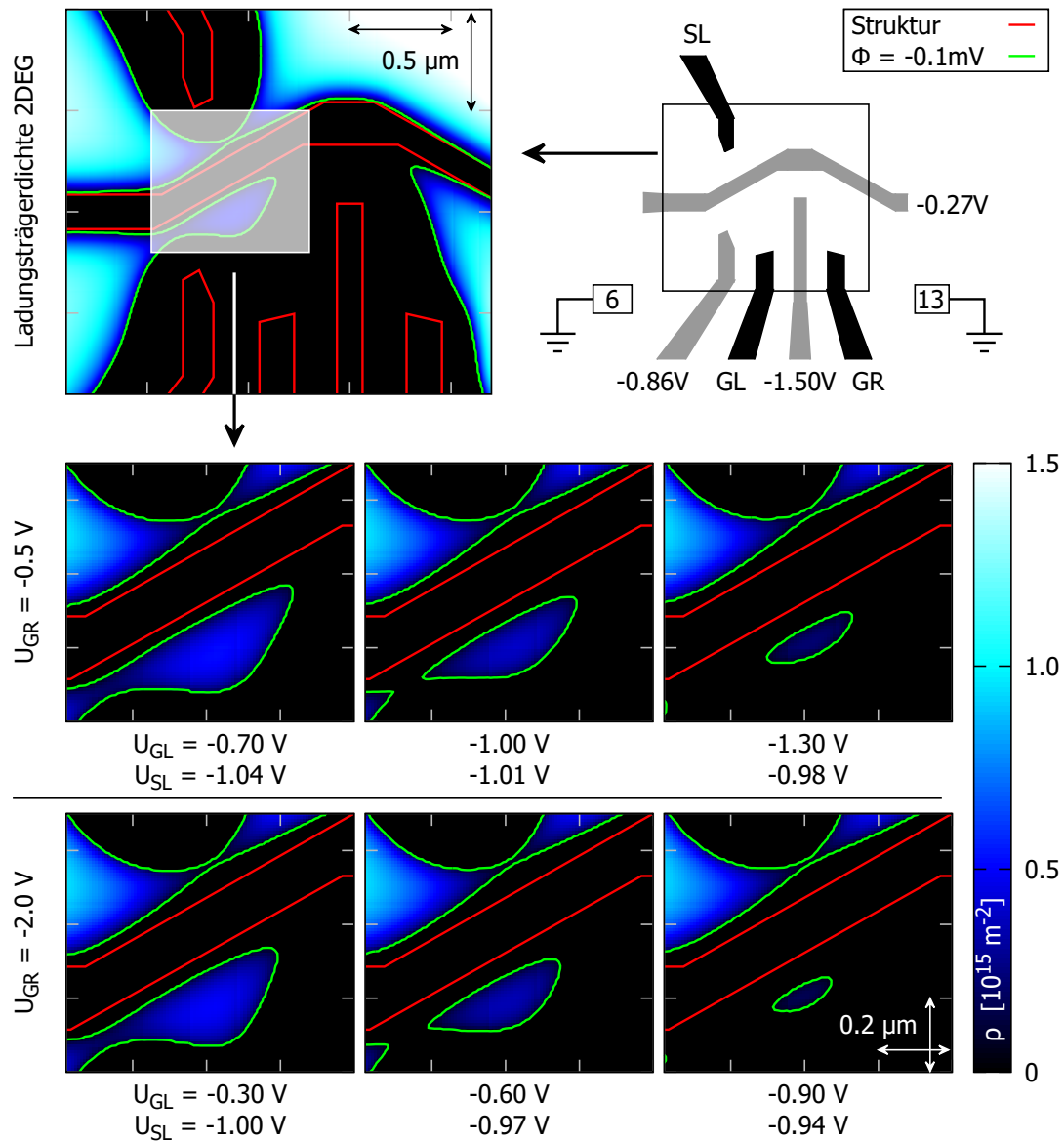


Abb. 8.18.: *Oben rechts:* Übersicht der angelegten (statischen) Gatespannungen; *unten:* simulierte Ladungsverteilung im 2DEG beim Schließen des linken Steuertores GL (v.l. n. r.) für unterschiedliche Potentiale U_{GR}

8. Messungen

Einige der Sensorkennlinien zeigen lokale Sprünge, die beispielsweise durch Umladungen von Störstellen hervorgerufen werden können. Bei der Datenauswertung wird durch eine Offsetkorrektur (siehe Abb. 8.19, Inset) der betreffenden Kennliniensegmente in U_{GL} -Richtung individuell geprüft, welche Bereiche der selben Systemkonfiguration zuzuordnen sind und sich damit für die im Folgenden durchgeführte spektrale Auswertung eignen¹⁵. Die verschobenen Messkurvenabschnitte sind durch graue Einfärbung kenntlich gemacht. Kennlinien mit mehr als zwei unterschiedlichen Konfigurationen bzw. häufigen Sprüngen wurden selektiert und verworfen.

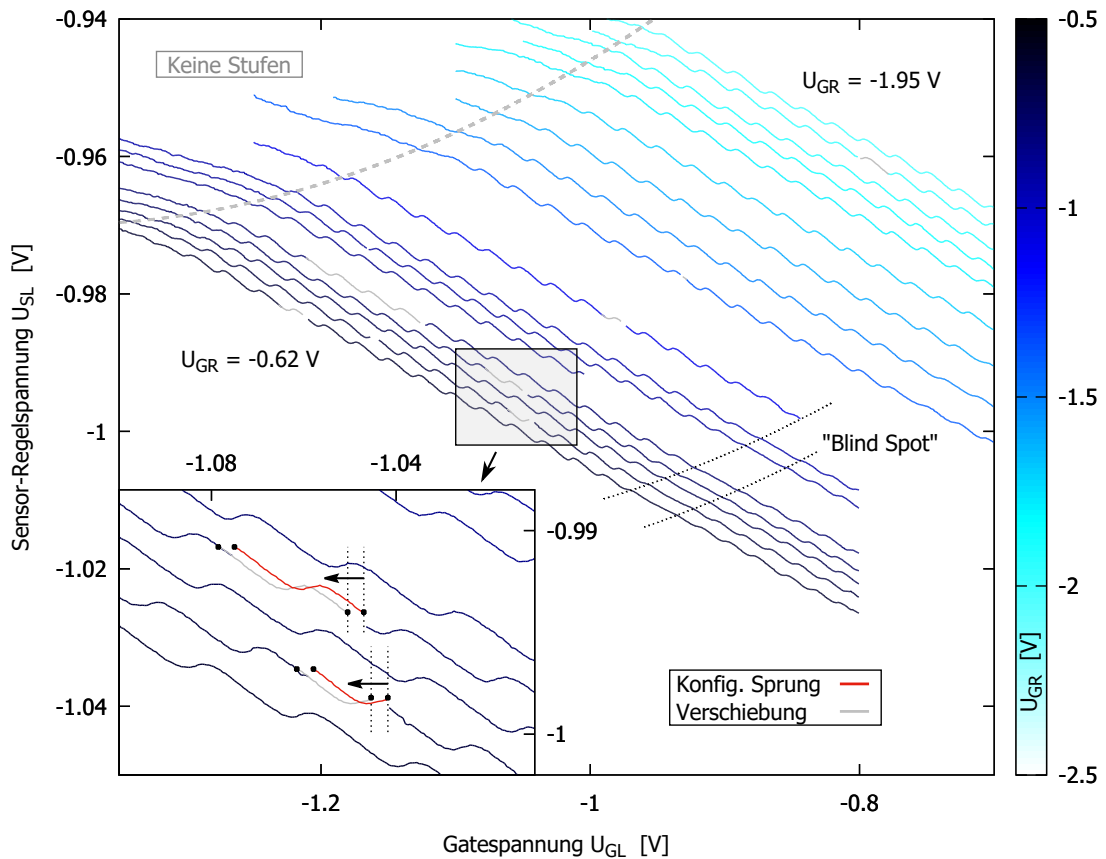


Abb. 8.19.: Sensorrohdaten der Elektrometermessung am linken Quantenpunkt für verschiedene Potentiale U_{GL} ; *Inset:* Beurteilung von Kennlinien mit lokalen Konfigurationssprüngen durch Offsetkorrektur.

Der Einfluss des aktiv geregelten Sensorpotentials auf den Quantenpunkt wird durch eine Transformation der Gatespannung U_{GL} gemäß Gleichung 8.12 berücksichtigt. Die Bereinigung der Sensordaten um den direkten Beitrag des Steuergatepotentials erfolgt analog zu Abschnitt 8.4.1 durch Subtraktion eines quadratischen Korrekturterms (siehe Gleichung 8.14). Zur Bestimmung der einzelnen Umladungspotentiale wird jeder Stufe

¹⁵Wird der Kennlinienverlauf durch Verschieben des betreffenden Segments stetig, so lässt dies auf ein Zurückkehren des Systems in die Ausgangskonfiguration schließen.

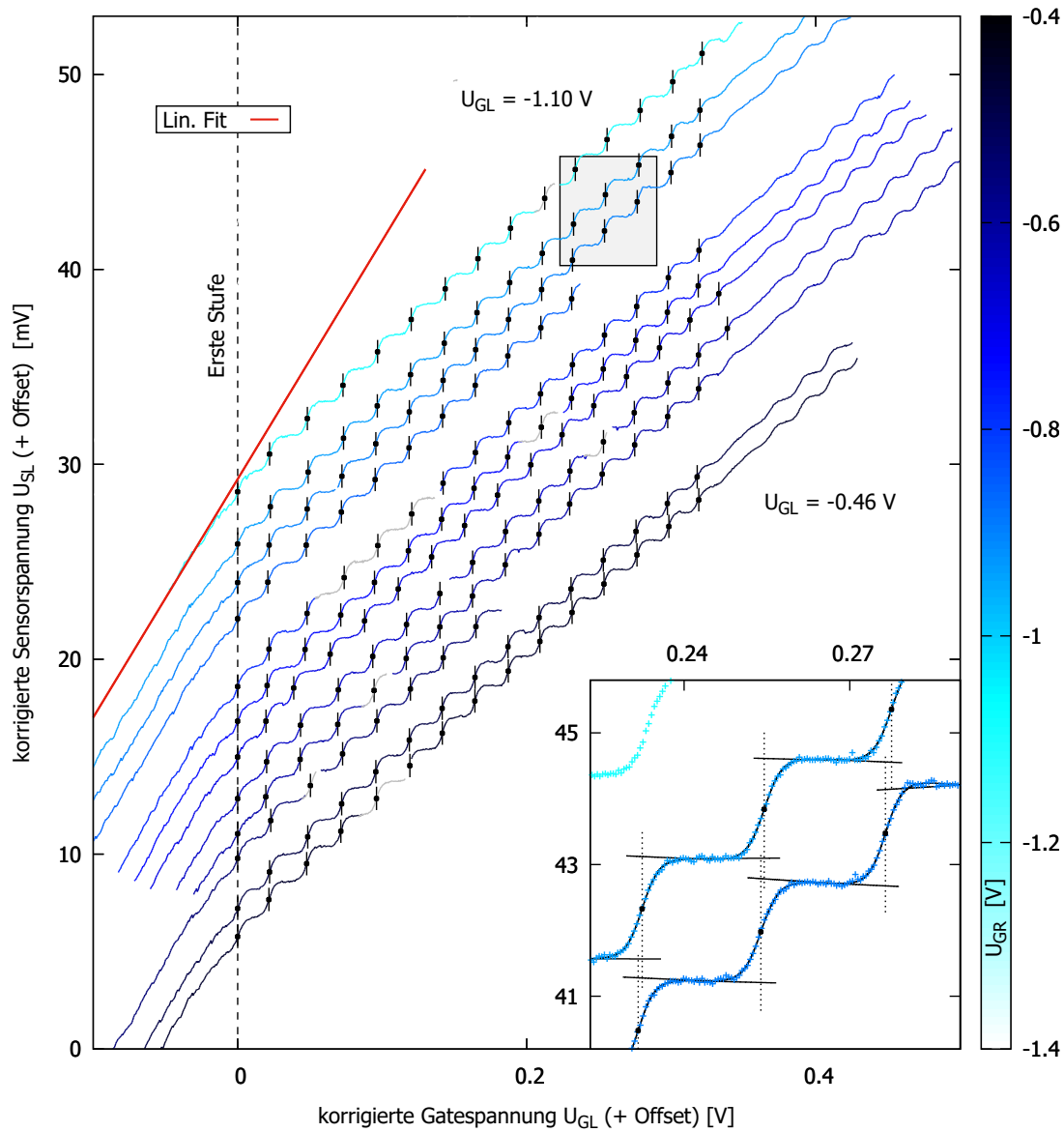


Abb. 8.20.: Kompensierte Sensordaten der Elektrometermessung am linken Quantenpunkt für verschiedene Potentiale U_{GR} ; *Inset:* Bestimmung der jeweiligen Umladungspositionen durch Anfitzen von Stufenfunktionen.

8. Messungen

eine Funktion der Form von Gleichung 8.15 angefitet. Abbildung 8.20 zeigt eine Auswahl der auf diese Weise aufbereiteten Messdaten. Dabei sind die Positionen der ersten erkennbaren Ladungsstufen durch eine entsprechende Verschiebung in U_{GL} -Richtung zur Deckungsgleichheit gebracht. Mit dem Verschwinden der Ladungsstufen geht eine signifikante Zunahme der mittleren Kennliniensteilheit einher. Trotz des verhältnismäßig schmalen Übergangsbereichs zwischen den beiden charakteristischen Regimen lässt sich nicht ausschließen, dass weitere Umladungen durch das zunehmende Messwertrauschen überdeckt werden und somit unerkant bleiben. Dies erschwert in manchen Fällen eine korrekte Zuordnung von absoluten Ladungszahlen zu den jeweiligen Kennlinienstufen.

Auswertung

Abbildung 8.21 zeigt eine Übersicht der angefiteten Umladungspotentiale für verschiedene Potentiale am rechten Steuergate GR . Zugunsten einer besseren Vergleichbarkeit der einzelnen Spektren, wurden diese mittels individueller Offsetkorrektur an der jeweils ersten Ladungsstufe ausgerichtet. Die grau dargestellten Datenpunkte stammen dabei aus manipulierten Kennliniensegmenten mit gesprungener Konfiguration und finden keine weitere Berücksichtigung.

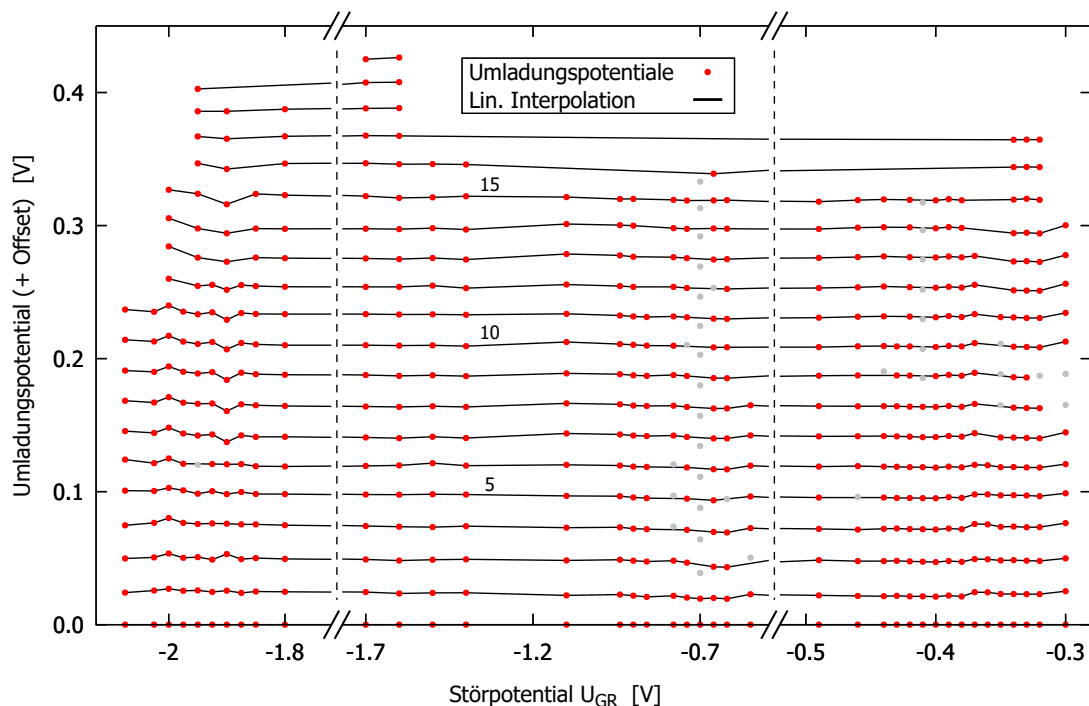


Abb. 8.21.: Durch Anfiten von Stufenfunktionen bestimmte Umladungspotentiale am linken Quantenpunkt in Abhängigkeit des rechten Steuergatepotentials U_{GR}

Ein Nachteil dieser Darstellung besteht in einer starken Abhängigkeit von der Genauigkeit, mit welcher das als Referenz gewählte Umladungspotential bestimmt werden kann. In einigen Kennlinien ist die erste erkennbare Ladungsstufe nur schwach ausgeprägt und deren Parametrisierung folglich mit größeren Unsicherheiten verbunden. Durch die signifikante Änderung der mittleren Kennliniensteilheit in diesem Übergangsbereich muss außerdem die Eignung der angesetzten Fitfunktion¹⁶ kritisch hinterfragt werden. Die ermittelte Unsicherheit für die Umladungspotentiale ist stets kleiner als 0,3% des relativen Abstands zweier benachbarter Stufen, was auf eine gute Messqualität schließen lässt. Einzelne Spektren (z. B. $U_{GR} = -1,9\text{ V}$) zeigen im Vergleich zu ihren Nachbarn eine kollektive Verschiebung mehrerer Energieniveaus. Dies könnte auf unerkannt gebliebene Konfigurationssprünge innerhalb der betreffenden Kennlinie zurückzuführen sein.

Abbildung 8.22 zeigt die relativen Abstände der Umladungspotentiale $\Delta U_{GL,n}$ (bezogen auf die Stufen n und $n + 1$) in Abhängigkeit der Quantenpunktladung. Zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung wurden die einzelnen Spektren anhand der jeweils anliegenden Steuergatespannung U_{GR} auf drei Felder aufgeteilt. Die lineare Interpolation zwischen den einzelnen Datenpunkten soll dabei eine Unterscheidung der jeweiligen Kennlinien erleichtern und spiegelt keine physikalische Information wider. Grau eingefärbte Punkte indizieren einen Konfigurationssprung im Bereich zwischen den betreffenden Stufen und sind daher potentiell fehlerbehaftet (siehe Abb. 8.19, Inset). Bei einem Vergleich der Datensätze sind Gruppen mit jeweils ähnlichen spektralen Eigenschaften zu erkennen. So weisen einige Verläufe übereinstimmende Minima für die Stufenabstände 5–6 bzw. 11–12 und gleichzeitig ein markantes Maximum für den Abstand der Übergänge 14–15 auf. Mehrere Kennlinien aus dem Regime mit stark negativen Störpotentialen (Abb. 8.22 unten) zeigen zwar einen nahezu identischen Verlauf, sind jedoch relativ zueinander um eine Stufenposition verschoben. Dies könnte ein Indiz für eine unerkannt gebliebene erste Umladung und einer demzufolge falsch zugeordneten Elektronenzahl sein. Tendenziell nimmt der mittlere Stufenabstand mit steigender Ladungszahl ab, was mit einer Änderung der Gatekapazität C_{GL} erklärt werden kann (vgl. Abschnitt 8.2). Generell ist keine kontinuierliche Änderung der Ladungsstufenabstände bei einer Variation des rechten Steuergatepotentials U_{GR} zu erkennen¹⁷. Vielmehr wird ein zufälliges Springen zwischen zwei verschiedenen Grundkonfigurationen mit jeweils ähnlichen, charakteristischen spektralen Eigenschaften beobachtet. Dies deutet darauf hin, dass über das Störpotential am weiter entfernten Gate GR primär die Ausdehnung der Ladungsinsel und weniger deren größen-spezifische Geometrie variiert wird (siehe Abb. 8.18). Die „Wirkung“ beider Steuergates auf die Quantenpunktform ist offenbar ähnlich, wenngleich mit deutlich unterschiedlicher Empfindlichkeit (Konvertierungsfaktor α).

Die orange dargestellten Korridore markieren die von der *Random Matrix Theorie* (siehe Abschnitt 2.3.4) prognostizierte mittlere Abstandsfluktuation (Standardabweichung). Gemäß Gleichung 2.31 entspricht diese ungefähr der halben gemittelten Energiediffe-

¹⁶Diese berücksichtigt eine der Stufe überlagerte, konstante Kennliniensteigung (lineares Polynom)

¹⁷Das Störpotential bewirkt eine kollektive Verschiebung der Umladungspositionen in Bezug auf U_{GL}

8. Messungen

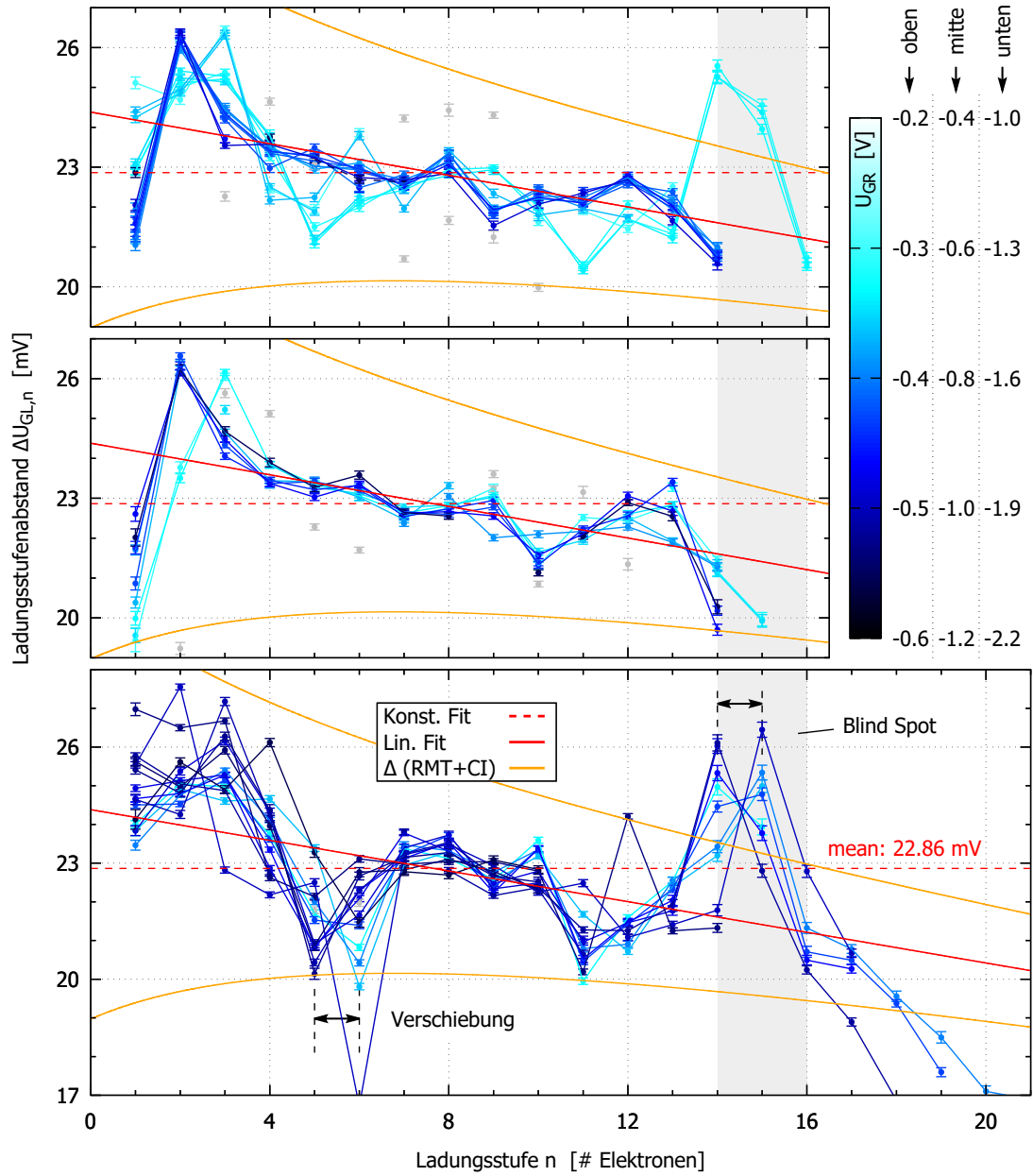


Abb. 8.22.: Potentialdifferenz zwischen benachbarten Umladungen in Abhängigkeit der Quantenpunktladung für verschiedene Steuertgatepotentiale U_{GR}

renz zweier benachbarter Einteilchenzustände ΔE . Das *Weyl'sche Gesetz*¹⁸ erlaubt eine Abschätzung anhand der Fläche des Quantenpunkts A :

$$\langle \Delta E \rangle \approx \frac{2\pi\hbar^2}{g_s m^*} \frac{1}{A(n)} \quad (8.19)$$

Der Faktor $g_s = 2$ berücksichtigt dabei eine zweifache Spinrentartung der einzelnen Energieniveaus. Die von den Gatepotentialen abhängige Dotgröße kann näherungsweise aus den zuvor simulierten Potentialverläufen im 2DEG gewonnen werden. Aufgrund des verhältnismäßig flachen Potentialprofils am Verarmungszonenrand und der daraus resultierenden „Kontur-Unschärfe“ ist dies jedoch mit einer entsprechenden Unsicherheit verbunden. Die Quantenpunktfäche innerhalb der als Begrenzung angenommenen $-0,1$ mV-Äquipotentiallinie variiert in Abbildung 8.18 im Fall $U_{GR} = -0,5$ mV zwischen $0,084 \mu\text{m}^2$ (links) und $0,024 \mu\text{m}^2$ (rechts). Durch Multiplikation mit dem Faktor $e\alpha$ werden die berechneten Erwartungswerte für die Energiefluktuationen schließlich in äquivalente Gatespannungen konvertiert. Vor allem im Regime kleiner Besetzungszahlen liegen die Abweichungen von der mittleren Additionsenergie unterhalb der RMT-Prognose. Darüber hinaus wird keine tendenzielle Abschwächung der Fluktuation mit größer werdender Besetzungszahl beobachtet.

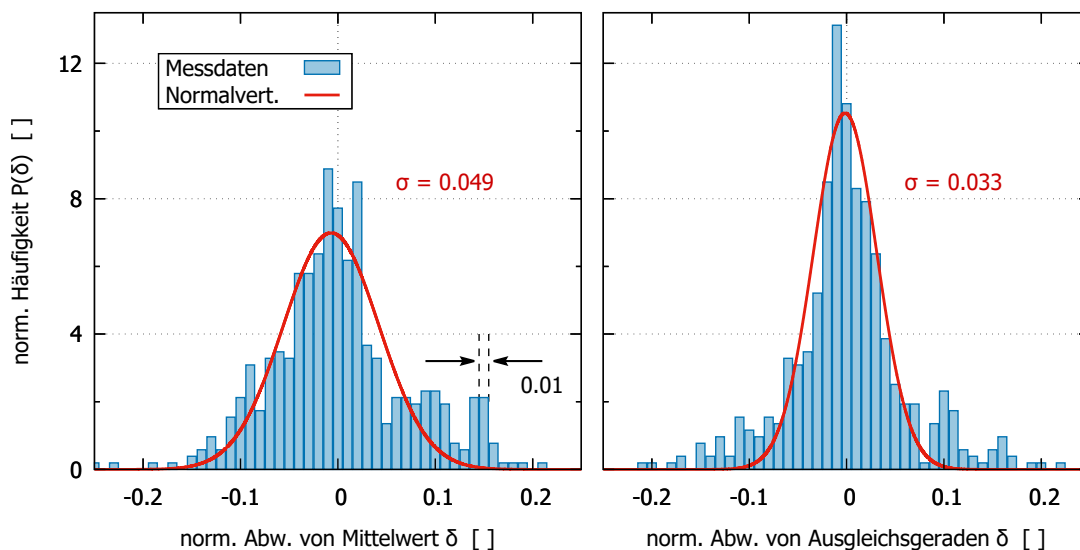


Abb. 8.23.: Verteilung der ausgewerteten Stufenabstände aller Kennlinien in Bezug auf den arithmetischen Mittelwert (*links*) bzw. die Ausgleichsgeraden (*rechts*)

Abbildung 8.23 illustriert die statistische Verteilung $P(\delta)$ der insgesamt 516 ausgewerteten Ladungsstufenabstände in Form von Histogramm-Darstellungen. Als Bezugswert für die

¹⁸GUTZWILLER, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*.

Normierung wurde links der arithmetische Mittelwert und rechts die zuvor berechnete lineare Regression gewählt (siehe Abb. 8.22).

$$\delta = \frac{\Delta U_{\text{GL}} - \langle \Delta U_{\text{GL}} \rangle}{\langle \Delta U_{\text{GL}} \rangle} \quad (8.20)$$

Beide Häufigkeitsverteilungen lassen sich näherungsweise durch Gauß-Kurven beschreiben. Diese Eigenschaft deutet auf nicht korrelierte Eigenzustände hin und ist typisch für Systeme, bei denen eine Variation der Gatespannung die Dotgeometrie beeinflusst¹⁹. Aufgrund der damit einhergehenden kontinuierlichen Modifikation des Einteilchenspektrums äußert sich die zweifache Spinrentartung sämtlicher Niveaus nicht in Form systematisch kleinerer Additionsenergien für jedes zweite Elektron. Die berechneten Standardabweichungen der Verteilungen liegen leicht unterhalb der von anderen Gruppen bestimmten Fluktuationen in vergleichbaren Systemen^{20,21}.

8.4.4. Nichtlineare Sensormessung

Im folgenden Abschnitt wird eine nichtlineare Ladungsmessung am linken Quantenpunkt mittels aktiv geregelter Sensor präsentiert. Hierbei wurde eine variable Drain-Gleichspannung über einen Tiefpass an Mesakontakte 13 angelegt. Aufgrund des im untersuchten Regime nicht messbaren Tunnelstroms wurde auf den Anschluss eines Transimpedanzverstärkers verzichtet und der Source-Kontakt 6 stattdessen direkt an der Messkabelanschlussbox geerdet²². Die Kopplung des Dots an die Reservoirs erfolgt wie schon bei der zuvor durchgeführten Untersuchung asymmetrisch.

Abbildung 8.24 zeigt eine Schar von Sensorkennlinien über jeweils drei Ladungsstufen für unterschiedliche Drain-Source-Gleichspannungen. Die Besetzung des Quantenpunkts liegt im Bereich von ca. 10 Elektronen²³. Zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung sind diese durch einen Offset in U_{SL} -Richtung voneinander separiert. Sowohl Gate- als auch Sensorspannung wurden hierbei analog zu den vorherigen Messungen korrigiert. Aufgrund temporärer Konfigurationssprünge der Probe sind nicht alle aufgezeichneten Kennlinien auswertbar. Die betreffenden Datensätze wurden daher zunächst selektiert und verworfen. Allen dargestellten Messkurven sind Funktionen der selben Form wie in Gleichung 8.17 angefügt. Exemplarisch wurde jeweils das Stufenzentrum der mittleren Umladung markiert. Eine Auswertung der Fitparameter b (siehe Inset) zeigt dabei wie erwartet ein Minimum der Kantenverschmierung bei $U_{\text{ds}} = 0 \text{ V}$. In diesem Fall ergibt

¹⁹VALLEJOS, LEWENKOPF und MUCCILO, „Coulomb Blockade Peak Spacing Fluctuations in Deformable Quantum Dots: A Further Test of Random Matrix Theory“.

²⁰SIMMEL u. a., „Statistics of the Coulomb-blockade peak spacings of a silicon quantum dot“.

²¹SIVAN u. a., „Mesoscopic Fluctuations in the Ground State Energy of Disordered Quantum Dots“.

²²Im Vergleich zur nichtlinearen Leitwertmessung in Abschnitt 8.2.1 sind Source- und Drain-Kontakt vertauscht.

²³Schätzwert auf Grundlage vergleichbarer Sensorkennlinien mit ausgedehntem Messbereich

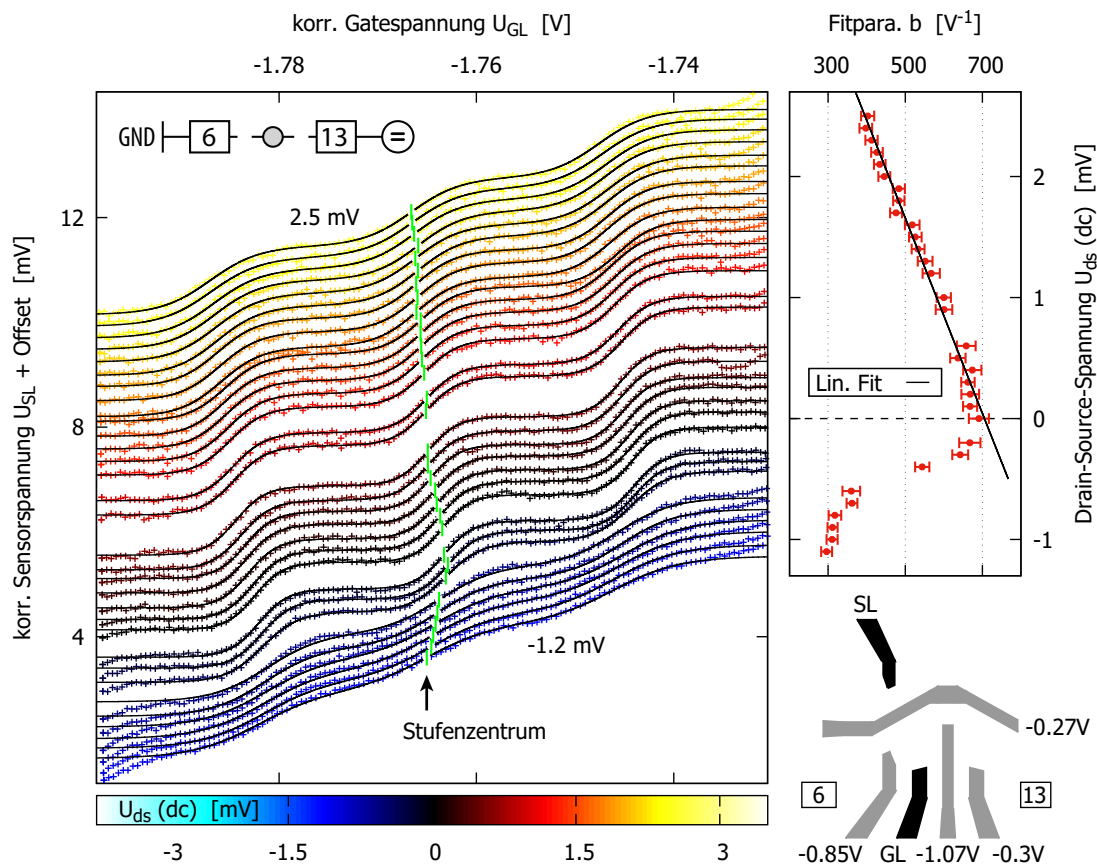


Abb. 8.24.: Links: Nichtlineare Sensormessung am linken Quantenpunkt ohne Wechselspannung (direkte Leitwertmessung) bei asymmetrischer Kopplung des Dots an die Reservoirs. Rechts: Abhängigkeit der Stufenausprägung von der Drain-Source-Gleichspannung; Übersicht der angelegten Gatespannungen.

8. Messungen

sich demnach kein Hinweis auf einen zusätzlichen dc-Offset, welcher mit der Verwendung des Transimpedanzverstärkers korreliert ist. Auffallend ist die deutliche Asymmetrie des Verbreiterungsverlaufs. Während für positive Drain-Source-Spannungen eine näherungsweise lineare Abhängigkeit des Parameters b besteht, fällt dieser bei umgekehrtem Vorzeichen hingegen unerwarteterweise stufenartig ab.

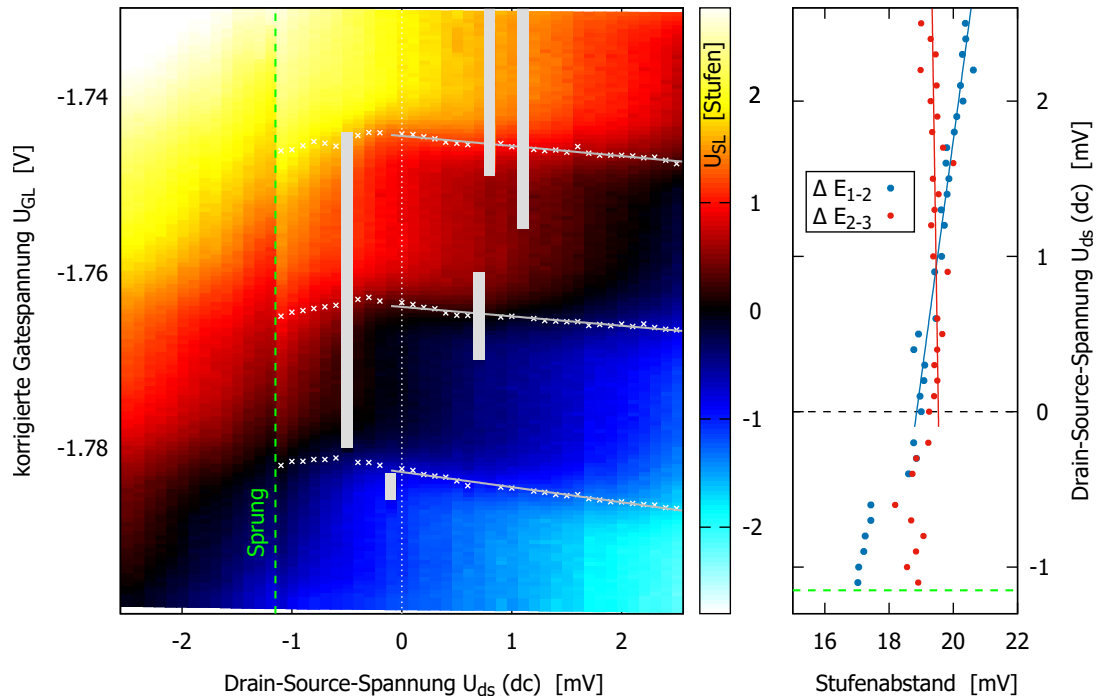


Abb. 8.25.: *Links:* Nichtlineare Sensormessung am linken Quantenpunkt ohne Wechselspannung bei asymmetrischer Kopplung des Dots an die Reservoirs. *Rechts:* Abhängigkeit des Stufenabstandes von der Drain-Source-Gleichspannung

Abbildung 8.25 zeigt in zweidimensionaler Darstellung die Abhängigkeit der Sensorregelspannung U_{SL} vom Gatepotential U_{GL} und der angelegten Drain-Source-Gleichspannung U_{ds} . Regionen im Kennlinienfeld in denen während der Messung temporäre Konfigurationsübergänge auftraten sind grau markiert. An der grün gekennzeichneten Kante ist ein „Sprung“ zwischen zwei unterschiedlichen, langzeitstabilen Zuständen zu erkennen, welcher möglicherweise auf die Umladung einer Störstelle zurückzuführen ist. Innerhalb der Coulomb-Nebenrauten wird die mittlere Besetzung eines Zustands im Intervall $[\varepsilon_d : \varepsilon_s]$ bei asymmetrischer Reservoirkopplung maßgeblich durch den Kontakt mit der höheren Tunnelrate (Source) bestimmt. Bei der vorliegenden Konfiguration wird die maximale Ladungsänderung somit nahe der Rautengrenzen mit negativer Steigung ($\mu_{\text{Dot}} \approx \varepsilon_s$) erwartet (siehe Abb. 2.8). Dies erlaubt letztlich eine Abschätzung der Source-Kapazität anhand Gleichung 8.5. Die weiß dargestellten Punkte markieren die aus Abbildung 8.24

extrahierten Stufenzentren. Die Gatekapazität kann aus dem gemittelten Stufenabstand im linearen Bereich $U_{ds} \approx 0$ über Gleichung 8.4 berechnet werden:

$$\Delta U_g = 19,1 (\pm 0,2) \text{ mV} \quad \rightarrow \quad C_g = \frac{e}{\Delta U_g} = 8,3 (\pm 0,1) \text{ aF} \quad (8.21)$$

$$\left. \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right|_{\underline{6}} = -1,3 (\pm 0,3) \quad \rightarrow \quad C_s = -C_g \left. \frac{dU_g^-}{dU_{ds}} \right|_{\underline{6}} = 10,9 (\pm 2,5) \text{ aF} \quad (8.22)$$

Im Vergleich zur nichtlinearen Messung aus Abschnitt 8.2.1 ergibt sich eine ca. 15-fach kleinere Reservoirkapazität. Diese kann auf die deutlich schlechtere Ankopplung aufgrund weiter abgeschnürter Quantenpunktkontakte zurückgeführt werden. Die Gatekapazität weicht hingegen trotz des vergleichsweise größeren Gatepotentials nur geringfügig ab. Bei einer näheren Betrachtung der einzelnen Stufenabstände zeigt sich ferner eine Abhängigkeit von der Drain-Source-Gleichspannung. Die leicht unterschiedlichen Steigungen der angefitteten Rautenbegrenzungen lassen auf eine Veränderung der entsprechenden Dotkapazitäten schließen. Für betragsmäßig hohe Drain-Potentiale muss dabei jedoch ein tendenziell größerer Fehler für die ermittelten Fitfunktionen angenommen werden. Durch die zunehmende Verbreiterung der Stufen lappen diese mehr und mehr über, sodass für eine korrekte Beschreibung im Randbereich jeweils eine weitere Umladung berücksichtigt werden müsste. Darüber hinaus muss abseits des linearen Bereichs die Eignung des angesetzten Modells zur Beschreibung des im Mittel partiell besetzten Quantenpunkts kritisch hinterfragt werden (siehe Abschnitt 8.4.1).

Aufgrund eines markanten Konfigurationssprungs und der stark verbreiterten Ladungsstufen eignet sich der Kennlinienbereich mit negativen Drain-Source-Spannungen nicht für eine quantitative Auswertung. Allgemein stellen nichtlineare aktive Sensormessungen besonders hohe Anforderungen an die Probenstabilität. Bedingt durch die permanente Nachführung des Arbeitspunktes nimmt die Aufnahme eines Einzelmesswerts im Durchschnitt ca. 5 Sekunden in Anspruch. Bei einer Auflösung von in diesem Fall 51×189 Datenpunkten ergibt sich somit eine gesamte Messdauer von über 13 Stunden.

9 Kapitel 9.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Messung von Quantenpunkt-Energiespektren im Regime kleiner Besetzungszahlen mittels QPC-Ladungssensoren. Die dabei untersuchten Proben basieren auf einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur, welche in einer Tiefe von ca. 90 nm unter der Waferoberfläche ein zweidimensionales Elektronengas ausbildet. Bei der Präparation wurde mittels optischer Lithographie zunächst eine Mesa-Geometrie nasschemisch geätzt und das 2DEG durch Einlegieren einer eutektischen AuGe-Legierung im Randbereich kontaktiert. Die Definition des Quantensystems erfolgte durch lokale, elektrostatische Verarmung des 2DEGs unter mehreren, mittels Elektronenstrahlithographie strukturierter Top-Gates. Zur Minimierung der thermischen Verbreiterung wurden die Proben in einem $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten bei einer Basistemperatur von $T < 90$ mK (Elektronentemperatur $T_e \lesssim 300$ mK) vermessen.

Die charakterisierten Nanostrukturen bestehen aus einer Serienanordnung zweier Quantendots, welche durch ein Trenngate galvanisch von den als Sensoren fungierenden Quantenpunktkontakten isoliert sind. Das angewandte Detektionsprinzip beruht auf der hohen Empfindlichkeit des QPC-Leitwerts für Potentialänderungen im Kanalbereich, wie diese beispielsweise durch Dotumladungen im direkten Umfeld induziert werden. In Analogie zur vorausgegangenen Arbeit von D. Schefzyk wurde der Sensorleitwert während einer Messung auf einen festen Arbeitspunkt mit möglichst großer lokaler Kennliniensteilheit geregelt. Als eigentlicher Messwert diente das hierzu kontinuierlich adaptierte Gatepotential, woraus sich eine quasi beliebige Ausdehnung des zur Verfügung stehenden Messbereichs ergab. Dieser ist bei passivem Sensorbetrieb (festes Gatepotential) grundsätzlich durch die jeweils nächsten Leitwertstufen begrenzt. Jede Änderung der Quantenpunktbesetzung ist mit einem markanten Sprung der Sensorregelspannung korreliert. Die thermisch verbreiterte Stufenform kann in guter Näherung durch eine invertierte Fermi-Verteilung beschrieben werden. Systematische Untersuchungen zeigten dabei eine starke Abhängigkeit der Kantenausprägung von den Reservoir-Kopplungsverhältnissen des Quantenpunkts bei gleichzeitiger differentieller Leitwertmessung. Im Fall einer starken Anbindung an das oszillierende Drain-Potential wurde bei entsprechend großen Spannungsamplituden ein fast vollständiges Verschwinden der Ladungsstufen beobachtet. Bei einem Vergleich der Quantenpunkt-Tunnelströme mit den Sensordaten zeigte sich eine relative Verschiebung

9. Zusammenfassung

zwischen den Peakpositionen des Leitwerts und den angefütteten Ladungsstufenzentren. Gestützt durch numerische Simulationen konnte dieses Phänomen auf eine messtechnisch bedingte Drain–Source–Offsetspannung in Kombination mit einer asymmetrischen Reservoirankopplung zurückgeführt werden.

Aus den Differenzen benachbarter Umladungspotentiale lassen sich die Additionsenergien in Abhängigkeit der Quantenpunktbesetzung berechnen. Die gute Qualität der Messdaten hinsichtlich des Rauschverhaltens und der Auflösung erlaubte dabei den Nachweis einer reproduzierbaren, charakteristischen Struktur in den Niveauabständen. Ferner wurde das Quantenpunktspektrum im Regime weniger Ladungselektronen in Abhängigkeit eines parametrisch veränderten Störpotentials untersucht. Dieses zeigte keinen systematischen Einfluss auf die Abstandssignatur. Stattdessen wurde ein Springen zwischen zwei scheinbar stabilen Konfigurationen mit jeweils charakteristischer Kennlinie festgestellt. Eine statistische Auswertung sämtlicher Niveauabstände ergab eine näherungsweise gaußförmige Verteilung um den arithmetischen Mittelwert. Diese Eigenschaft deutet auf nicht–korrelierte Eigenzustände hin und ist typisch für Systeme, bei denen die Quantenpunktform durch das Gatepotential modifiziert wird.

Ein weiterer Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit Simulationen zur effektiven Dosisverteilungen bei der Elektronenstrahlolithographie. Unter Berücksichtigung des Proximity–Effekts und gerätespezifischer Abweichungen von einer idealen Strahlführung konnte anhand verschiedener Versuchsreihen ein Modell zur Parametrisierung des Schreibprozesses abgeleitet werden. In Abhängigkeit verschiedener Belichtungsparameter (Zieldosis, Strahlstrom, Rasterauflösung) lassen sich für beliebige Patternfiles Vorhersagen über die resultierenden Lackstrukturen treffen und etwaige Formverzerrungen im Voraus kompensieren. Unter Anwendung der numerisch bestimmten Korrekturfaktoren konnte die erforderliche Anzahl an Probelichtungen für neue Geometrien drastisch reduziert und damit die Effizienz bei der Probenherstellung gesteigert werden. Darüber hinaus wurde ein Algorithmus entwickelt, mit welchem sich die effektiven Potentiale und Ladungsverteilungen innerhalb eines zweidimensionalen Elektronengases für beliebige Gatedesigns näherungsweise berechnen lassen. Auf Grundlage der prognostizierten Quantenpunktkonturen können die Nanostrukturen hinsichtlich der gewünschten Einschlusspotentiallandschaft formoptimiert und die Auswirkung unterschiedlicher Gatepotentiale simuliert werden.

Ausblick: Die gewonnenen Ergebnisse belegen die hervorragende Eignung des angewandten elektrometrischen Messverfahrens zur exakten Bestimmung von Umladungspotentialen in Quantenpunkten. Ein nächster, konsequenter Schritt besteht in der gezielten Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Form eines Dots und seinem Energiespektrum. Die entwickelten Simulations–Tools schaffen die Voraussetzungen für das Design von Gatestrukturen, die eine signifikante Modifikation der Ladungsinselkontur unter Beibehaltung der Elektronenbesetzung ermöglichen. Interessant wäre dabei vor allem die Charakterisierung des Übergangsbereichs zwischen rotationssymmetrischen Einschlusspotentialen mit geordneten Spektren und quantenchaotischen Systemen.

A

Anhang A.

Bestimmung der Kondensatorladungen in Quantenpunktsystemen

A.1. Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Die Ladungen auf den Koppelkondensatoren können in Abhängigkeit der Ladungskonfiguration des Systems sowie der angelegten Reservoirpotentiale bestimmt werden. Hierzu lässt sich unter Anwendung der Kirchhoffschen Maschenregel ein lineares Gleichungssystem für die jeweiligen Potentialabfälle entlang geschlossener Pfade aufstellen. Dabei werden zwei unterschiedliche Maschentypen berücksichtigt:

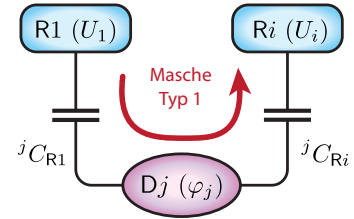
Typ 1: *Reservoir 1 – Dot j – Reservoir i*. Der Pfad wird über den gemeinsamen Massebezug der beiden Spannungsquellen geschlossen.

Typ 2: *Reservoir 1 – Dot i – Dot j*. Als Bezugspunkt dient jeweils ein gemeinsames, beliebiges Reservoirpotential.

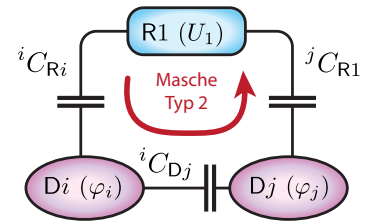
Als Randbedingung muss die Ladungssumme aller mit einem Quantenpunkt verbundenen Kapazitäten stets der jeweiligen Dotladung entsprechen. Das resultierende LGS hat dann die folgende Form:

A. Bestimmung der Kondensatorladungen in Quantenpunktsystemen

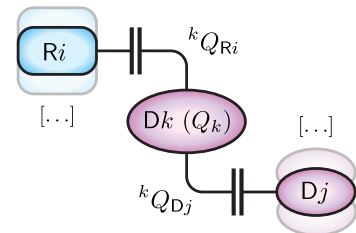
$$\begin{array}{l} \text{Dot 1} \\ \dots \\ \text{Dot d} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} U_1 - \frac{1Q_{R1}}{1C_{R1}} + \frac{1Q_{R2}}{1C_{R2}} - U_2 = 0 \\ \dots \\ U_1 - \frac{1Q_{R1}}{1C_{R1}} + \frac{1Q_{Rr}}{1C_{Rr}} - U_r = 0 \\ \dots \\ U_1 - \frac{dQ_{R1}}{dC_{R1}} + \frac{dQ_{R2}}{dC_{R2}} - U_2 = 0 \\ \dots \\ U_1 - \frac{dQ_{R1}}{dC_{R1}} + \frac{dQ_{Rr}}{dC_{Rr}} - U_r = 0 \end{array} \right.$$



$$\begin{array}{l} \text{Dot 1} \\ \dots \\ \text{Dot d-1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} U_1 - \frac{1Q_{R1}}{1C_{R1}} + \frac{1Q_{D2}}{1C_{D2}} + \frac{2Q_{R1}}{2C_{R1}} - U_1 = 0 \\ \dots \\ U_1 - \frac{1Q_{R1}}{1C_{R1}} + \frac{1Q_{Dd}}{1C_{Dd}} + \frac{dQ_{R1}}{dC_{R1}} - U_1 = 0 \\ \dots \\ \text{Dot d-1} : U_1 - \frac{d-1Q_{R1}}{d-1C_{R1}} + \frac{d-1Q_{Dd}}{d-1C_{Dd}} + \frac{dQ_{R1}}{dC_{R1}} - U_1 = 0 \end{array} \right.$$



$$\begin{array}{l} \text{Dot 1} \\ \dots \\ \text{Dot d} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} : \sum_{i=1}^r 1Q_{Ri} + \sum_{j=2}^d 1Q_{Dj} + n_1 |e| = 0 \\ \dots \\ \text{Dot d} : \sum_{i=1}^r dQ_{Ri} + \sum_{j=1}^{d-1} dQ_{Dj} + n_d |e| = 0 \end{array} \right.$$



Die Gesamtzahl der voneinander linear unabhängigen Gleichungen beträgt demnach für ein vollständig vernetztes System mit d Quantenpunkten und r Kontakten:

$$\begin{aligned} z &= \underbrace{d \cdot (r-1)}_{\text{Maschentyp 1}} + \underbrace{(d-1) + (d-2) + [\dots] + 1}_{\text{Maschentyp 2}} + d \\ &= dr + \frac{d^2 - d}{2} \end{aligned}$$

Dies entspricht exakt der Anzahl im Gesamtsystem enthaltener Kapazitäten, womit das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

A.2. Lösungsstrategie

Die Lösung des Gleichungssystems per Gaußschem Eliminationsverfahren ist vor allem für größere Systeme mit einem signifikanten Rechenaufwand verbunden. Eine jeweils unabhängige Diagonalisierung der beschreibenden Matrix für sämtliche Variablen und Systemzustände wäre daher in höchstem Maße ineffizient. Die Einträge der Koeffizientenmatrix A des LGS stellen konstante Systemeigenschaften (Kapazitäten) dar und bleiben daher über einen Programmdurchlauf hinweg unverändert. Sei \mathbf{b} der durch die jeweiligen Quellpotentiale U_i und Ladungskonfigurationen \mathbf{n}_i gegebene rechte Spaltenvektor des Gleichungssystems und \mathbf{q} der Lösungsvektor mit den einzelnen Kondensatorladungen. Durch beidseitige Multiplikation mit der inversen Matrix A^{-1} erhält man:

$$A\mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (\text{A.1})$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{= I_z} \mathbf{q} = A^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{A.2})$$

Die Berechnung der Kondensatorladungen für beliebige Randbedingungen kann somit auf eine einfache Matrixmultiplikation zurückgeführt werden, was eine drastische Reduktion der effektiven Rechenzeit bedeutet¹.

¹Die Invertierung der Matrix erfolgt einmalig nach der Initialisierung des Quantenpunktsystems. Der verwendete Algorithmus basiert auf einer Diagonalisierung von A bei simultaner Anwendung der einzelnen Rechenoperationen auf die Einheitsmatrix I_z

B

Anhang B.

Parameter Probenherstellung

Herstellungsparameter: Mesa		
Prozess	Beschreibung	Zeit
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–
Dehydrieren	Backen im Ofen bei 160 °C	5 min
Optische Lithografie	Haftvermittler HMDS, nach Einwirkzeit abschleudern	30 s
	Belacken mit <i>maN-1410</i> , Schleuderparameter 6000:5:40	–
	Backen auf Heatplate bei 100 °C	90 s
	Belichten	11 s
	Backen auf Heatplate bei 80 °C (<i>Post-Exposure-Bake</i>)	60 s
	Entwickeln in <i>maD-533</i> , Spülen mit demin. H ₂ O	25 s
Veraschen	O ₂ -Plasma bei 0,5 mbar Druck und 100 W Leistung	25 s
Ätzen	Backen auf Heatplate bei 85 °C (<i>Hard-Bake</i>)	5 min
	Vermessen der Lackhöhe mittels Profilometer	–
	HCl-Dip in 37%-iger Salzsäure, Spülen mit demin. H ₂ O	10 s
	Ätzlösung H ₂ O:H ₂ SO ₄ :H ₂ O ₂ (Verhältnis 100:3:1)	60-90 s
	Spülen mit demin. H ₂ O	–
	Bestimmen der Ätztiefe mittels Profilometer (60-90 nm)	–
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–

B. Parameter Probenherstellung

Herstellungsparameter: Ohmsche Kontakte		
Prozess	Beschreibung	Zeit
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–
Dehydrieren	Isopropanol, nach Einwirkzeit abschleudern	20 s
Optische Lithografie	Belacken mit <i>maP-1215</i> , Schleuderparameter 6000:5:40	–
	Backen auf Heatplate bei 90 °C	3 min
	Belichten	25 s
	Backen auf Heatplate bei 80 °C (<i>Post-Exposure-Bake</i>)	60 s
	Entwickeln in <i>maD-331</i> , Spülen mit demin. H ₂ O	25 s
Veraschen	O ₂ -Plasma bei 0,5 mbar Druck und 100 W Leistung	25 s
Strukturieren	HCl-Dip in 37%-iger Salzsäure, Spülen mit demin. H ₂ O	10 s
	Aufdampfen: AuGe (190 nm), Ni (80 nm), Au (30 nm)	–
	<i>Lift-Off</i> in Aceton (ggf. Ultraschall)	–
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–
Einlegieren	Legierofen bei 420 °C und 300 mbar, Prozessgas Ar:H ₂ (80:20), siehe Abb. 3.7	30 s

Herstellungsparameter: Bondpads und Zuleitungen		
Prozess	Beschreibung	Zeit
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–
Dehydrieren	Isopropanol, nach Einwirkzeit abschleudern	20 s
Optische Lithografie	Belacken mit <i>maP-1215</i> , Schleuderparameter 6000:5:40	–
	Backen auf Heatplate bei 90 °C	3 min
	Belichten	25 s
	Backen auf Heatplate bei 80 °C (<i>Post-Exposure-Bake</i>)	60 s
	Entwickeln in <i>maD-331</i> , Spülen mit demin. H ₂ O	25 s
Veraschen	O ₂ -Plasma bei 0,5 mbar Druck und 100 W Leistung	40 s
Strukturieren	HCl-Dip in 37%-iger Salzsäure, Spülen mit demin. H ₂ O	10 s
	Aufdampfen: – Zuleitungen: Cr (10 nm), Au (30 nm) – Bondpads: Cr (20 nm), Au (150 nm)	–
	<i>Lift-Off</i> in Aceton (ggf. Ultraschall)	–
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–

Herstellungsparameter: Nanostrukturen		
Prozess	Beschreibung	Zeit
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–
Dehydrieren	Isopropanol, nach Einwirkzeit abschleudern	20 s
E-Beam Lithografie	Belackten mit <i>PMMA</i> 2042 (2,8%-ig), Schleuderparameter 6000:5:50	–
	Backen auf Heatplate bei 120 °C	3 min
	Backen in Ofen bei 160 °C	1 h
	Belichten mittels REM (Strahlstrom ~14 pA)	–
	Entwickeln in <i>MIBK:IPA</i> (1:3), Spülen mit Isopropanol	21 s
Strukturieren	Aufdampfen: Cr (10 nm), Au (30 nm)	–
	<i>Lift-Off</i> in Aceton (ggf. Ultraschall)	–
Reinigen	Aceton / Isopropanol / trocknen mit N ₂ (g)	–

C Anhang C.

Technische Zeichnungen

Im Folgenden finden sich Konstruktionspläne einiger mechanischer Komponenten, die im Rahmen dieser Arbeit entworfen und eingesetzt wurden. Die Fertigung erfolgte in der institutseigenen Feinmechanikwerkstatt. Zum Erstellen der technischen Zeichnungen wurde die Software *Autodesk Inventor 2016 Professional* verwendet.

C.1. Probendeckel

Seiten X–XIV: Der Probendeckel dient primär zur Abschirmung der Probe vor Wärmestrahlung. Die Wandelemente aus Kupfer sorgen für eine gute thermische Kopplung an den Probenstab. Mittels einer integrierten IR-LED kann die Probe beleuchtet werden.

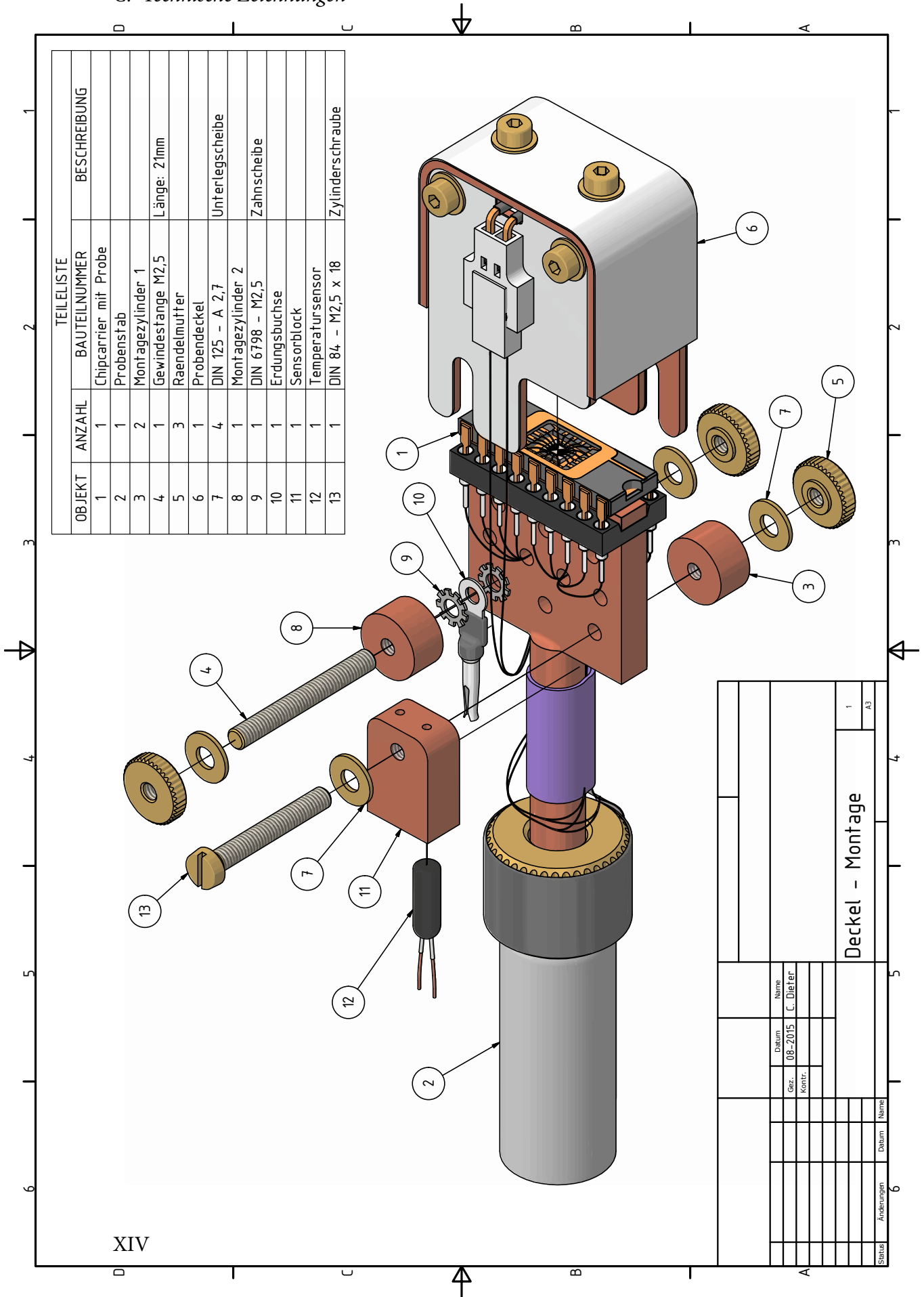
C.2. Erdungsklammer

Seiten XV–XVII: Die Erdungsklammer schließt alle Pins des darin eingesetzten Chip-Carriers miteinander kurz. Dies soll einer Zerstörung der Probe beim Transport infolge elektrostatischer Entladung vorbeugen. Aufgrund der geringen Abstände führen bereits kleine Potentialdifferenzen zu Überschlügen innerhalb der Top-Gate-Struktur. Die Kontaktierung der Probe erfolgt seitlich über Federkontakte.

C.3. IGH-Ventil

Seite XVIII–XIX: Die undichten Ventildeckel wurden durch Eigenkonstruktionen ersetzt. Der ferromagnetische Einsatz wird mit der Hülse von außen hartverlötet, sodass ein O-Ring als Dichtungselement zwischen den beiden Komponenten entfällt.

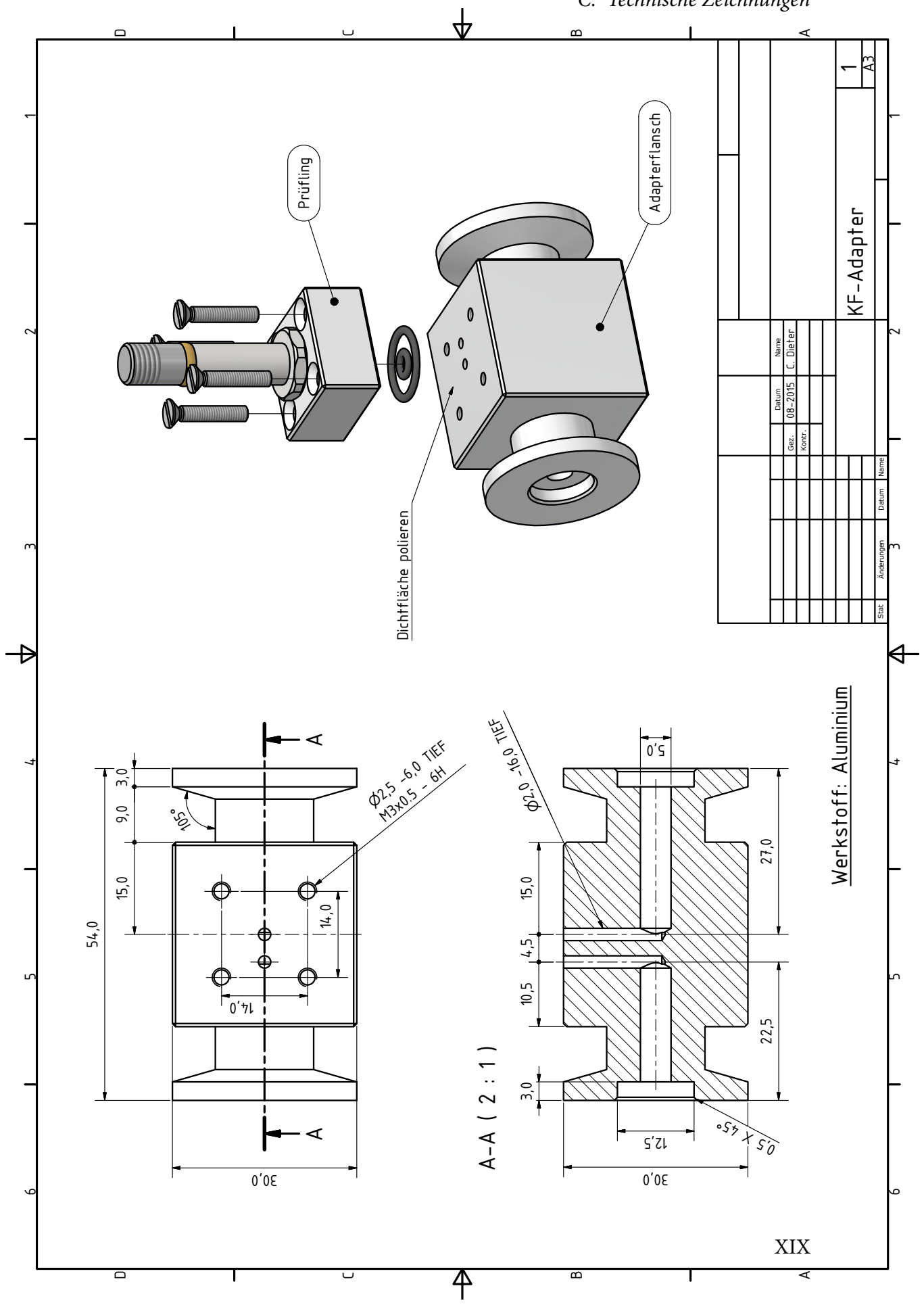
C. Technische Zeichnungen



TEILELISTE			
OBJEKT	ANZAHL	BAUTEILNUMMER	BESCHREIBUNG
1	1	Chipcarrier mit Probe	
2	1	Probenstab	
3	2	Montagezylinder 1	
4	1	Gewindestange M2,5	Länge: 21mm
5	3	Raendelmutter	
6	1	Probendeckel	
7	4	DIN 125 - A 2,7	Unterlegscheibe
8	1	Montagezylinder 2	
9	1	DIN 6798 - M2,5	Zahnscheibe
10	1	Erdungsbuchse	
11	1	Sensorblock	
12	1	Temperatursensor	
13	1	DIN 84 - M2,5 x 18	Zylinderschraube

Datum		Name	
08-2015	C. Dieter		
Gez.	Kontr.		
Deckel - Montage			
1		A3	
Status	Änderungen	Datum	Name

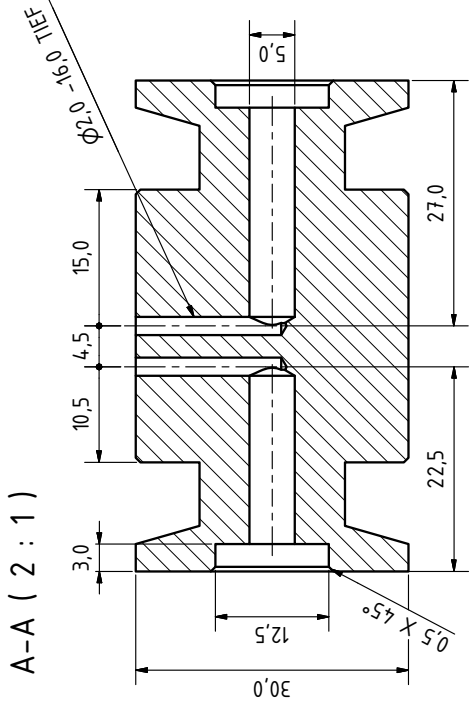
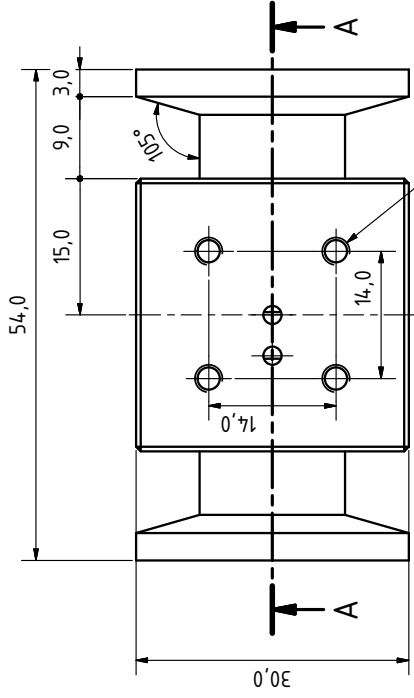
XIV



Prüfling

Adapterflansch

Dichtfläche polieren



Werkstoff: Aluminium

Name		C. Dieter	
Datum		08-2015	
Gez.		[Signature]	
Kontr.		[Signature]	
Titel		KF-Adapter	
Blatt		1	
Anmerkungen		A3	

Symbolverzeichnis

Symb.	Beschreibung	Wert	
R_K	Von-Klitzing-Konstante	25812,807	Ω
e	Elementarladung	$1,602177 \cdot 10^{-19}$	C
g_0	Leitwertsquantum	$7,748092 \cdot 10^{-5}$	S
h	Plancksches Wirkungsquantum	$6,626070 \cdot 10^{-34}$	J·s
k_B	Boltzmann-Konstante	$1,380649 \cdot 10^{-23}$	J/K
m_e	Elektronenmasse	$9,109384 \cdot 10^{-31}$	kg

Literatur

- [1] ADACHI, S. „GaAs, AlAs, and Al_xGa_{1-x}As: Material parameters for use in research and device applications“. In: *Journal of Applied Physics* 58.3 (1985), R1–R29.
- [2] ALHASSID, Y. „The statistical theory of quantum dots“. In: *Rev. Mod. Phys.* 72 (4, Okt. 2000), S. 895–968.
- [3] ALI, K. u. a. „Behaviour of surface states on a GaAs/AlGaAs heterostructure investigated by capacitance spectroscopy“. In: *Superlattices and Microstructures* 25.1 (1999), S. 285–288. ISSN: 0749-6036.
- [4] AMAKAWA, S. u. a. „Single-electron circuit simulation“. In: *IEICE transactions on electronics* 81 (1, Jan. 1998), S. 21–28.
- [5] ASHOORI, R. C. u. a. „N-electron ground state energies of a quantum dot in magnetic field“. In: *Phys. Rev. Lett.* 71 (4 Juli 1993), S. 613–616.
- [6] BALSHAW, N. H. *Practical Cryogenics. An introduction to laboratory cryogenics.* Oxford Instruments (UK) Ltd, 1997. ISBN: 0-9527594-0-3.
- [7] BEASLEY, M. R., LABUSCH, R. und WEBB, W. W. „Flux Creep in Type-II Superconductors“. In: *Phys. Rev.* 181 (2, Mai 1969), S. 682–700.
- [8] BEENAKKER, C. W. J. „Random-matrix theory of quantum transport“. In: *Rev. Mod. Phys.* 69 (3 Juli 1997), S. 731–808.
- [9] BEENAKKER, C. W. J. „Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot“. In: *Phys. Rev. B* 44 (4, Juli 1991), S. 1646–1656.
- [10] BERGGREN, K. und JI, Z. „Quantum chaos in nano-sized billiards in layered two-dimensional semiconductor structures“. In: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 6.4 (1996), S. 543–553.
- [11] BLADH, K. u. a. „Comparison of cryogenic filters for use in single electronics experiments“. In: *Review of Scientific Instruments* 74.3 (2003), S. 1323–1327.
- [12] BRASLAU, N., GUNN, J. B. und STAPLES, J. L. „Metal-semiconductor contacts for GaAs bulk effect devices“. In: *Solid State Electronics* 10 (Mai 1967), S. 381–383.

Literatur

- [13] BUNKOV, Y. M. u. a. „A compact dilution refrigerator with vertical heat exchangers for operation to 2 mK“. In: *Journal of Low Temperature Physics* 83.5 (Juni 1991), S. 257–272. ISSN: 1573-7357.
- [14] BÜTTIKER, M. „Four-Terminal Phase-Coherent Conductance“. In: *Phys. Rev. Lett.* 57 (14, Okt. 1986), S. 1761–1764.
- [15] BÜTTIKER, M. „Quantized transmission of a saddle-point constriction“. In: *Phys. Rev. B* 41 (11, Apr. 1990), S. 7906–7909.
- [16] BÜTTIKER, M. „Transmission, Reflection and the Resistance of Small Conductors“. In: *Electronic Properties of Multilayers and Low-Dimensional Semiconductor Structures*. Hrsg. von CHAMBERLAIN, J. M., EAVES, L. und PORTAL, J.-C. Boston, MA: Springer US, 1990, S. 51–73. ISBN: 978-1-4684-7412-1.
- [17] CHANG, T. H. P. „Proximity effect in electron-beam lithography“. In: *Journal of Vacuum Science and Technology* 12.6 (1975), S. 1271–1275.
- [18] CISNEROS-DE-LA-ROSA, A. u. a. „Effect of surface states on the electrical properties of MBE grown modulation doped AlGaAs/GaAs“. In: *Journal of Vacuum Science & Technology B, Nanotechnology and Microelectronics: Materials, Processing, Measurement, and Phenomena* 32.2 (2014), S. 02C110.
- [19] CRONENWETT, S. M. u. a. „Low-Temperature Fate of the 0.7 Structure in a Point Contact: A Kondo-like Correlated State in an Open System“. In: *Phys. Rev. Lett.* 88 (22, Mai 2002), S. 226805.
- [20] *Cryomagnetic System. Operator's Handbook*. Project Number 39609.1. Oxford Instruments. Juni 1995.
- [21] DARWIN, C. G. „The Diamagnetism of the Free Electron“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 27.1 (1931), S. 86–90.
- [22] DATTA, S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge Studies in Semiconductor Physi. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 978-0521599436.
- [23] DATTA, S. *Quantum Transport: Atom to Transistor*. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1107632134.
- [24] DAVIES, J. H. *The Physics of Low-dimensional Semiconductors: An Introduction*. Cambridge University Press, 1997.
- [25] DEAN, C. R. „A Study of the Fractional Quantum Hall Energy Gap at Half Filling“. Dissertation. Department of Physics, McGill University Montréal, Québec, Canada, Nov. 2008.

- [26] DONNELLY, R. J. und BARENGHI, C. F. „The Observed Properties of Liquid Helium at the Saturated Vapor Pressure“. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 27.6 (1998), S. 1217–1274.
- [27] DURRANI, Z. *Single-electron Devices and Circuits in Silicon*. Imperial College Press, 2010. ISBN: 978-1-84816-414-7.
- [28] EINSTEIN, A. „Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, 2. Abhandlung“. In: *Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften*. Verlag der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jan. 1925, S. 3–14.
- [29] ELZERMAN, J. M. u. a. „Few-electron quantum dot circuit with integrated charge read out“. In: *Phys. Rev. B* 67 (16 Apr. 2003), S. 161308.
- [30] ELZERMAN, J. M. u. a. „Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot“. In: *Nature* 430 (Juli 2004), S. 431–435.
- [31] ETO, M. „Electronic Structures of Few Electrons in a Quantum Dot under Magnetic Fields“. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 36.6S (1997), S. 3924.
- [32] FIELD, M. u. a. „Measurements of Coulomb blockade with a noninvasive voltage probe“. In: *Phys. Rev. Lett.* 70 (9 März 1993), S. 1311–1314.
- [33] FLEISCHER, M. „Transporteigenschaften von Quantenpunktkontakten und Quantenpunkten. Untersuchung von Leitwertanomalien und Nanostrukturierung mit Resorcinarene-Lack“. Dissertation. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2006.
- [34] FOCK, V. „Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld“. In: *Zeitschrift für Physik* 47.5 (Mai 1928), S. 446–448. ISSN: 0044-3328.
- [35] FOXMAN, E. B. u. a. „Effects of quantum levels on transport through a Coulomb island“. In: *Phys. Rev. B* 47 (15, Apr. 1993), S. 10020–10023.
- [36] FULTON, T. A. und DOLAN, G. J. „Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions“. In: *Phys. Rev. Lett.* 59 (1, Juli 1987), S. 109–112.
- [37] GAUSS, C. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. sumtibus F. Perthes et I. H. Besser, 1809.
- [38] GLAZMAN, L. I. u. a. „Reflectionless quantum transport and fundamental ballistic-resistance steps in microscopic constrictions“. In: *ZhETF Pisma Redaktsiiu* 48 (Aug. 1988), S. 218.
- [39] GÖKTAŞ, O. u. a. „Alloyed ohmic contacts to two-dimensional electron system in AlGaAs/GaAs heterostructures down to submicron length scale“. In: *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 40.5 (2008). 17th International

- Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems, S. 1579–1581. ISSN: 1386-9477.
- [40] GOLDHABER-GORDON, D. u. a. „Kondo effect in a single-electron transistor“. In: *Nature* (Jan. 1998), S. 156–159.
- [41] GRABERT, H. und DEVORET, M. *Single Charge Tunneling: Coulomb Blockade Phenomena In Nanostructures*. Nato Science Series B: Springer US, 2013. ISBN: 978-1-4757-2166-9.
- [42] GUTZWILLER, M. C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag New York, 1990. ISBN: 0-387-97173-4.
- [43] HAAVASOJA, T. u. a. „Magnetization measurements on a two-dimensional electron system“. In: *Surface Science* 142.1 (1984), S. 294–297. ISSN: 0039-6028.
- [44] HALPERIN, B. I. „Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential“. In: *Phys. Rev. B* 25 (4, Feb. 1982), S. 2185–2190.
- [45] HATZAKIS, M. „Electron Resists for Microcircuit and Mask Production“. In: *Journal of The Electrochemical Society* 116.7 (1969), S. 1033–1037.
- [46] HÖPPLER, C. „Nichtlinearer Transport durch ballistische Quantenpunktkontakte“. Dissertation. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2004.
- [47] HUNKLINGER, S. *Festkörperphysik*. de Gruyter Studium. Walter de Gruyter GmbH, 2017. ISBN: 9783110567755.
- [48] JANSSEN, P. J. C. „Indication de quelques-uns des résultats obtenus à Cocanada, pendant l'éclipse du mois d'août dernier, et à la suite de cette éclipse.“ In: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 67 (1868), S. 838–841.
- [49] JECKELMANN, B. und JEANNERET, B. „The quantum Hall effect as an electrical resistance standard“. In: *Reports on Progress in Physics* 64.12 (2001), S. 1603.
- [50] KEITHLEY INSTRUMENTS, I. *Nanotechnology Measurement Handbook: A Guide to Electrical Measurement for Nanoscience Applications*. 1st edition. Keithley Instrument, Incorporated, 2007.
- [51] *Kelvinox Dilution Refrigerator and Superconducting Magnet System. Operator's Handbook*. Project Number 43214. Oxford Instruments. März 1998.
- [52] KETTERSON, A. u. a. „Extremely low contact resistances for AlGaAs/GaAs modulation-doped field-effect transistor structures“. In: *Journal of Applied Physics* 57.6 (1985), S. 2305–2307.

- [53] KLITZING, K. V., DORDA, G. und PEPPER, M. „New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance“. In: *Physical Review Letters* 45 (Aug. 1980), S. 494–497.
- [54] KOUWENHOVEN, L. P., AUSTING, D. G. und TARUCHA, S. „Few-electron quantum dots“. In: *Reports on Progress in Physics* 64.6 (2001), S. 701.
- [55] KOUWENHOVEN, L. P. u. a. „Nonlinear conductance of quantum point contacts“. In: *Phys. Rev. B* 39 (11, Apr. 1989), S. 8040–8043.
- [56] LAUX, S. E., FRANK, D. und STERN, F. „Quasi-one-dimensional electron states in a split-gate GaAs/AlGaAs heterostructure“. In: *Surface Science* 196.1-3 (1988), S. 101–106.
- [57] LI, P. W. u. a. „Fabrication of a germanium quantum-dot single-electron transistor with large Coulomb-blockade oscillations at room temperature“. In: *Applied Physics Letters* 85.9 (2004), S. 1532–1534.
- [58] LOCKYER, J. N. „Sur une méthode employée par M. Lockyer pour observer en temps ordinaire le spectre des protubérances signalées dans les éclipses totales de Soleil.“ In: *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 67 (1868), S. 836–838.
- [59] LONDON, H., CLARKE, G. R. und MENDOZA, E. „Osmotic Pressure of He³ in Liquid He⁴, with Proposals for a Refrigerator to Work below 1°K“. In: *Phys. Rev.* 128 (5, Dez. 1962), S. 1992–2005.
- [60] LOUNASMAA, O. V. „Dilution refrigeration“. In: *Journal of Physics E: Scientific Instruments* 12.8 (1979), S. 668.
- [61] MACDONALD, A. H. und STŘEDA, P. „Quantized Hall effect and edge currents“. In: *Phys. Rev. B* 29 (4, Feb. 1984), S. 1616–1619.
- [62] MACLEAN, K. u. a. „Energy-Dependent Tunneling in a Quantum Dot“. In: *Phys. Rev. Lett.* 98 (3, Jan. 2007), S. 036802.
- [63] *Manufacturing Protocol*. Sample ID: V815. Cavendish Laboratory. University of Cambridge, Department of Physics. Aug. 2015.
- [64] MEHTA, M. *Random Matrices*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2004. ISBN: 978-0080474113.
- [65] MEIRAV, U., KASTNER, M. und J. WIND, S. „Single-electron charging and periodic conductance resonances in GaAs nanostructures“. In: 65 (Sep. 1990), S. 771–774.
- [66] NYQUIST, H. „Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors“. In: *Phys. Rev.* 32 (1, Juli 1928), S. 110–113.

Literatur

- [67] OKAMOTO, H. und MASSALSKI, T. B. „The Au-Ge (Gold-Germanium) system“. In: *Bulletin of Alloy Phase Diagrams* 5.6 (1984), S. 601–610. ISSN: 0197-0216.
- [68] OSAKABE, S. und ADACHI, S. „Study of GaAs(001) Surfaces Treated in Aqueous HCl Solutions“. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 36.12R (1997), S. 7119.
- [69] POBELL, F. *Matters and Methods at Low Temperatures*. Springer-Verlag, 1992. ISBN: 3-540-53751-1.
- [70] QUINN, T. J. „News from the BIPM“. In: *Metrologia* 26.1 (1989), S. 69.
- [71] RAISER, S. „Untersuchung der elektrischen Eigenschaften von AuGe-Kontakten in GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen“. Diplomarbeit. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2005.
- [72] REED, M. A. u. a. „Observation of discrete electronic states in a zero-dimensional semiconductor nanostructure“. In: *Phys. Rev. Lett.* 60 (6, Feb. 1988), S. 535–537.
- [73] ROBNIK, M. „Quantising a generic family of billiards with analytic boundaries“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 17.5 (1984), S. 1049.
- [74] ROSNER, W. u. a. „Hydrogen atoms in arbitrary magnetic fields. I. Energy levels and wavefunctions“. In: *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics* 17.1 (1984), S. 29.
- [75] SCHEFZYK, D. „Elektrische Charakterisierung niederdimensionaler Systeme zur Bestimmung der Temperatur in Nanostrukturen“. Diplomarbeit. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2005.
- [76] SCHEFZYK, D. „Quantenbauelemente als aktive Sensoren zur Ladungsbestimmung in elektronischen Nanostrukturen“. Dissertation. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2015.
- [77] SCHWARZ, H. R. und KÖCKLER, N. „Ausgleichsprobleme, Methode der kleinsten Quadrate“. In: *Numerische Mathematik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011, S. 274–306. ISBN: 978-3-8348-8166-3.
- [78] SEO, E., CHOI, B. K. und KIM, O. „Determination of proximity effect parameters and the shape bias parameter in electron beam lithography“. In: *Microelectronic Engineering* 53.1 (2000), S. 305–308. ISSN: 0167-9317.
- [79] SHIH, Y.-C. u. a. „Effects of interfacial microstructure on uniformity and thermal stability of AuNiGe ohmic contact to n-type GaAs“. In: *Journal of Applied Physics* 62.2 (März 1987), S. 582–590.
- [80] SIMMEL, F. u. a. „Statistics of the Coulomb-blockade peak spacings of a silicon quantum dot“. In: *Phys. Rev. B* 59 (16 Apr. 1999), R10441–R10444.

- [81] SIVAN, U. u. a. „Mesoscopic Fluctuations in the Ground State Energy of Disordered Quantum Dots“. In: *Phys. Rev. Lett.* 77 (6 Aug. 1996), S. 1123–1126.
- [82] SNIDER, G. *1D Poisson*. Version beta 8j1. URL: <http://www3.nd.edu/~gsnider/> (besucht am 30. 11. 2016).
- [83] SOHN, L. L., KOUWENHOVEN, L. P. und SCHÖN, G. *Mesoscopic Electron Transport*. Bd. 345. Nato Science Series E: Springer Netherlands, 1997. ISBN: 978-0-7923-4737-8.
- [84] STURM, P. u. a. „Permeation of atmospheric gases through polymer O-rings used in flasks for air sampling“. In: *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 109.D4 (2004). DO4309. ISSN: 2156-2202.
- [85] SURESH, S. „Semiconductor Nanomaterials, Methods and Applications: A Review“. In: *Nanoscience and Nanotechnology* 3.3 (2013), S. 62–74.
- [86] SUSS MJB 3. *Mask Aligner*. Operator’s Reference Manual. 2/84/REV A.
- [87] SZAFER, A. und STONE, A. D. „Theory of Quantum Conduction through a Constriction“. In: *Phys. Rev. Lett.* 62 (3, Jan. 1989), S. 300–303.
- [88] TAN, I. u. a. „A self-consistent solution of Schrödinger-Poisson equations using a nonuniform mesh“. In: *Journal of Applied Physics* 68.8 (1990), S. 4071–4076.
- [89] TANAKA, N., KAWANISHI, H. und ISHIKAWA, T. „Electron-Beam-Induced Damage in GaAs/AlGaAs Heterostructures“. In: *MRS Proceedings* 279 (1992).
- [90] TANTISANTISOM, K. „Electron Transport in Quantum Dot Devices. Kondo Physics and Coupled Quantum Dots“. Dissertation. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Eberhard Karls Universität Tübingen, 2011.
- [91] TARUCHA, S. u. a. „Electronic states in quantum dot atoms and molecules“. In: *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 3.1 (1998), S. 112–120. ISSN: 1386-9477.
- [92] TAYLOR, B. N. und WITT, T. J. „New International Electrical Reference Standards Based on the Josephson and Quantum Hall Effects“. In: *Metrologia* 26.1 (1989), S. 47.
- [93] TAYLOR, R. P. u. a. „Physical and electrical investigation of ohmic contacts to AlGaAs/GaAs heterostructures“. In: *Journal of Applied Physics* 76.12 (1994), S. 7966–7972.
- [94] THOMSON, W. „4. On the Equilibrium of Vapour at a Curved Surface of Liquid“. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* 7 (Jan. 1872), S. 63–68.

Literatur

- [95] TINKHAM, M. *Introduction to Superconductivity: Second Edition*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2004. ISBN: 978-0486435039.
- [96] TORRESANI, P. u. a. „Nongalvanic primary thermometry of a two-dimensional electron gas“. In: *Physical Review B* 88.24 (Dez. 2013), S. 245304.
- [97] UMANSKY, V., DE-PICCIOTTO, R. und HEIBLUM, M. „Extremely high-mobility two dimensional electron gas: Evaluation of scattering mechanisms“. In: *Applied Physics Letters* 71.5 (1997), S. 683–685.
- [98] VALLEJOS, R. O., LEWENKOPF, C. H. und MUCCIOLO, E. R. „Coulomb Blockade Peak Spacing Fluctuations in Deformable Quantum Dots: A Further Test of Random Matrix Theory“. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (3, Juli 1998), S. 677–680.
- [99] VEGARD, L. „Die Konstitution der Mischkristalle und die Raumfüllung der Atome“. In: *Zeitschrift für Physik* 5.1 (1921), S. 17–26. ISSN: 0044-3328.
- [100] WADA, T. u. a. „Electron Beam Induced Degradation of 2Deg in AlGaAs/GaAs Heterostructure“. In: *MRS Proceedings* 325 (1993).
- [101] WEES, B. J. van u. a. „Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas“. In: *Phys. Rev. Lett.* 60 (9 Feb. 1988), S. 848–850.
- [102] WEICHELBAUM, A. und ULLOA, S. E. „Tunability of qubit Coulomb interaction: Numerical analysis of top-gate depletion in two-dimensional electron systems“. In: *Phys. Rev. B* 74 (8, Aug. 2006), S. 085318.
- [103] WHARAM, D. A. u. a. „One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance“. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 21.8 (1988), S. L209.
- [104] WHITE, G. und MEESON, P. *Experimental Techniques in Low-Temperature Physics: Fourth Edition*. Monographs on the Physics and Chemistry of Materials. OUP Oxford, 2002. ISBN: 9780198514275.
- [105] WIEL, W. G. van der u. a. „Electron transport through double quantum dots“. In: *Rev. Mod. Phys.* 75 (1, Dez. 2002), S. 1–22.
- [106] WIGNER, E. P. „On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices“. In: *Annals of Mathematics* 67.2 (1958), S. 325–327. ISSN: 0003486X.
- [107] YACOBY, A. und IMRY, Y. „Quantization of the conductance of ballistic point contacts beyond the adiabatic approximation“. In: *Phys. Rev. B* 41 (8, März 1990), S. 5341–5350.
- [108] SA-YAKANIT, V., CHOOSIRI, N. und GLYDE, H. „Density of states between Landau levels in a two-dimensional electron gas“. In: *Physical Review B* 38.2 (1988). cited By 16, S. 1340–1343.