Atmosphären und synthetische Spektren von Neutronensternen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Jochen Lennart Deetjen

aus Reutlingen

2002

Selbstverlegt von:	J. L. Deetjen, Berliner Ring 57, 72076 Tübingen
Tag der mündlichen Prüfung:	28. Oktober 2002
Dekan:	Prof. Dr. H. Müther
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Werner
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. R. Staubert

Zusammenfassung

Jochen Lennart Deetjen

Atmosphären und synthetische Spektren von Neutronensternen

Neutronensterne stellen ein faszinierendes „Lebensende“ in der Entwicklung massereicher Sterne dar. Diese Arbeit hat es sich zur Aufgabe gesetzt, diese Sterne näher zu untersuchen. Ansatzpunkt ist die Analyse des Lichts, das uns direkt von der Neutronensternoberfläche erreicht. Dieses Licht enthält in seinem Spektrum einen „Fingerabdruck“ vieler Eigenschaften des Neutronensterns. Konkretes Ziel ist es, ein Modell zu schaffen, das alle wichtigen physikalischen Eigenschaften des Plasmas einer Neutronensternatmosphäre beinhaltet. Die Umsetzung dieses Modells auf einem Computer mit dem Ziel der Berechnung synthetischer Neutronensternspektren stellt den zentralen Kern dieser Arbeit dar.

Der Vergleich von beobachteten und synthetischen Spektren erlaubt die direkte Bestimmung wichtiger Eigenschaften des jeweiligen Neutronensterns, wie z.B. seiner Effektivtemperatur[1], seiner Oberflächenschwerebeschleunigung und der chemischen Zusammensetzung an der Oberfläche. Darüber hinaus kann man Schlußfolgerungen auf die thermische und magnetische Entwicklung eines Neutronensterns ziehen. Damit verbunden ist die Frage nach der korrekten Zustandsgleichung für die (Neutronen-/Quark-) Materie im Sterninneren, die Untersuchung von Magnetfeldern jenseits der im Labor erreichbaren Feldstärke, die Frage nach den Eigenschaften von Festkörpern hoher Dichte sowie die Verwendung von Neutronensternen als atomphysikalisches Labor zur Messung der Eigenschaften von Atomen in extrem starken Magnetfeldern. Ein besseres Verständnis von Neutronensternen ist zudem unerlässlich für viele andere Teilgebiete der Astrophysik.

Mit Hilfe der neuesten Generation von Großteleskopen und Satelliten wird es möglich sein, Spektren von Neutronensternatmosphären mit gutem Signal-zu-Rausch-Verhältnis und spektraler Auflösung aufzunehmen. Bevorzugte Untersuchungsobjekte werden besonders isolierte Neutronensterne sein.

Wenden wir uns der Frage zu, wie ein solches synthetisches Spektrum berechnet werden kann. Die Atmosphäre eines Neutronensterns stellt die äußersten Schichten des Sterns dar; aus ihr stammt das von uns beobachtete Licht. Die Temperatur in diesen Schichten beträgt etwa 100 000 K bis über 1 Mio. K. Zugleich herrschen in diesen

[1] T_{eff} ist die Temperatur, die der vom Stern abgestrahlten Energie via Stefan-Boltzmann-Gesetz ($\sigma T_{\mathrm{eff}}{}^4$) entspricht.

Schichten hohe Dichten ($N \simeq 10^{16} - 10^{26}$ Teilchen/cm^3) und sehr starke Magnetfelder ($B_0 = 10^8 - 10^{13}$ Gauß). Einen kurzen Einblick in die Entstehung, die Typisierung und Eigenschaften von Neutronensternen gibt Teil I.

Das Verständnis der Eigenschaften der Neutronensternatmosphäre geht einher mit der Kenntnis der Atomphysik in starken Magnetfeldern. In Teil II wird daher zunächst auf den Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms mit externem Magnetfeld eingegangen. Die Berechnung der Energieniveaus und der Oszillatorenstärke durch Ruder et al. (1994) und Braun (2002b) sind daher wichtige Voraussetzung für diese Arbeit. Mit Hilfe dieser Daten und der Temperatur- und Dichtestruktur einer vorausberechneten sog. Nullfeldatmosphäre können die Linienopazitäten und magneto-optischen Parameter des Kontinuums berechnet werden. Die Kontinuumsopazitäten und magneto-optischen Parameter werden mangels atomphysikalischer Eingangsdaten mittels einer Näherungsformel berechnet. Hinzu kommt noch die Zyklotron-Opazität.

Teil III wendet sich dem theoretischen Kern der Arbeit, der Physik von Neutronensternatmosphären zu. Begonnen wird mit einer Skizzierung der wichtigsten Gleichungen. Neben den Atomdaten gehört eine Nullfeldatmosphäre zu den Eingangsgrößen für das Modell. Sie stellt die selbstkonsistente Lösung einer Neutronensternatmosphäre ohne Magnetfeld dar. Die selbstkonsistente Lösung mit Magnetfeld ist das Ziel, auf dessen Weg diese Arbeit die erste Etappe darstellt. Die folgenden drei Kapitel widmen sich dem polarisierten Strahlungstransport. Für ein klareres Verständnis wird zunächst die polarisierte Strahlungstransportgleichung in einer neuen und vielleicht besser verständlichen Notation dargestellt. Im Anschluss daran werden verschiedene Lösungsansätze für diese Differentialgleichung diskutiert und ihr nummerisches Verhalten beschrieben. Die in diesem Teil dargestellten Ausführungen beschreiben ganz allgemein den polarisierten Strahlungstransport in heißen Plasmen mit starken Magnetfeldern. Neutronenstern- oder Weiße-Zwerg-Atmosphären sind die gebräuchlichsten Anwendungsgebiete.

Mit Hilfe der beschriebenen Vorarbeiten kann nun in Teil IV ein Modell zur Berechnung synthetischer Spektren von Neutronensternatmosphären aufgestellt werden. Ein kurzer Überblick über die bereits existierenden Modelle und vielversprechende Beobachtungsobjekte steht zu Beginn dieses Teils. Anschließend wird die Umsetzung des Modells auf einem Computer, wie z.B. die Aspekte der Geometrie, der Magnetfeldkonfiguration und der Erzeugung eines effizienten Frequenzgitters, erläutert. Abgeschlossen wird dieser Teil mit einer Darstellung der mit Hilfe dieses Modells erzielten Ergebnisse.

Abstract

Jochen Lennart Deetjen
Atmospheres and synthetic spectra of neutron stars

Neutron stars represent the fascinating end of the stellar evolution of massive stars. The aim of this work is to investigate the properties of these stars more closely. The starting point for this investigation is the analysis of the light which reaches us from the surface of the neutron star. The spectrum of this light contains a “fingerprint” of many of the star’s properties. More specifically, the purpose of this work is to build a model which explains the most important physical properties of the plasma of the neutron star’s atmosphere. At the core of this work lies the computational implementation of this model which calculates synthetic spectra of neutron stars.

The comparison of measured and simulated spectra allows to directly determine important characteristics of the neutron star such as its effective temperature[1], its surface gravity and the chemical composition at its surface. Furthermore, one can draw conclusions about the thermal and magnetic development of a neutron star. In addition, spectrum analysis plays a fundamental role in a number of important research questions such as the determination of the correct equation of state for the neutron/quark matter in the core, the investigation of magnetic fields with strengths far beyond anything which can be achieved in the laboratory and the properties of high density matter. A neutron stars can also be used as a laboratory of atomic physics in which the properties of atoms in extreme magnetic fields can be examined.

The latest and next generation of large telescopes and satellites, will provide enough sensitivity and spectral resolution to observe neutron star atmospheres. The focus of these efforts lies in the investigation of spectra of isolated neutron stars.

We now turn to the question how such a synthetic spectrum can be calculated. The atmosphere of a neutron star represents the outermost layers of the star and is the source of the light which reaches us. The temperature in these layers is on the order of $10^5 - 10^6$ K; in addition, one finds high densities ($g > 10^{14}$ cm/s^2) and extremely strong magnetic fields ($B_0 = 10^8 - 10^{13}$ Gauß). Section 1 gives a short introduction into the formation, classification and properties of neutron stars.

Understanding the properties of atmospheres of neutron stars requires knowledge about the properties of atoms in strong magnetic fields. Section 2 thus focuses on the Hamiltonian and its solution of the hydrogen atom with an external magnetic field. The calculation of energy levels and transition probabilities by Ruder et al.

[1] T_{eff} is the temperature which is determined by the emitted energy of a star corresponding to the Stefan-Boltzmann law ($\sigma {T_{\text{eff}}}^4$)

(1994) and Braun (2002b) form one important prerequisite for this work. Taking all these data and the temperature and density structure of a pre-calculated so-called zero-field atmosphere then allows to determine the line opacities, the magneto-optical parameters and the cyclotron opacity. The continuum magneto-optical parameters and opacity have to be calculated using an approximation due to lack of atomic physical input data.

The central theoretical part of this work is presented in Section 3 which discusses the physics of neutron star atmospheres. We start with an introduction to the most important equations. In addition to the atomic data, the zero-field atmosphere is another important input for the atmosphere model. The zero-field atmosphere is the self-consistent solution of a neutron star atmosphere without a magnetic field. This work takes a first step towards the ultimate goal of finding a self-consistent solution which incorporates the magnetic field. Die following three chapters are attended to the polarized radiation transport in stellar atmospheres. We first introduce a new and improved notation for the polarized radiation transport equation. In the following, different approaches to a solution and their numerical properties for this differential equation are discussed. The results describe the polarized radiation transport in hot plasmas under strong magnetic fields in a general way. The most common applications of these equations are atmospheres of neutron stars and white dwarfs.

Section 4 presents the model which calculates synthetic spectra of atmospheres of neutron stars based on the findings in the previous sections. A short overview over the already existing models and the most promising candidates for observations are presented at the beginning of this part. This is followed by a discussion of the realization of our model on the computer. Details of the computational implementation, such as geometrical aspects, configuration of magnetic fields and generation of an efficient frequency grid, are covered as well. The section is concluded with a discussion of the results which were obtained by the model.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Motivation und Ziel einer Dissertation ist es, eine gute Antwort auf eine wissenschaftliche Frage zu geben. Diese Arbeit beschäftigt sich mit folgender Frage:

1.1 Was sind Neutronensternatmosphären?

Die Atmosphäre ist die äußerste, extrem dünne Schicht ($\approx 1\,\mathrm{cm}$, z.B. Pavlov, 1998) eines Neutronensterns. Sie ist dadurch definiert, dass aus ihr Photonen zur Erde gelangen können, d.h. dass die mittlere freie Weglänge eines Photons in der Größenordnung der Schichtdicke liegt.

1.2 Warum Physik der Sternatmosphären?

Die Astronomie und Astrophysik nimmt im Rahmen der Physik insofern eine Sonderstellung ein, dass der Gegenstand des Interesses, also die Sterne, sich einer direkten, kontrollierten und reproduzierbaren Untersuchung im Rahmen eines wissenschaftlichen Experiments entziehen. Der Physiker wird hier zum reinen Beobachter, der keinerlei Möglichkeiten besitzt, das Geschehen aus einer anderen Perspektive zu betrachten, mit anderen Anfangswerten erneut zu beginnen, oder auf andere Weise Einfluss zu nehmen. Allerdings steht dem Beobachter ein reiche Auswahl an Untersuchungsobjekten in unterschiedlichen Entwicklungsstadien für eine Analyse zur Verfügung. Da die von einem Stern emittierte Strahlung die einzige Information ist, die wir von ihm erhalten, sieht man einmal von (solaren) Neutrinos (z.B. von SN 1987A), hochenergetischer Teilchenstrahlung und Gravitationswellen ab, ist es von entscheidender Bedeutung, die in einem stellaren Spektrum enthaltenen Informationen mit großer Sorgfalt zu entschlüsseln und zu verstehen.

1.3 Welches Ziel hat diese Arbeit?

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung synthetischer Fluss- und Polarisationsspektren von Neutronensternen.

Zu diesem Zweck muss eine adäquate Beschreibung der Atmosphäre eines Neutronensterns gefunden werden. Ein entsprechendes Modell muss die relevante Sternatmosphären- und Atomphysik beinhalten und gleichzeitig geeignete Näherungen finden, um weniger relevante Aspekte zu vernachlässigen und insgesamt die nummerische Umsetzbarkeit erhalten zu können. Die Richtschnur dieses Modells ist die zukünftige synthetische Reproduktion von beobachteten thermischen Spektren von isolierten Neutronensternen.

Ein solches nummerisches Modell soll im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und in ein entsprechendes Design für ein Computerprogramm umgesetzt werden. Der zeitliche Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Implementierung und dem Testen dieses Computerprogramms.

1.4 Stellung dieser Arbeit im aktuellen Forschungskontext

Es gibt im Wesentlichen vier wichtige Gründe, ein solches Modell zum jetzigen Zeitpunkt zu entwickeln:

Zu Beginn dieser Arbeit wurde eine neue, extrem leistungsstarke Generation von Großteleskopen (z.B. das Very Large Telescope der ESO) und Satelliten (z.B. XMM-Newton) entwickelt. Mit Hilfe dieser Instrumente soll es in Zukunft erstmals möglich werden, derart lichtschwache (im sichtbaren Licht schwächer als $m_{\mathrm{V}} > 25$. Größenklasse[1]) Objekte wie die Neutronensterne zu beobachten und zu spektroskopieren.

Auf der Seite der Atomphysik gab es keine oder zu wenige Daten (Energieniveaus und Wirkungsquerschnitte) von Atomen in starken Magnetfeldern. Dieses Feld ist Gegenstand der aktuellen Forschung. Ein auch für starke Magnetfelder umfangreicher Satz von Wasserstoffdaten steht seit kurzem zur Verfügung und an der Berechnung von Eisendaten wird auf theoretischer Seite mit Nachdruck gearbeitet.

Auf dem Gebiet der Modellierung von Sternatmosphären begann man mit einfachen nichtmagnetischen LTE[2]-Modellen der Sonne. Dann wurde der Kreis der untersuchten Objekte auf Sterne in den unterschiedlichsten Entwicklungsstadien erweitert und erste NLTE[3]-Modelle gerechnet. Von dieser Basis ausgehend wurden spezielle Modelle, z.B. zur Berücksichtigung von Sternwinden oder Konvektion, entwickelt

[1] Maß für die Helligkeit eines Himmelsobjektes
[2] LTE – local thermal equilibrium
[3] NLTE – non-local thermal equilibrium

und die bestehenden Modelle verbessert. Gleichzeitig wurde erstmals das Magnetfeld der Sonne oder von Weißen Zwergen in den Modellen berücksichtigt. Ein relativ junges Gebiet ist die Berechnung synthetischer Spektren von Neutronensternatmosphären. Im Vergleich zu dem Gebiet der magnetischen Weißen Zwerge handelt es sich dabei jedoch um sehr einfache Modelle. Es war daher an der Zeit, ein den Modellen von magnetischen Weißen Zwergen äquivalentes Modell für Neutronensterne zu entwickeln.

Das in dieser Arbeit entwickelte Computerprogramm ist sehr umfangreich, komplex und stellt hohe Anforderungen an die Rechenleistung des Computers. Ohne die Leistung der heutigen Rechnergeneration hätte die Entwicklung und das Testen des Programms sowie die Simulationsrechnungen in dieser Weise nicht erfolgen können.

1.5 Einfluss auf andere Bereiche der (Astro-) Physik

Das Verständnis eines einzelnen Sterns und seiner Entwicklung ist wichtig Grundlage für die Untersuchung vieler anderer Fragestellungen in der Astrophysik und darüber hinaus:

So kann mit Hilfe der abgeleiteten stellaren Parameter von Objekten unterschiedlichen Entwicklungsstadiums die Theorie der Sternentwicklung besser verstanden werden. Bei der Untersuchung des interstellaren Mediums oder planetarischer Nebel stellt der vom Stern ausgehende ionisierende Fluss eine wichtige Grundgröße dar. Analysen von Sternspektren sind wichtig, um den Aufbau von Sternhaufen, Sternentstehungsregionen oder sogar ganzer Galaxien verstehen zu können. Die Analyse von Sternspektren ist wichtiger Bestandteil bei der Suche nach extrasolaren Planeten. Helle, heiße Sterne können als individuelle Objekte in anderen Galaxien beobachtet werden. Versteht man das stellare Spektrum, so ist man in der Lage, etwas über die chemische Zusammensetzung oder die Entfernung dieser Galaxie zu lernen. Die genaue Kenntnis von Sternatmosphären hat somit Einfluss auf kosmologische Fragestellungen. Sternatmosphären sind das am Besten untersuchte Beispiel für ein Medium, bei dem die Strahlung nicht lediglich nur zur Untersuchung eines physikalischen Zustandes dient, sondern vielmehr ein wichtiger Bestandteil ist, der die Struktur des Mediums selbst bestimmt. Neutronensterne können extrem starke Magnetfelder besitzen. Da diese im Labor nicht erzeugt werden können, bieten Neutronensterne die einmalige Gelegenheit, die Atomphysik in starken Magnetfeldern zu untersuchen. Die überwiegende Anzahl von Neutronensternen tritt als akkretierende Neutronensterne in Doppelsternsystemen auf. Ein besseres Verständnis dieser Systeme setzt die Kenntnis der prinzipiellen Eigenschaften des zentralen Neutronensterns voraus. Die durch die Analyse von Neutronensternspektren gewonnenen Effektivtemperaturen und Magnetfeldkonfigurationen erlauben ein besseres Verständnis der thermischen Entwicklung eines Neutronensterns. Darüber hinaus gibt es Einblick in das zeitliche Verhalten von starken Magnetfeldern in Festkörpern hoher Dichte. Gelingt es, die thermische Entwicklung von isolierten Neutronenstern besser zu verstehen, so kann zwischen verschiedenen Zustandsgleichungen für die extrem dichte Materie im Sterninneren unterschieden werden.

Diese Gründe zeigen beispielhaft, dass die Untersuchung von Sternatmosphären im Allgemeinen und Neutronensternatmosphären im Besonderen ein spannendes und interessantes Thema ist und eine wichtigen Beitrag zu vielen Gebieten der (Astro-) Physik leisten kann.

1.6 Struktur dieser Dissertation

Ziel dieser Arbeit ist, wie eingangs gesagt, die Berechnung synthetischer Fluss- und Polarisationsspektren von Neutronensternen. In den ersten drei Teilen dieser Arbeit werden die relevanten physikalischen Grundlagen dieses Problems dargestellt. Die Verbindung dieser Grundlagen zu einer Lösung und deren Umsetzung in ein Computerprogramm erfolgt dann im vierten Teil dieser Arbeit. Nachfolgend wird ein kurzer Überblick über den Inhalt der einzelnen Teile gegeben:

1. Ziel des ersten Teils ist es, Entstehung und Eigenschaften eines typischen Neutronensterns darzustellen, sowie die Systeme, in denen er anzutreffen ist, zu beschreiben.

2. Im zweiten Teil wird die zur Beschreibung der Atmosphäre relevante Atomphysik zusammengefasst und deren Umsetzung in den Opazitäten erläutert.

3. Der dritte Teil ist dem Kern des Modells gewidmet. Zunächst werden die Grundgleichungen von magnetfeldfreien Sternatmosphären hergeleitet und der Ansatz zur Berechnung von Sternatmosphären mit Magnetfeldern erläutert. Die folgenden drei Kapitel sind den Gleichungen des polarisierten Strahlungstransports und den verwendeten Lösungsmethoden gewidmet.

4. Im vierten Teil wird zunächst ein kurzer Überblick über die vielversprechendsten Beobachtungskandidaten sowie die sonstigen gängigen Modelle zur Analyse von Neutronensternspektren gegeben. Das anschließende Kapitel ist der Verbindung der beschriebenen Grundlagen zu einer Lösung in Form eines Computerprogramms gewidmet. Den Abschluss bildet eine Präsentation und Diskussion der Ergebnisse von Modellrechnungen.

Teil I

Neutronensterne

Kapitel 2

Neutronensterne

Wenn man sich mit Neutronensternatmosphären eingehender beschäftigen und ihr Spektrum verstehen möchte, ist es wichtig, sich mit der Entstehung, den Typen, Ausprägungen und Entwicklungsstadien von Neutronensternen auseinanderzusetzen. Ein verbessertes Verständnis der Vorgeschichte erleichtert z.B. die Abschätzung der Magnetfeldstärke (B) und der Temperatur (T) oder erlaubt die Interpretation eines Spektrums im Sinne der Beeinflussung durch einen Begleiter oder einer Überlagerung durch das Spektrum der Magnetosphäre.

2.1 Die Entdeckung

Die Geschichte der Entdeckung der Neutronensterne beginnt mit der Entdeckung des Neutrons im Jahre 1932 durch Chadwick (Chadwick, 1932). Wenige Stunden nachdem dies bekannt wurde, hat, so wird behauptet, der sowjetische Physiker L.D. Landau die mögliche Existenz von Sternen vorausgesagt, deren Kern aus Neutronen besteht (Landau, 1932). Baade und Zwicky stellten dann die Hypothese auf, dass bei Supernova-Explosionen normale Sterne in Sterne umgewandelt werden, die aus extrem dicht gepackten Neutronen bestehen (Baade & Zwicky 1934a; Baade & Zwicky 1934b). Die ersten Arbeiten über die Struktur eines Neutronensterns wurden Ende der dreißiger Jahre von J.R. Oppenheimer zusammen mit Volkov und Tolman durchgeführt (Oppenheimer & Volkov, 1939).

Nach dieser ersten Zeit beschäftigte man sich lange nicht mehr mit Neutronensternen, da man davon ausging, dass sie zu leuchtschwach seien, um tatsächlich beobachtet werden zu können. Dies änderte sich erst, als Pacini (1967) erkannte, dass ein rotierender Neutronenstern mit starkem Magnetfeld von einer Magnetosphäre umgeben ist, die elektromagnetische Wellen aussendet. Ein Jahr später entdeckten Radioastronomen der Universität Cambridge, Antony Hewish und Jocelyn Bell, zufällig die ersten Radiopulse eines Sterns (PSR 1919+21; Rotationsperiode: $P = 1{,}337\,\mathrm{sec}$[1]) (Hewish et al., 1968). Heute geht man davon aus, dass es sich bei diesen Radio-

[1] In der Astrophysik ist es noch üblich gaußsche Einheiten zu verwenden.

pulsaren um stark magnetische, rasch rotierende Neutronensterne handelt. Die erste optische Identifikation gelang beim Zentralstern des Krebsnebels (PSR 0531+21), der bei der Supernova des Jahres 1054 entstanden ist.

Neutronensterne werden als Radiopulsare, als eine der Komponenten in Röntgen-Doppelsternen und möglicherweise als Quellen von Gammastrahlungsausbrüchen (Gamma-Ray-Burster) (Piran, 1999) beobachtet. Diese Phänomene sind jedoch nicht Thema dieser Arbeit; sie wendet sich vielmehr der Modellierung und Interpretation des direkt von der Neutronensternatmosphäre emittierten thermischen Spektrums zu.

Da es sich bei Neutronensternen um extrem lichtschwache Objekte handelt, ging man lange Zeit davon aus, dass eine direkte Beobachtung des optischen Spektrums von Neutronensternen nicht möglich sein würde. Denn ihre optische Leuchtkraft entspricht der spektroskopischen Untersuchung einer 10 W Glühbirne im Abstand von einer halben Million Kilometer. Erst durch die jüngste Generation von Großteleskopen wurde dieser neue direkte Zugang zu Neutronensternen geschaffen.

2.2 Die Geburt eines Neutronensterns

Neutronensterne sind sehr kompakte Objekte; sie stellen die dichtesten und kleinsten uns bekannten Sterne dar. Sie bestehen hauptsächlich aus Neutronen und man kann sie stark vereinfacht mit einem riesigen Atomkern vergleichen. Diese eigenartigen Objekte entstehen bei der Explosion eines massereichen Sterns ($M > 10\,\mathrm{M}_\odot$; $\mathrm{M}_\odot \equiv$ Masse der Sonne). Neutronensterne stellen das Endstadium in der Entwicklung von weniger als 5% aller Sterne dar.

Beginnen wir zu dem Zeitpunkt, an dem der Wasserstoffvorrat im Kern des Vorläufersterns eines Neutronensterns verbraucht ist und das zentrale Wasserstoffbrennen erlischt (siehe (1) Abb. 2.1). Durch den nun fehlenden Druck überwiegt die Gravitation und der Kern beginnt zu kontrahieren – der Vorläuferstern verläßt die Wasserstoffhauptreihe im Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD, siehe (1) Abb. 2.1). Die Fusion von Wasserstoff zu Helium findet nun nur noch in einer Schale um den Kern herum statt. Da der Radius abnimmt und die Hälfte der Gravitationsenergie in Form von Wärme freigesetzt wird (Virialsatz), steigt die Temperatur in dieser Schale um den Kern an, was zu einer erhöhten Fusionsrate führt. Die äußere Wasserstoffhülle wird nun durch den starken Druck aufgebläht und kühlt sich ab, so dass der Stern bei zunächst konstanter Leuchtkraft expandiert (die Oberflächentemperatur sinkt, die Oberfläche nimmt jedoch zu). Der Stern entwickelt sich zu einem Roten Riesen (2).

In ein neues Stadium tritt der Stern nun, wenn der in ihm entstehende Heliumkern eine Masse erreicht hat, die groß genug zum Zünden des zentralen Heliumbrennens ist. Der Wasserstoffvorrat in den äußeren Schichten wird geringer (3). Der Stern kontrahiert zu einem Blauen Riesen. Geht der Heliumvorrat im Kern zur Neige, so verla-

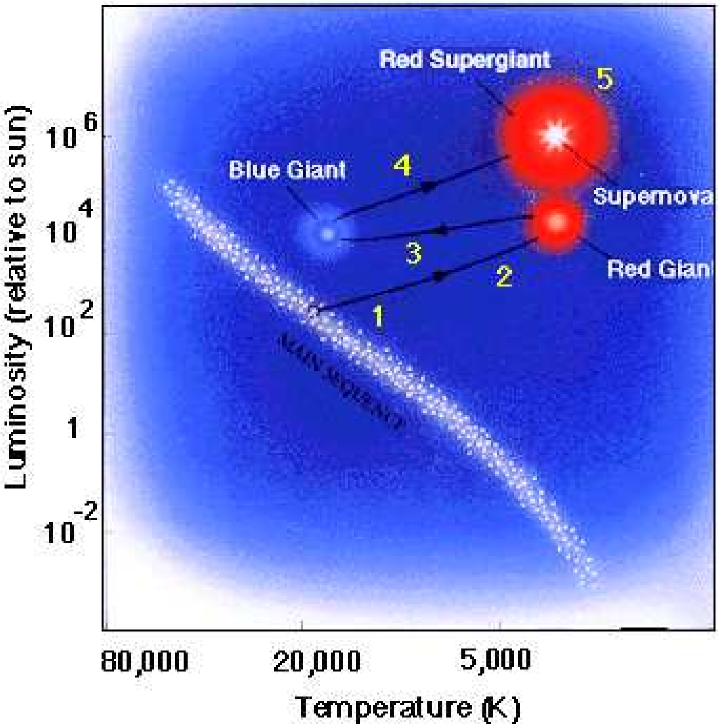


Abbildung 2.1: Schematischer Entwicklungspfad eines massereichen Sterns im Hertzsprung-Russell-Diagramm auf dem Weg zum Neutronenstern. Aufgetragen ist die Leuchtkraft des Sterns in Sonnenleuchtkräften gegen seine Temperatur. Beschreibung siehe Abschnitt 2.2 (Quelle: University of Michigan, 2002).

gert sich die Fusion in die Schalen um den Kern und die Hülle des Sterns expandiert erneut (4). Ist der Brennstoff in der Hülle verbraucht, kontrahiert der Stern erneut und das Kohlenstoffbrennen zündet im Kern. Auf diese Art findet nach und nach im Kern eine Fusion bis zum Eisen hin statt. Dieser Prozess ist für den Aufbau der schweren Elemente bis zum Eisen im Kosmos verantwortlich. Da Eisen die höchste Bindungsenergie pro Nukleon aufweist, endet hier die Kette von Fusionsprozessen. Der Kern eines Sterns am Ende dieser Fusionsprozesse besteht daher aus Eisen (siehe Abb. 2.2).

Erlischt im Inneren die Fusion, so ist auch kein Druck mehr vorhanden, der dem starken Gravitationsdruck standhalten könnte. Der Eisenkern ($M \approx 1{,}4$–$1{,}8\,M_\odot$)

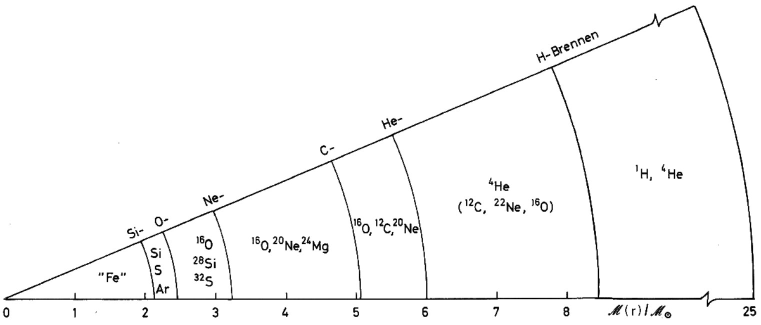


Abbildung 2.2: „Zwiebelschalenmodell“ eines 25 $M_\odot$-Sterns (Quelle: Unsöld & Baschek, 1988).

kollabiert daher unter der eigenen Gravitation und erreicht im Inneren schnell Kernmateriedichte. Übersteigt die Masse dieses Kerns die kritische Chandrasekar-Grenzmasse von $\sim$1,4 $M_\odot$, so reicht der Druck des entarteten Elektronengases nicht mehr aus, um der Gravitation standzuhalten. Erst der sich aufbauende Druck des entarteten Neutronengases kann die Kontraktion stoppen (siehe Abschnitt 3.1). Auf den entstandenen harten inneren Kern prallt nun mit großer Wucht der Rest des Eisenkerns. Da der innere Kern kaum mehr weiter komprimierbar ist, löst dies eine Stoßwelle aus, die den Eisenkern nach außen durchläuft, alles Material mit sich reißt und so dem Kollaps des zentralen Kerns eine gigantische Explosion der Hülle folgen lässt. Dieses Szenario wird als Supernova bezeichnet (5). Nach dieser Explosion bleibt der zentrale Kern des Sterns in einer sich ausbreitenden Explosionswolke übrig. Ein Neutronenstern ist geboren. Ein typischer Vertreter dieses Szenarios ist der Neutronenstern im Zentrum des Supernova-Überrestes Puppis A (siehe Abb. 2.3).

Schätzt man allein die in Form von Strahlung und kinetischer Energie der Hülle freiwerdende Energie ab, so erhält man $\sim 10^{51}$ erg (1 erg = 10^{-7} J). Der weitaus größte Teil der Energie ($\sim 10^{53}$ erg) wird jedoch in Form von Neutrinos abgestrahlt. Dies deckt sich mit den Berechnungen von Baade & Zwicky (1934a), die die freiwerdende Energie bei einem Gravitationskollaps von 1 $M_\odot$-Stern auf einen Radius von 10 km auf 10^{53} erg bestimmten. Im Vergleich dazu setzt die Fusion von 1 $M_\odot$ H zu He lediglich $\sim 1,3 \cdot 10^{52}$ erg frei.

Die obere Grenzmasse für einen Neutronenstern, die Oppenheimer-Volkov-Masse, liegt bei etwa 2-3 $M_\odot$ (Heiselberg, 2001). Jenseits dieser Grenze kann der gravitative Kollaps des Kerns selbst durch den Druck des entarteten Neutronengases nicht mehr aufgehalten werden und es entsteht ein Schwarzes Loch.

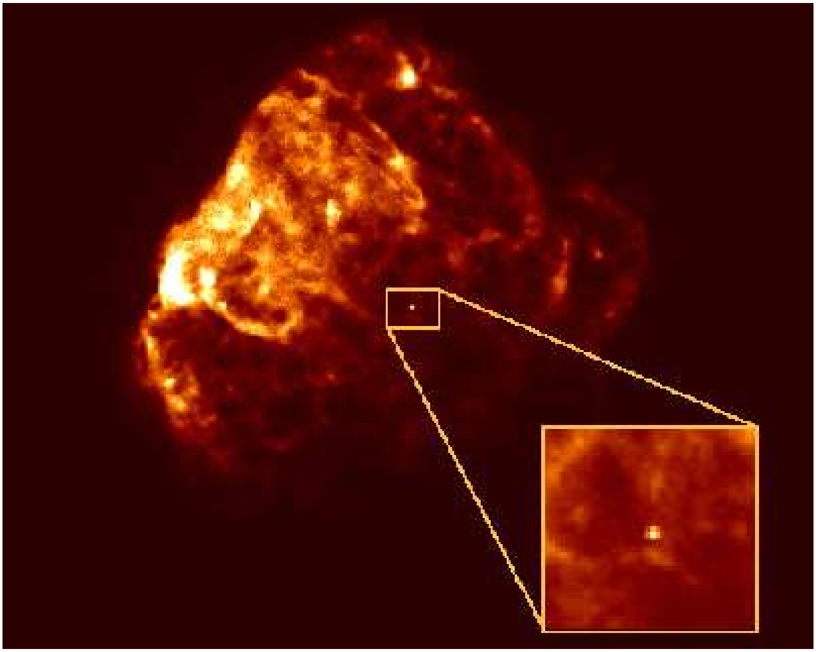


Abbildung 2.3: Der Neutronenstern im Zentrum des Supernova-Überrestes Puppis A (Quelle: Röntgensatellit ROSAT; Bearbeitung: S. Snowden, R. Petre, C. Becker et al., NASA).

> „In der Sternentwicklung repräsentieren daher Neutronensterne das „Leben nach dem Tode“!“ Burnell (1995)

Schätzungen zufolge gibt es $\sim 10^8 - 10^9$ Neutronensterne in unserer Galaxis. Sie basieren auf Überlegungen zur Pulsar-Entstehungsrate (Narayan & Ostriker, 1990) oder der Anzahl von Supernovae, die für die beobachtete Häufigkeit schwerer Elemente benötigt werden (Arnett et al., 1989). Beobachten können wir sie jedoch nur, wenn sie noch über eine Energiequelle in Form von Rotation, Magnetfeld, Akkretion oder thermisches Abkühlen verfügen. Entsprechend ihrer Hauptenergiequelle können Neutronensterne ganz grob typisiert werden: Rotation – Radiopulsare; Akkretion - Röntgendoppelsterne und thermisches Abkühlen – isolierte Neutronensterne. Dies ist jedoch nicht streng zu sehen, da die Nomenklatur, wie so oft in der Astronomie, weniger von der theoretisch systematischen Seite, als von der Beobachtung im Radio- bis in den Gamma-Bereich geprägt ist.

2.3 Radiopulsare

2.3.1 Einführung

Die ersten Vertreter dieser Klasse wurden von Antony Hewish und Jocelyn Bell dementsprechend im Radio-Bereich entdeckt (Hewish et al., 1968). Sie beziehen ihre Energie aus einer schnellen Rotation, bzw. genauer deren Abnahme (Becker & Trümper, 1997). Magnetfeld- und Rotationsachse sind zueinander verkippt. Diese Objekte strahlen im Radio-Bereich sehr viel Energie in einem engem Konus ab, was zu ihrem gepulsten Erscheinen auf der Erde führt (siehe z.B. Hewish 1995; Heiselberg 2001). In der Zwischenzeit sind gut 1200 Pulsare bekannt. Zur besseren Unterscheidung von den Röntgenpulsaren werden sie als Radiopulsare bezeichnet. Ihre Pulsperioden liegen im Millisekunden- bis Sekunden-Bereich.

Aus der Abnahme der Rotationsperiode $\dot{P}$ kann auf die Stärke des Magnetfeldes B geschlossen werden ($\sim 10^{12}$ Gauß). Dies kann durch unabhängige Messung der Zyklotronlinie überprüft werden. Die meisten Pulsare sind alt ($\sim 10^{7}$ Jahre) und rotieren relativ langsam (1 sec) und stabil ($\dot{P} \sim 10^{-15}$).

Eine interessante Unterklasse bilden die Millisekundenpulsare. Sie zeichnen sich durch Rotationsperioden im Millisekunden-Bereich aus. Ihr kleines $\dot{P}$ lässt auf relativ kleine Magnetfelder schließen. Man geht davon aus, dass es sich bei diesen Objekten um alte „wiederbelebte“ Pulsare handelt, deren Rotation durch eine lange Akkretionsphase, bei der die akkretierte Materie einen Teil ihres Drehimpulses auf den Neutronenstern übertragen hat, beschleunigt wurden. Mehr als die Hälfte dieser Millisekundenpulsare wurden in einem Binärsystem gefunden. Bei dem Begleiter handelt es sich um einen Weißen Zwerg oder ebenfalls um einen Neutronenstern.

Neben den klassischen Radiopulsaren sind auch einige sog. radio-leise Pulsare bekannt. Sie können nicht im Radio-Bereich, wohl aber im Röntgen-Bereich detektiert werden (Caraveo et al., 1996). Bekanntester Vertreter dieser Klasse ist Geminga. Ursache hierfür sind unterschiedlich enge Öffnungswinkel des Radio-, Röntgen- oder Gamma-Lichtkegels. Andere Gründe können eine fehlende Kohärenz des Radio-Emissions Mechanismus oder eine Auslöschung des Radiosignals durch geladene Teilchen in der Magnetosphäre sein (Halpern & Ruderman, 1993).

2.3.2 Entstehung der Radioemission

Rotiert ein so kompaktes Objekt wie ein Neutronenstern schnell und besitzt es zugleich ein hohes Magnetfeld, so wird an seiner Oberfläche ein starkes elektrisches Feld erzeugt (Dynamoeffekt). In diesem Feld werden ionisierte Materie und Elektronen beschleunigt. Der Neutronenstern entwickelt eine ausgeprägte ionisierte Magnetosphäre. Auf Grund des starken Magnetfelds können sich die geladenen Teilchen nur noch entlang der Magnetfeldlinien bewegen und sind so zur Korotation um die meist von der Magnetfeldachse abweichenden Rotationsachse des Sterns gezwungen.

In einem radialen Abstand $r_c = cP/(2\pi)$ würde sich ein mitrotierendes Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Korotation muss also innerhalb dieses „Lichtzylinders“ zusammenbrechen. Die Ladungsverteilung in dieser Grenzfläche führt besonders an den Polen zu Feldern, in denen Teilchen zu hohen Energien beschleunigt werden. Man geht davon aus, dass wahrscheinlich in diesen Polregionen die Radioemission entsteht (Thorsett, 2001).

2.3.3 Klassifizierung von Radiopulsaren

Die im Röntgen-Bereich detektierten Pulsare können entsprechend ihrer Emissions-Charakteristik in fünf Klassen eingeteilt werden. Die folgenden Tabellen basieren hauptsächlich auf den Reviews von Becker & Trümper (1997) und Caraveo et al. (1996).

2.3.3.1 Crab ähnliche Pulsare

Alter ≤ 2000 Jahre: Die Emission aus der Magnetosphäre dominiert.

2.3.3.2 Vela ähnliche Pulsare

Alter $\sim 10^4 - 10^5$ Jahre: Sie zeigen eine starke, konstante Emission eines Synchrotron-Nebels verbunden mit einem kleinen gepulsten Beitrag der Magnetosphäre oder der Atmosphäre im Bereich $\sim 0,1 - 0,5\,\mathrm{keV}$ (Becker & Trümper, 1997).

2.3.3.3 Abkühlende Neutronensterne

Der niederenergetische Teil der Spektren stammt von der Oberfläche des Neutronensterns, wohingegen der hochenergetische Anteil entweder aus der Magnetosphäre oder von den Polkappen stammt (Becker & Trümper, 1997).

2.3.3.4 Alte nahestehende Pulsare

Alter $\sim 3 \times 10^6$ Jahre; Distanz $\sim 120 - 380\,\mathrm{pc}$[2]: Ein sehr breiter Puls erstreckt sich fast über eine ganze Phase; sowohl Potenzgesetz- wie thermische Spektren können gefittet werden.

2.3.3.5 Millisekunden Pulsare

Die Röntgenemission der Millisekunden-Pulsare stammt aus der Magnetosphäre.

2.3.4 Das Röntgenspektrum

Das weiche Röntgenspektrum eines Pulsars setzt sich aus mehreren thermischen und nicht-thermischen Emissionsprozessen zusammen:

[2] Astronomische Längeneinheit: 1 pc $\approx$ 3,2633 Lichtjahre $\approx$ 30,857 $\cdot 10^{12}$ km.

- Nicht-thermische Emission von in der Magnetosphäre beschleunigten relativistischen Teilchen; charakterisiert durch ein Potenzgesetz-Spektrum (siehe z.B. Michel, 1991, und die darin enthaltenen Referenzen).
- Thermische Emission direkt von der Oberfläche des Neutronensterns. In Ermangelung realistischer Modelle für die Atmosphären von Neutronensternen wird diese Emission bisher meist mit Hilfe eines Schwarzkörperspektrums charakterisiert.
- Thermische Emission von den Polkappen des Neutronensterns. Diese werden durch das Bombardement von relativistischen Teilchen, die von der Magnetosphäre auf die Oberfläche treffen, aufgeheizt.
- Ausgedehnte Emission eines vom Pulsar getriebenen Synchrotron-Nebels (Michel, 1991).
- Weiche Röntgenstrahlung von einem relativistischen Pulsarwind oder einer möglichen Wechselwirkung dieses Windes mit der Interstellaren Materie oder einem benachbarten Stern (bow shock nebula – Arons & Tavani, 1993).

2.4 Isolierte Neutronensterne

Der Begriff des isolierten Neutronensterns (INS) wird in der Literatur uneinheitlich verwendet. In jedem Fall handelt es sich dabei immer um einen alleinstehenden Neutronenstern, im Gegensatz zu den nachfolgend diskutierten Röntgendoppelsternen. Im engeren Sinne werden jedoch nur alleinstehende Neutronensterne, in deren Spektrum im betrachteten Wellenlängenbereich eine thermische Komponente beobachtet werden kann, als isolierter Neutronenstern bezeichnet. Die oben angesprochenen radioleisen Pulsare sind daher meistens typische Vertreter dieser Gruppe.

Während in der Gamma- und Röntgen- und Radioastronomie Neutronensterne zu den sehr wichtigen Beobachtungsobjekten gehören, werden sie in der optischen Astronomie eher „vernachlässigt“, weil sie kaum detektierbar sind. Entsprechend klein ist das Sample, der im optischen Spektralbereich bekannten INS (Caraveo, 2000).

Das optische Verhalten von INS erstreckt sich, analog zu Klassifizierung in Abschnitt 2.3.3, von der nicht thermischen Emission junger Objekte, wie z.B. Crab-Pulsar, bis hin zu fast rein thermischen Spektren der älteren Objekte (Caraveo 1998; Mignani et al. 1998b).

Isolierte Neutronensterne mittleren Alters τ ($10^4 \lesssim \tau \lesssim 10^6$ Jahre) sind außerordentlich interessant, denn bei ihnen kann ein relativ ungestörter Blick auf die Oberfläche der Atmosphäre geworfen und eine Bestimmung der Effektivtemperatur vorgenommen werden. Bei jungen Radiopulsaren oder Röntgen-Doppelsternen ist dies nicht möglich, da deren Spektren von der Emission in der Magnetosphäre dominiert werden, so dass eine direkte Untersuchung des Neutronensterns nicht möglich ist. Die alten isolierten Neutronensterne wiederum entziehen sich langsam der Beobachtung, weil ihre Oberflächentemperatur immer weiter sinkt ($< 100\,000\,\mathrm{K}$).

Der Umstand, dass diese alten Neutronensterne weder durch Radiopulse noch durch starke, akkretionsbedingte Röntgenemission auf sich aufmerksam machen, ist zugleich ein Nachteil. Es erweist sich nämlich als außerordentlich schwierig, solche Objekte zu entdecken. Dieses Problem kann nur mit viel Aufwand gelöst werden, indem zunächst eine Röntgendurchmusterung des Himmels und eine anschließende Nachbeobachtung mit lichtstarken optischen oder Röntgen Teleskopen durchgeführt wird.

2.5 Röntgenpulsare und Röntgenburster

Röntgenpulsare und Röntgenburster beziehen ihre Energie aus der Akkretion von Materie. Sie sind dabei Teil eines Röntgen-Doppelsternsystems. Die meist jungen Neutronensterne werden dabei von einem massereichen ($M \gtrsim 10\,\mathrm{M}_\odot$) oder armen ($M \lesssim 1{,}2\,\mathrm{M}_\odot$) Stern, dem sog. optischen Begleiter, umkreist (siehe z.B. Charles, 2001).

2.5.1 High Mass X-ray Binaries

Der Begleiter in einem High Mass X-ray Binary System (HMXB) ist vom Spektral-Typ O oder B. Da es sich damit bei den Begleitern in HMXB um sehr massereiche, blaue Objekte handelt, müssen diese noch sehr jung sein, da sie in weniger als 10 Millionen Jahren ihren Wasserstoffvorrat verbrauchen. In der Tat entspricht die räumliche Verteilung der HMXB derjenigen anderer junger und heißer Sterne sowie noch nicht kondensierter Gaswolken: Sie häufen sich in der Ebene der Milchstraße. Die Akkretion in diesen Systemen kann auf die folgenden zwei unterschiedliche Weisen geschehen.

2.5.1.1 Windakkretion

Bei dem Begleiter handelt es sich um einen Riesen oder Überriesen mit einer ursprünglichen Masse $\gtrsim 20\,\mathrm{M}_\odot$ und einem Radius von 10 bis $30\,\mathrm{R}_\odot$.Ein solcher Stern hat in diesem Stadium annähernd sein Roche-Volumen[3] ausgefüllt und einen starken Sternwind entwickelt. Haben der Neutronenstern und sein Begleiter einen geringen

[3] Das Roche-Volumen ist das maximale Volumen, das Sterne in einem Doppelsternsystem einnehmen können, ohne Materie zu verlieren. Im Roche-Volumen eines Sterns dominiert seine eigene Gravitation. Eine genauere Definition findet sich z.B. in Frank et al. (1992).

Abstand, so kann der Neutronenstern einen Teil der Materie des Sternwinds akkretieren. Diese Systeme (z.B. Vela X-1) weisen dabei ein recht dynamisches, zeitliches Verhalten auf und bilden nur eine verhältnismäßig kleine Akkretionsscheibe aus (Davidson & Ostriker 1973; Kretschmar 1996).

2.5.1.2 Akkretion in Be-Systemen

Bei Be-Systemen handelt es sich im Allgemeinen um Hauptreihensterne oder seltener um Unterriesen als Begleiter, die in der Äquatorebene eine Scheibe ausgebildet haben. Da sich diese Systeme zudem durch eine stark exzentrische Bahn auszeichnen, führt dies immer dann zu sporadischen Röntgenausbrüchen (sog. transients), wenn der Neutronenstern (z.B. A0535+26) sich durch diese Scheibe bewegt und Materie akkretieren kann (Slettebak 1988; Kroll 1995; Kretschmar 1996).

2.5.2 Low Mass X-ray Binaries

Der Begleiter ist vom Spektraltyp A oder später mit einer Masse $\lesssim 1{,}2\,\mathrm{M}_{\odot}$; er hat sich auf Grund seiner Entwicklung über sein Roche-Volumen ausgedehnt, so dass Materie direkt in Richtung Neutronenstern strömt (Roche lobe overflow). Es bildet sich eine große Akkretionsscheibe um den Neutronenstern aus (siehe z.B. Charles, 2001). Beispiele sind Sco X-1 und Her X-1.

Low Mass X-ray Binary System (LMXB) finden sich hauptsächlich im Zentralbereich der Galaxis und in Kugelsternhaufen, die die Milchstraße umgeben. Beide Regionen bestehen überwiegend aus Sternen, die zwischen 5 und 15 Milliarden Jahre alt sind. Diese älteren Röntgen-Doppelsterne strahlen im Allgemeinen keine regelmäßigen Pulse ab. Ihre optischen Spektren steigen zum Blauen hin immer mehr an und auffällige Emissionslinien sind zu beobachten. Diese Beobachtungen decken sich sehr gut mit dem Modell eines massearmen, langlebigen Begleiters und der Ausbildung einer aufgeheizten Akkretionsscheibe.

2.5.3 Röntgenpulsare

Die Neutronensterne in HMXBs sind meistens auch Röntgenpulsare. Die Neutronensterne in diesen Systemen sind noch recht jung und weisen ein starkes Magnetfeld (10^{12} Gauß) auf. Dieses Magnetfeld leitet den Akkretionsfluss an die Pole. Dort wird die kinetische Energie in einer Akkretionssäule in Röntgenstrahlung umgesetzt. Man unterscheidet hier zwei Emissionsgeometrien: eine ausgedehnte strahlende Plasmasäule über den Polen oder eine optisch dünne, strahlende Polkappe. Im ersten Fall wird die Röntgenstrahlung hauptsächlich quer zur Magnetfeldachse (fan beam) austreten, im zweiten parallel dazu (pencil beam) (Shapiro & Salpeter 1975; Langer & Rappaport 1982). Stehen Magnetfeld- und Rotationsachse in einem Winkel zueinander verkippt, sieht ein entfernter Beobachter während einer Periode unterschiedliche

Bereiche des Neutronensterns. Dies führt zu einem gepulsten Röntgenspektrum. Zusätzlich beeinflusst die Abdeckung durch den Begleiter während einer Orbitalperiode und die variierende Sichtlinie durch die Akkretionsscheibe die Stärke der detektierten Röntgenstrahlung.

2.5.4 Röntgen-Burster

Röntgen-Burster haben im Gegensatz zu Röntgenpulsaren keine so hohen Feldstärken ($\approx 10^9$ Gauß). Sie sind daher nicht in der Lage die akkretierte Materie auf die Pole zu leiten. Röntgen-Burster machen sich durch extrem helle und kurze (Sekunden bis Minuten) Strahlungsausbrüche, sogenannte Bursts, bemerkbar. Die Helligkeit steigt dabei um bis das Zehnfache der Ruheleuchtkraft. Diese Ausbrüche wiederholen sich meist im Abstand von Minuten bis Stunden (Typ I Bursts) oder in sehr kurzen Abständen (Typ II Bursts) (Lewin et al., 1995). Die von ihnen akkretierte Materie setzt sich fast vollständig aus Wasserstoff und Helium zusammen. Sobald die Dichte am inneren Rand der Akkretionsschicht etwa $10^5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ übersteigt beginnt die Fusion von Wasserstoff zu Helium und von Helium zu Sauerstoff. Je nach Akkretionsrate brennt dann die Wasserstofffusion stabil. Ursache der Ausbrüche ist die schlagartige Fusion des akkretierten Heliums und, je nach Akkretionsrate des Wasserstoffs auf der Oberfläche des Neutronensterns.

2.5.5 Anomale Röntgenpulsare

Eine noch relativ junge Unterklasse stellen die Anomalen Röntgenpulsare dar. Sie rotieren recht langsam (P $\sim$ 10 sec) und verlangsamen zudem ihre Rotation sehr schnell. Dies erfordert ein sehr starkes Magnetfeld ($B \sim 10^{14}$ Gauß). Aus diesem Grund werden sie auch Magnetare genannt.

2.6 Die Magnetosphäre

Die Magnetosphäre ist der Bereich um ein Objekt, in dem die Bewegung von Plasma durch das Magnetfeld des Objektes bestimmt wird. Eine äquivalente Definition ist, dass innerhalb der Magnetosphäre die Feldrichtung des Gesamtfeldes vom Feld des Objektes und nicht von den Feldern in der Umgebung bestimmt wird (Vasyliunas, 1979).

Die Reichweite der Magnetosphäre wird durch den Magnetosphärenradius oder Alfvénradius beschrieben. Man erhält ihn durch Gleichsetzung des magnetischen Drucks mit dem kinetischen Druck einfallenden Plasmas bei R_{mag}. Für einen typischen Röntgenpulsar ergibt sich so ein Radius von einigen hundert Neutronensternradien.

Neben diesem Radius stellt sich des Weiteren die Frage nach der Struktur des Magnetfeldes, der Verteilung und Bewegung des Plasmas im Feld, einer genaueren Beschreibung der Grenzschicht sowie der zeitlichen Entwicklung und des Einflusses der Magnetosphäre in alten Neutronensternen. Man benötigt z.B. Temperatur und Dichte innerhalb der Magnetosphäre, um ein Spektrum oder eine Strahlungscharakteristik zumindest abschätzen zu können.

Bisher gibt es noch kein vollständiges, allgemein akzeptiertes Modell der Magnetosphäre um einen akkretierenden Neutronenstern. Ein Überblick über die Situation bei Beobachtung und Theorie wird in den Proceedings des IAU Kolloquiums 160 (Johnston et al., 1996) gegeben.

Es werden jedoch große Anstrengungen unternommen, um für Teilaspekte detaillierte Modelle zu entwickeln, so z.B. für die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen der Magnetosphäre und einer Akkretionsscheibe (Ghosh & Lamb 1978; Ghosh & Lamb 1979a; Ghosh & Lamb 1979b). Dieses Modell verbindet das magnetische Moment des Röntgenpulsars mit seiner Pulsperiode und deren zeitlichen Änderung (Mony, 1991).

Diese Arbeit konzentriert sich daher, wie eingangs ausgeführt, auf die Beschreibung des möglichst ungestörten thermischen Spektrums von Neutronensternatmosphären.

KAPITEL 3

Charakterisierung

3.1 Entartete Materie

Der Druck eines entarteten Neutronengases ist von entscheidender Bedeutung zunächst für die Existenz und dann für den Radius und die Dichte eines Neutronensterns. Der nächste Abschnitt ist daher der Ableitung dieses Drucks und den Implikationen für den Radius eines Neutronensterns gewidmet.

3.1.1 Entartetes Elektronen- und Neutronengas

Elektronen und Neutronen sind Fermionen. Pro elementarem Phasenraumvolumen h^3 ($h \equiv$ plancksche Konstante) kann es daher maximal zwei Elektronen bzw. Neutronen mit Antiparallelem Spin geben. Entsprechend benötigen N Teilchen ein minimales Phasenraumvolumen von $1/2\,Nh^3$.

Hat man es nun, wie im Fall von Weißen Zwergen oder Neutronensternen mit extrem hohen Dichten zu tun, d.h. schränkt man das den Elektronen bzw. Neutronen zu Verfügung stehende Volumen im Ortsraum V drastisch ein, so muss das benötigte Volumen im Impulsraum entsprechend anwachsen. Alle Zustände im Impulsraum mit Impulsen $p \leq p_0$, dem Fermiimpuls, sind dann vollständig besetzt, wenn man eine Temperatur von 0 K annimmt, was eine sehr gute Näherung darstellt:

$$
\begin{aligned}
N &= \int dN = \int_0^{p_0} 2\,\frac{4\pi p^2 V}{h^3} dp = \frac{8\pi V}{3h^3} p_0^3, \\
p_0 &= \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{h}{2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

3.1.2 Nichtrelativistisches Gas

Für ein nichtrelativistisches Elektronen- bzw. Neutronengas beträgt die kinetische Energie je Teilchen $\varepsilon = p^2/2m_{e/n}$ ($m_{e/n} \equiv$ Masse des Elektron bzw. Neutron). Als

Gesamtenergie E erhält man:

$$E = \int \varepsilon \, dN = \frac{4\pi V}{m_{e/n} h^3} \int_0^{p_0} p^4 dp = \frac{4\pi V}{5 m_{e/n} h^3} p_0^5. \tag{3.2}$$

Mit Hilfe des Ausdrucks für den Fermiimpuls lässt sich dies umschreiben:

$$E = \frac{\pi}{40} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3} \frac{h^2}{m_{e/n}} V \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{3.3}$$

Mit Hilfe der Relation für den Gasdruck P erhält man dann:

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_{e/n}} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \propto \frac{\rho^{5/3}}{m_{e/n}}. \tag{3.4}$$

Entscheidende Größe für den resultierenden Gasdruck ist also die Teilchenzahldichte $\rho = N/V$ und die Elektronen bzw. Neutronenmasse $m_{e/n}$.

Dem gravitativen Kollaps eines Weißen Zwergs oder eines Neutronensterns wird erst durch den mit der Dichte ansteigenden Druck eines entarteten Elektronen- bzw. Neutronengases Einhalt geboten.

3.1.3 Radien von Weißen Zwergen und Neutronensternen

Die Masse M eines Neutronensterns bestimmt seinen Radius R. Dies folgt aus einer Abschätzung mit der Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht und der gerade abgeleiteten Druck-Dichte-Relation eines entarteten Gases.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r \rho}{r^2} && \text{Hydrostatische Gleichung} \\
\frac{dP}{dR} &\approx \frac{P}{R} \propto \frac{M \cdot M/R^3}{R^2} = \frac{M^2}{R^5} && \text{an der Oberfläche} \\
P &\propto \frac{M^2}{R^4}
\end{aligned}$$

Wird dieser Druck P von einem entarteten Elektronen- bzw. Neutronengas erzeugt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{M^2}{R^4} \propto P \propto \frac{\rho^{5/3}}{m_{e/n}} \propto \frac{(M/V)^{5/3}}{m_{e/n}} \propto \frac{M^{5/3}}{m_{e/n} R^{5/3}} \\
R \propto \frac{1}{M^{1/3} m_{e/n}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Das Verhältnis der Radien von Weißen Zwergen und Neutronensternen zueinander wird folglich hauptsächlich durch das Verhältnis der Massen von Neutron und Elektron (1840:1) bestimmt. Als wichtig ist hier noch festzuhalten, dass der Radius eines Neutronensterns mit zunehmender Masse kleiner wird. In Wirklichkeit ist die Zustandsgleichung von Neutronensternen aber stark modifiziert, da er einen wesentlich komplizierten Aufbau besitzt (siehe Abb. 3.1).

3.2 Charakterisierung eines Neutronensterns

Für einen Physiker stellt ein Neutronenstern ein sehr interessantes und herausforderndes Objekt dar, da zu seiner Beschreibung alle vier Fundamentalkräfte gleichzeitig berücksichtigt werden müssen. Es sind dies die Gravitation, die elektromagnetische Kraft, die schwache und die starke Wechselwirkung. Außerdem herrschen Quanteneffekte vor, und diese zwingen wiederum die Teilchen auf hohe Energieniveaus, so dass auch speziell-relativistische Effekte wichtig werden.

Im folgenden werden die wichtigsten Charakteristika eines Neutronensterns kurz zusammengefasst:

3.2.1 Steckbrief

Einleitend sind die wichtigsten Eigenschaften eines Neutronenstern aufgelistet:

- Radius: $R \simeq 10 - 15\,\mathrm{km}$
- Masse: $M_{\mathrm{typisch}} \sim 1.4\,\mathrm{M}_{\odot}$; $M_{\mathrm{min}} \sim 0{,}1\,\mathrm{M}_{\odot}$; $M_{\mathrm{max}} \sim 2 - 3\,\mathrm{M}_{\odot}$
- Dichte im Kern: $\rho_c \sim 10^{15}\,\mathrm{g/cm^3}$; die Materie ist dadurch extrem entartet.
- Dicke der Atmosphäre: $D \sim 1 - 10\,\mathrm{mm}$
- Teilchendichte in der Atmosphäre: $N \simeq 10^{16} - 10^{26}$ Teilchen/cm^3
- Oberflächenschwerebeschleunigung: $> 10^{14}$cm/s^2
- Gravitative Rotverschiebung an der Oberfläche: $z \approx 0{,}2$ (Abschnitt 11.3.7).
- Rotationsperioden: 10-0,001 sec – Die hohe Gravitation erlaubt es Neutronensternen mit bis zu 1000 Hz zu rotieren, ohne auseinander gerissen zu werden. Der Neutronenstern gelangt zu diesen schnellen Rotationsperioden durch die drastische Verkleinerung seines Radius, wenn es ihm während seiner Entstehung nicht gelungen ist Drehimpuls abzugeben. Die Perioden im msec Bereich entstehen durch Übertrag zusätzlichen Drehimpulses von akkretierter Materie.

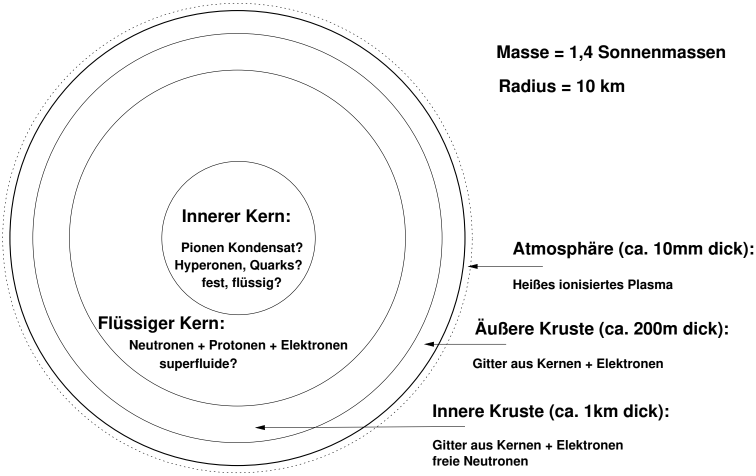


Abbildung 3.1: Aufbau eines Neutronensterns.

- Magnetfeld: 10^8–10^{12} Gauß – Die Kontraktion des entstehenden Neutronensterns verdichtet gleichzeitig ein bereits existierendes Magnetfeld, was zu extrem hohen Feldstärken führt. Darüberhinaus koppelt das starke Magnetfeld eines jungen Neutronensterns an die umgebende Materie; eine Magnetosphäre bildet sich aus. Desweiteren wird die Existenz von sog. Magnetaren mit Magnetfeldern im Bereich von $B \sim 10^{14}$ Gauß diskutiert.

3.2.2 Aufbau

Die Diskussion des Aufbaus eines Neutronensterns bietet reichlich Raum für Spekulationen. Für die äußeren Bereiche gibt es einige sehr plausible Ansätze. Je weiter man jedoch in das Innere des Neutronensterns vorstößt, desto unsicherer wird das Bild von seinem Aufbau.

Unterhalb der Atmosphäre schließt sich wahrscheinlich eine dünne harte Schale aus Eisen an. In der Gegenwart eines starken Magnetfeldes würden diese Eisenatome polymerisiert, und die Polymere ein starkes Gitter ausbilden, dessen Dichte etwa 10^4-mal so groß sein könnte wie die von terrestrischem Eisen (Burnell, 1995). Durch das Magnetfeld bedingt, würde ein solches Gitter senkrecht zum Feld einen guten Isolator und parallel zum Feld einen ausgezeichneten elektrischen Leiter darstellen.

Unterhalb dieser harten Schale verändert sich die Materiezusammensetzung, hin zu größeren, neutronenreichen Atomkernen. Die extreme Dichte unterbindet die von der Erde gewohnte radioaktive Instabilität. Mit zunehmender Tiefe steigt die Dichte; die einzelnen Atome lösen sich auf und es existiert nur noch eine Art Neutronenflüssigkeit. Diese Flüssigkeit besitzt keinerlei Viskosität, ist also suprafluid. Dringt man nun zum innersten Kern des Sterns vor, so werden die Vorstellungen über die Materieeigenschaften sehr vage.

1. Die Materie könnte fest oder flüssig sein.

2. Im Zentrum erreicht man supranukleare Dichten, wodurch die stabile Bildung von Hyperonen, d.h. Baryonen bei denen ein up- oder down-Quark durch ein strange-Quark ersetzt ist ($\Lambda, \Sigma, \Xi, \Omega$ – je nach Isospin), möglich sein sollte (Ambartsumyan & Saakyan 1960; Pandharipande 1971; Bethe & Johnson 1974). Dies hätte deutlichen Einfluss auf die Zustandsgleichung im Inneren und schränkt infolgedessen die maximale Neutronensternmasse auf 1,5-1,8 $M_{\odot}$ ein (Balberg et al., 1999). Weitere Auswirkungen einer veränderten Zustandsgleichung werden diskutiert, z.B. bei Pulsar Glitches oder im Zusammenhang mit dem Abkühlverhalten von Neutronensternen (Schaab et al. 1998a; Miralles et al. 1998).

3. Des Weiteren wird die Entstehung von Pionen diskutiert.

4. Denkbar wäre auch ein erneuter Phasenübergang hin zu einer Flüssigkeit aus einzelnen Quarks oder einem Baryonen-Quark Mix (z.B. Burnell 1995; Benvenuto & Lugones 1999).

Der Aufbau von Neutronensternen, die zu verwendenden Zustandsgleichungen, die im Kerninneren tatsächlich existierende Materie – in diesem Zusammenhang sind noch sehr viele Fragen offen, deren Antwort weit über die Astrophysik hinaus von Relevanz sind.

3.2.3 Chemische Zusammensetzung der Atmosphäre

Die chemische Zusammensetzung der Neutronensternatmosphäre ist noch völlig unklar. Möglich wäre:

1. Eisen, da ein Neutronenstern sich aus dem Eisenkern seines Vorläufersterns bildet.

2. eine Mischung von H, He, C, N, O in interstellaren Häufigkeiten, wenn die Atmosphäre sich aus dem Material zusammensetzt, das aus dem interstellaren Medium (ISM) aufgesammelt wurde.

3. eine reine Wasserstoffatmosphäre als Resultat der gravitativen Trennung der zuvor aus dem ISM akkretierten Elemente.

Ob man es aber mit chemisch reinen Atmosphären zu tun hat, bei denen das leichteste Element „aufschwimmt", ist nicht von vornherein klar. Von Weißen Zwergen ist bekannt, dass Spuren von schweren Elementen in der Atmosphäre durch den Strahlungsdruck gehalten werden können. Diese schweren Elemente beeinflussen jedoch Teile des Spektrums entscheidend. Solche Diffusions- und Auftriebseffekte sind für Neutronensterne noch nicht berechnet worden. Zusätzlich könnten Konvektion und durch die Rotation verursachte Strömungen eine Durchmischung hervorrufen.

3.2.4 Das Magnetfeld eines Neutronensterns

3.2.4.1 Entstehung des Magnetfeldes

Einige Hauptreihensterne besitzen Magnetfelder. Erste Abschätzungen der Feldstärke von Neutronensternen gingen davon aus, dass der magnetische Fluss während der Entwicklung vom Hauptreihenstern zum Neutronenstern erhalten bleibt. Mit dieser Annahme erhält man Feldstärken von $B \approx 10^{10}$–10^{13} Gauß, in Abhängigkeit von der Feldstärke des Vorläufersterns ($B \approx 1$–10^3 Gauß). Sofern nämlich die elektrische Leitfähigkeit im Sterninneren hoch genug ist, sind die Feldlinien in der Materie eingefroren. In diesem Fall steigt die Magnetfeldstärke B mit der Dichte ρ gemäß (Kippenhahn & Möllenhoff, 1975):

$$B \propto \rho^{2/3} \propto \frac{1}{R^2}. \tag{3.6}$$

Entwickelt sich ein Hauptreihenstern von $10\,\mathrm{R}_\odot$ ($\mathrm{R}_\odot \equiv$ Radius der Sonne) zu einem Neutronenstern von 10 km Radius, so ist er im Laufe der Zeit um einen Faktor 10^6 geschrumpft. Magnetfeldstärken in der Größenordnung 10^{12} Gauß sind daher durchaus plausibel. Tatsächlich wird jedoch stets einen Teil seines Magnetfeldes durch ohmsche Dissipation oder turbulente Bewegungen im Sterninneren zerfallen.

Dieser Ansatz deckt sich mit der unabhängigen Bestimmung des Magnetfeldes bei Pulsaren über die Messung der Rotationsperiode und deren Veränderung. Eine Ausnahme stellen dabei die Millisekundenpulsare dar. Eine direkte Messung der Feldstärke kann mit Hilfe der Zyklotronlinie in Röntgenspektren erfolgen. Die erste Messung einer Zyklotronlinie gelang Trümper et al. (1978) im Röntgenspektrum von Herkules-X-1. Lewin et al. (1995) fand bei einer entsprechenden Untersuchung von neun Röntgenpulsaren Werte im Bereich $(1-4)\cdot 10^{12}$ Gauß. Es besteht daher wenig Zweifel an der Gültigkeit der Annahme, dass viele Neutronensterne starke Magnetfelder auch in ihrer äußeren Hülle besitzen.

Das derzeit höchste im Labor erzeugte Magnetfeld erreichte für etwa 10^{-12} sec eine Stärke von mehr als $3{,}4\cdot 10^8$ Gauß (Tatarakis et al., 2002). Die Magnetfelder von Neutronensternen können folglich um Größenordnungen über den im Labor erzeugbaren Feldern liegen. Die Untersuchung der Eigenschaften der ionisierten Materie in einer Neutronensternatmosphäre ist somit auch vom rein atomphysikalischen Standpunkt aus hochinteressant.

3.2.4.2 Entwicklung des Magnetfeldes

Die Untersuchung alter, massearmer Röntgen-Doppelsterne (siehe Kapitel 2), die gleichzeitig als Röntgenpulsare in Erscheinung treten, gibt Aufschluss über die Langlebigkeit der Magnetfelder in Neutronensternen. Da es sich um Pulsare handelt, müssen diese Objekte noch ein starkes Magnetfeld besitzen, wenn sie auch, im Vergleich zu jungen Radiopulsaren, um einen Faktor 10 bis 10 000 schwächer sind. Vergleicht man dies mit dem Systemalter, z.B. 500 Millionen Jahre im Fall von Herkules X-1, so stellt man eine extreme Langlebigkeit der Magnetfelder von Neutronensternen fest. Diese Beobachtung ist unabhängig davon, ob die Objekte massereichen oder -armen Röntgen-Doppelsternen entstammen.

Die Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Magnetfelder von Neutronensternen ist sehr schwierig, da schon der Aufbau des Neutronenstern zu einem festen Zeitpunkt noch sehr ungewiss ist (z.B. Blandford et al. 1983; Ruderman et al. 1998a; Ruderman et al. 1998b; Konenkov & Geppert 2001).

3.2.5 Die Temperatur eines Neutronensterns

3.2.5.1 Thermische Entwicklung

Bei seiner Entstehung besitzt ein Neutronenstern eine hohe Temperatur ($\sim 10^{10}$ K), kühlt aber durch die Abstrahlung von Neutrinos sehr rasch ab. Dieses erste Stadium dauert rund 1000 Jahre. Ab einer Oberflächentemperatur von ca. 10^6 K verlangsamt sich die Abkühlgeschwindigkeit, die nun vom Aufbau und den Prozessen im Inneren des Sterns abhängt. In diesem Stadium geschieht der Wärmeverlust hauptsächlich durch Photonenemission. Nach etwa 10^6 Jahren ist eine Oberflächentemperatur von etwa 100 000 K erreicht. Danach schließt sich eine lange Periode der Abkühlung an, in der der Neutronenstern für uns schließlich unsichtbar wird.

Gelingt eine Bestimmung der Abkühlkurve $T_{\rm eff}$ (t), so ist es möglich daraus Rückschlüsse auf die Zustandsgleichung der Materie im Inneren eines Neutronensterns abzuleiten. Für die meisten Pulsare ist das wahre Alter unbekannt. Der Beobachtung zugänglich ist jedoch die Rotationsperiode P und ihre Änderung $\dot{P}$. Geht man davon aus, dass das den Neutronenstern abbremsende Drehmoment proportional seiner Rotationsfrequenz Ω ist ($\dot{\Omega} \propto \Omega^n$), so kann ein charakteristisches Alter, das sog. „spin-down-age“ $\tau = P/2\dot{P}$, angegeben werden (vgl. Abszisse der Abbildungen 3.2). Extrem schwierig wird jedoch eine gute Bestimmung von $T_{\rm eff}$, da dies Spektren mit hohem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von sehr schwachen Objekten und adäquate theoretische Modelle von Neutronensternatmosphären erfordert. In Ermangelung dieser Spektren und Modelle wurden daher bislang hauptsächlich Schwarzkörperspektren

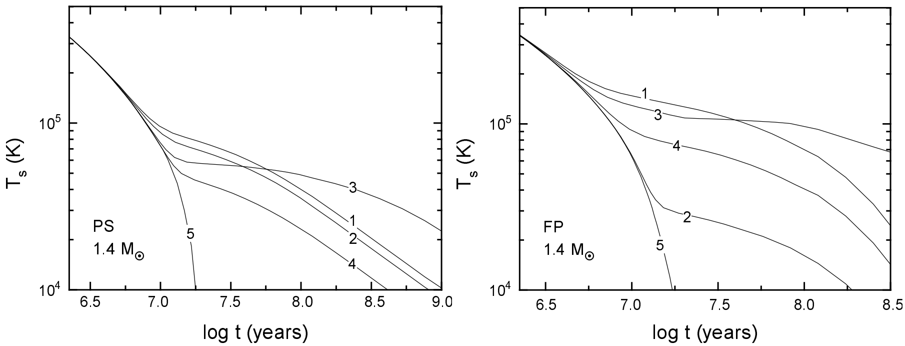


Abbildung 3.2: Zeitliches Abkühlverhalten eines Neutronensterns nach seiner Entstehung, basierend auf dem Modell von Pandharipande & Smith (1975) (links), bzw. von Friedman & Pandharipande (1981) (rechts), unter Berücksichtigung der joulschen Heizung (außer 5), für verschiedene maximale Magnetfeldstärken und Dichten. T_S ist die Oberflächentemperatur, unter Annahme eines Schwarzkörperspektrums (Quelle: Miralles et al., 1998).

z.B. an die Messdaten des Röntgensatelliten ROSAT gefittet. Da dieser Ansatz jedoch nur dadurch gerechtfertigt ist, dass er lange Zeit der einzig rechenbare war, muss mit einem entsprechenden Fehler unbekannter Größe bei der Temperaturbestimmung gerechnet werden.

In der jüngeren Literatur finden sich eine große Zahl von Beiträgen zum Thema der thermischen Entwicklung von Neutronensternen mit unterschiedlichen Schwerpunkten: Reviews (Van Riper 1991; Schaab et al. 1999; Tsuruta 1998); Reibungswärme durch differentielle Rotation zwischen Kruste und superfluidem Neutronensternkern (Van Riper & Epstein 1995; Larson & Link 1999; Schaab et al. 1998b); Zerfall der Magnetfelds in der Kruste und Eigenschaften ultradichter Materie (Urpin, 1993); joulsche Wärme aufgrund von ohmschen Verlusten (Miralles et al., 1998); Zustandsgleichung für dichte Materie (Wang et al., 1999); Energieerzeugung durch Nukleonenzerfall, ausgelöst durch hypothetische superschwere magnetische Monopole (Kolb & Turner, 1984).

3.2.5.2 Ortsabhängige Oberflächentemperatur

Die Anwesenheit eines starken Magnetfeldes ($\approx 10^{12} - 10^{13}$ Gauß) beeinflusst die Temperaturstruktur eines Neutronensterns wesentlich. Die Aufhebung der Isotropie der lokalen thermischen Leitfähigkeit der Elektronen und der Strahlung bewirkt einen Wärmetransport hauptsächlich entlang der Magnetfeldlinien hin zu den Polen und führt zu einer Aufheizung der Pole und einer Abkühlung am Äquator. Dieser Effekt verändert das gesamte zeitliche Abkühlverhalten eines Neutronensterns (Tsuruta, 1998).

Zusätzlich muss eine Heizung, hervorgerufen durch die ohmschen Verluste makroskopischer Ströme in der Atmosphäre, mit in Betracht gezogen werden (Miralles et al., 1998).

Eine genauere Festlegung der stellaren Parameter (T_{eff} , log g und chemische Komposition) kann daher wichtige Informationen zur thermischen Entwicklung von Neutronensternen geben (Van Riper, 1991) und liefert auf diesem Weg einen wichtigen Beitrag bei der Suche nach der korrekten Zustandsgleichung.

Angesichts der geringen spektralen Auflösung der zu erwartenden Beobachtungen wird in dieser Arbeit jedoch auf eine ortsabhängige Oberflächentemperatur als freien Parameter verzichtet und mit einem homogenen Temperaturfeld gearbeitet.

3.2.6 Die Zustandsgleichung für das Sterninnere

Der physikalische Zustand im Kern eines Neutronensterns ist bis jetzt noch nicht gut verstanden, da eine experimentelle oder theoretische Untersuchung der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilchen jenseits der Kernmateriedichte sehr schwierig ist. Ein vielversprechender Ansatz zur Untersuchung sehr dichter Materie ist es daher, sich die makroskopischen Eigenschaften von Neutronensternen zu Nutze zu machen. Insbesondere der Radius und die Rotationsperiode von Neutronensternen hängen entscheidend von der „Weichheit“ der Zustandsgleichung bei sehr hohen Dichten ab (Friedman et al. 1984; Friedman et al. 1986; Friedman et al. 1989). Die Verbindung von theoretischen Modellen mit aus Beobachtungen abgeleiteten Einschränkungen eröffnet daher einen Weg, die Zustandsgleichung für hohe Materiedichte abzuleiten.

Für eine bestimmte Zustandsgleichung variiert die Masse des Neutronensterns mit der Energiedichte im Inneren und hat stets eine obere Grenze. Ausgehend von der höchsten beobachteten Masse eines Neutronensterns kann also eine Reihe von postulierten Zustandsgleichungen bereits verworfen werden. Diese Grenzmasse ist für eine „besser komprimierbare / weiche“ Zustandsgleichung kleiner als für eine „weniger komprimierbare / steife“ (Nozawa et al., 1998).

Andererseits kann die gesuchte Zustandsgleichung nicht beliebig „steif“ sein, da dies durch die kürzeste bekannte Rotationsperiode eines Neutronensterns eingeschränkt werden kann. Die untere Grenzperiode einer jeden Zustandsgleichung ist durch das Gleichgewicht der Zentrifugalkräfte mit der Eigengravitation am Äquator gegeben. Bei einer schnelleren Rotation würde es den Neutronenstern zerreißen. Die derzeit kürzeste beobachtete Periode ist die von PSR 1937+21 und beträgt 1,56 msec.

Zur Berechnung des Abkühlverhaltens von Neutronensternen werden verschiedene Zustandsgleichungen herangezogen. Das von Pandharipande & Smith (1975) aufgestellte Modell ist ein Beispiel für relativ harte Zustandsgleichungen mit einer niedrigen Dichte im Kern und einer massiven Kruste; das Modell von Friedman & Pandharipande (1981) dagegen ist ein Beispiel für eine eher weichere Zustandsgleichung (siehe Abb. 3.2).

Teil II

Atomphysik und Opazitäten

KAPITEL 4

Atomphysik

Eine Diskussion der Eigenschaften und Spektren von Sternatmosphären ist stets untrennbar mit einer Diskussion der zu Grunde liegenden Opazitäten verbunden. Diese geben an, in welcher Stärke Strahlung einer bestimmten Frequenz und Polarisation von dem Plasma einer Sternatmosphäre absorbiert und emittiert wird. Die Opazitäten hängen zum einen von den lokalen Eigenschaften des Plasmas, wie z.B. der Temperatur und den Besetzungszahlen der atomaren Niveaus, ab. Auf sie soll in Kapitel 6 näher eingegangen werden. Eigentlicher physikalischer Kern der Opazitäten ist jedoch die Atomphysik. Zentrale Größen sind dabei die Energieniveaus und die Oszillatorenstärken der einzelnen Linien. Vor die Diskussion der Opazitäten in Kapitel 5 ist daher dieses Kapitel gestellt, in dem auf die für die Opazitätsberechnung relevante Atomphysik eingegangen wird.

4.1 Einführung

Ziel dieses Kapitel ist es, einen Überblick zu geben, welche Größen in die Berechnung atomarer Energieniveaus eingehen. Der Fokus liegt dabei auf den, für diese Arbeit wichtigen, Einflüssen externer elektrischer und magnetischer Felder auf die Energieniveaus. Einzelne Abschnitte des hier abgehandelten Stoffes werden in sehr vielen Lehrbüchern behandelt. Verwiesen sei auf die gängige Literatur (Einführung in die Atomphysik: Haken & Wolf (1996), Mayer-Kuckuk (1977); Atome in starken Magnetfeldern: Garstang (1977), Ruder et al. (1994)).

Zu Beginn der Überlegungen steht der Hamiltonoperator H eines einzelnen Atoms. Dieser setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen:

$$H = H_{\mathrm{KE}} + H_{\mathrm{coul}} + H_{\mathrm{spin}} + H_{\mathrm{nucl}} + H_{\mathrm{stör}} + H_{\mathrm{mag^{I}}} + H_{\mathrm{mag^{II}}}. \tag{4.1}$$

Der Gesamthamiltonoperator setzt sich dabei aus den Termen für die kinetische Energie (KE), der Coulombwechselwirkung zwischen zwei Elektronen oder dem Kern und einem Elektron (coul), der Spin-Bahn Wechselwirkung (spin) (unter Vernachlässigung höherer Terme wie der Spin-Spin-Wechselwirkung) sowie dem Beitrag des

Kernspins (nucl) zusammen. Ein externes elektrisches Feld geht als Störung ($H_{\text{stör}}$) in das System ein. $H_{\text{mag}^{\text{I}}}$ und $H_{\text{mag}^{\text{II}}}$ geben den Einfluss eines externen Magnetfeldes wieder; wobei $H_{\text{mag}^{\text{I}}}$ solche Terme beinhaltet, die linear in der Magnetfeldstärke sind und $H_{\text{mag}^{\text{II}}}$ solche, die quadratisch in ihr sind.

4.2 Atome in elektrischen Feldern

In den folgenden Abschnitten wird dargestellt, wie sich das Termschema eines wasserstoffähnlichen Atoms durch den Einfluss externer elektrischer oder magnetischer Felder unterschiedlicher Stärke verändert.

Setzt man ein Atom einem externen, schwachen elektrischen Feld aus, so erfährt das Coulomb-Potential des Kerns dadurch eine Störung. Durch die Störung der Kugelsymmetrie des Potentials wird eine vorhandene l-Entartung (l – Drehimpulsquantenzahl) aufgehoben. Der Hamiltonoperator wird um einen Störterm erweitert.

$$\boxed{H = H_{\text{KE}} + H_{\text{coul}} + H_{\text{spin}} + H_{\text{nucl}} + H_{\text{stör}} \qquad \text{mit} \qquad H_{\text{stör}} = \vec{\mu}_{\text{el}} \cdot \vec{E}.}$$

Aber wegen

$$\langle \hat{\mu}_{\text{el}} \rangle = \langle \hat{x} \rangle = e \int \psi^*(x)\, \hat{x}\, \psi(x)\, dx = 0$$

ist $E_{\text{stör}} = 0$. Wobei $\vec{\mu}_{\text{el}}$ das magnetische Dipolmoment des Elektrons, e seine Ladung und $\psi(x)$ seine Ortswellenfunktion bezeichnet. Der Erwartungswert $\langle \hat{\mu}_{\text{el}} \rangle$ verschwindet für Zustände definierter Parität, d.h. für nicht-l-entartete Zustände, da dann $\psi^*(x) \cdot \psi(x)$ eine gerade Funktion in x ist.

Wenn $\vec{\mu}_{\text{el}} = 0$ ist, gibt es keine atomare Parelektrizität, die proportional zu $\vec{E}$ ist; also gibt es auch keine Energieaufnahme W_{el}, die proportional zu $\vec{E}$ ist. Aber ein Atom kann im elektrischen Feld polarisiert werden (Dielektrizität). Dann ist $\mu_{\text{el}} \propto \vec{E}$ und $E_{\text{stör}} \propto \vec{E}^2$. Man spricht daher vom quadratischen Stark-Effekt.

Eine Ausnahme ist der Wasserstoff. Hier sind die Terme bekanntlich j-entartet (j – Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses), d.h. die Konfigurationen mit der Termbezeichnung[1] $^2s_{1/2}$ und $^2p_{1/2}$ haben die gleiche Energie. Die zugehörigen Wellenfunktionen haben keine definierte Parität, weshalb ein permanentes elektrisches Dipolmoment nicht existieren kann; man spricht vom linearen Stark-Effekt.

Wesentlicher Unterschied zur Aufspaltung von Spektrallinien im Magnetfeld (vgl. Abschnitt 4.3) ist die Tatsache, dass sich in einem elektrischen Feld Zustände mit gleichem Absolutwert der magnetischen Quantenzahl m_j gleich verhalten. Salopp

[1] Die Termbezeichnung folgt dem Schema: $^{(2s+1)}l_j$, wobei s die Spinquantenzahl bezeichnet.

begründet ist es dem elektrischen Feld egal, ob das Elektron links oder rechtsherum sich um die Feldlinien bewegt. Die Zahl der Aufspaltungskomponenten ist deshalb beim Stark-Effekt kleiner als beim Zeeman-Effekt.

4.3 Atome in magnetischen Feldern

In diesem Abschnitt wenden wir uns den beiden letzten Termen des Gesamthamiltonoperators eines einzelnen Atoms zu:

$$\boxed{H = H_{\text{KE}} + H_{\text{coul}} + H_{\text{spin}} + H_{\text{nucl}} + H_{\text{mag}^{\text{I}}} + H_{\text{mag}^{\text{II}}}}$$

Schon in der klassischen Mechanik wird gezeigt (Goldstein, 1989), dass man den Hamiltonoperator einer bewegten Ladung dadurch erhalten kann, dass man das lineare Moment $\vec{p}$ durch $\vec{p} + e\vec{A}$ ersetzt. $\vec{A}$ ist dabei das Vektorpotential des Feldes. Setzt man diesen Ansatz in $\vec{p}^2/2m_e$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{2m_e}(\vec{p} + e\vec{A})^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} + \frac{e}{2m_e}(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}) + \frac{e^2\vec{A}^2}{2m_e}. \tag{4.2}$$

Von nun an bezeichnen wir mit H_{KE} nur den Term $\vec{p}^2/2m_e$. Terme, die linear in $\vec{A}$ sind, werden in $H_{\text{mag}^{\text{I}}}$ zusammengefasst und die in $\vec{A}$ quadratischen in $H_{\text{mag}^{\text{II}}}$. In einem homogenen Magnetfeld kann man für $\vec{A}$ ansetzen: $\vec{A} = 1/2\vec{B}\times\vec{r}$ mit div $\vec{A} = 0$ und rot$\vec{A} = \vec{B}$. Orientiert man die z-Achse des Koordinatensystems in Magnetfeldrichtung, so erhält man mit $\vec{B}\times\vec{r} = B\,r\,\sin\theta$ für die beiden Terme des Hamiltonoperators:

$$H_{\text{mag}^{\text{I}}} = \frac{e}{2m_e}\cdot B\cdot(L_z + g_e S_z), \tag{4.3}$$

$$H_{\text{mag}^{\text{II}}} = \frac{e^2}{8m_e}\cdot B^2\cdot\sum r_i^2\sin^2\theta_i. \tag{4.4}$$

Dabei bezeichnet g_e den g-Faktor des Elektrons und L_z bzw. S_z die Operatoren für den Drehimpuls bzw. Spin.

4.3.1 Schwache Magnetfelder – der lineare Zeeman-Effekt

$$\boxed{H_{\text{coul}} \gg H_{\text{spin}} \gg H_{\text{mag}^{\text{I}}} \qquad H_{\text{nucl}}, H_{\text{mag}^{\text{II}}} \approx 0.}$$

Dies entspricht einem Atom in einem schwachen Magnetfeld, das noch mit Hilfe der *LS*-Kopplung beschrieben werden kann. Man erhält für einen Zustand $|SLJM_J\rangle$

(L, S, J bezeichnen die jeweilige Quantenzahl und $M_{S/L/J}$ die magnetische Quantenzahl eines Mehrelektronensystems) einen Beitrag von:

$$\langle SLJM_J | H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{I}}} | SLJM_J \rangle = \frac{e\hbar}{2m_e} B g_J M_J. \tag{4.5}$$

Dabei ist g_J der dimensionslose Landé Faktor:

$$g_J = 1 + (g_e - 1) \cdot \left(\frac{S(S+1) - L(L+1) + J(J+1)}{2J(J+1)} \right). \tag{4.6}$$

Das durch $|SLJ\rangle$ charakterisierte Energieniveau spaltet sich also in $2J+1$ Komponenten auf ($-J \leq M_J \leq J$). Diese Aufspaltung im schwachen Magnetfeld wird als linearer Zeeman-Effekt bezeichnet. Die Berechnung des Zeeman-Effekts kann auch auf Atome angewendet werden, die anderen Kopplungsschemata folgen. In diesen Fällen beschreibt Gl. 4.5 die Energieaufspaltung weiterhin korrekt, jedoch wird g_J nicht mehr durch Gl. 4.6 beschrieben, sondern muss entsprechend des Kopplungsschemas berechnet werden.

Das resultierende Spektrum der Zeemanaufspaltung ergibt sich schließlich durch die Auswahlregel für optische Übergänge:

$$\Delta M_J = 0, \ \pm 1.$$

Abbildung 4.1 verdeutlicht die Verschiebung der Energieniveaus beim Übergang vom Zeeman- zum Paschen-Back-Bereich.

4.3.2 Mittlere Magnetfelder – das erste Übergangsgebiet

$$\boxed{H_{\mathrm{coul}} \gg H_{\mathrm{spin}} \approx H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{I}}} \qquad H_{\mathrm{nucl}}, H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{II}}} \approx 0.}$$

In diesem Übergangsbereich sind Spin-Bahn-Kopplung und die magnetischen Kräfte von gleicher Größenordnung. $|SLJM_J\rangle$ oder $|SM_SLM_L\rangle$ sind beides adäquate Ansätze zur Beschreibung eines Eigenzustandes. Im ersten Fall ist H_{spin} diagonal in J, im letzteren $H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{I}}}$ diagonal in M_S und M_L.

4.3.3 Starke Magnetfelder – der Paschen-Back-Effekt

$$\boxed{H_{\mathrm{coul}} \gg H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{I}}} \gg H_{\mathrm{spin}} \qquad H_{\mathrm{nucl}}, H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{II}}} \approx 0}$$

Dies entspricht der einfachsten Starkfeld Beschreibung; die magnetischen Wechselwirkungen sind stark genug, um die Spin-Bahn-Kopplung aufzubrechen. Da $H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{I}}}$

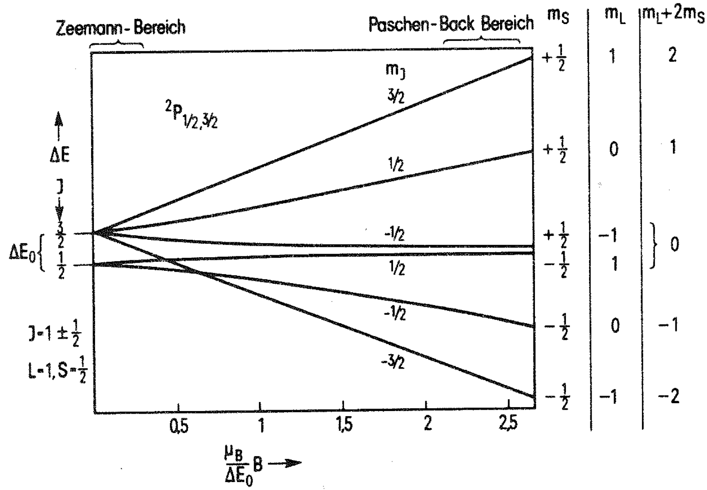


Abbildung 4.1: Übergang vom Zeeman- zum Paschen-Back-Effekt für ein ${}^2P_{1/2,3/2}$-Dublett (Quelle: Mayer-Kuckuk, 1977).

mit $\vec{S}^2, S_z, \vec{L}^2$ und L_z kommutiert, lässt sich ein Eigenzustand als $|SM_SLM_L\rangle$ darstellen. Als Energieaufspaltung erhält man

$$\langle SM_SLM_L|H_{\mathrm{mag^I}}|SM_SLM_L\rangle = \frac{e\hbar}{2m}B\,(M_L + g_eM_S). \tag{4.7}$$

Diese Energieaufspaltung im starken Magnetfeld wird Paschen-Back-Effekt genannt. Da die Nebendiagonalelemente von $H_{\mathrm{mag^I}}$ nicht besetzt sind, kann in erster Ordnung angenommen werden, dass die Kopplung der einzelnen Spins- und Bahndrehimpulse zu $\vec{S}$ bzw. $\vec{L}$ vom Magnetfeld nicht aufgebrochen wird. Die Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung im Paschen-Back-Fall lauten:

$$\Delta M_S = 0 \qquad \text{und} \qquad \Delta M_L = 0,\ \pm 1.$$

Berechnet man die Energiedifferenz zwischen zwei aufgespalteten Energieniveaus, so erhält man:

$$\Delta E = \Delta E_0 + \frac{e\hbar}{2m}B\,\Delta M_L, \tag{4.8}$$

wobei ΔE_0 die Energiedifferenz im feldfreien Fall ist. Im Paschen-Back Fall spaltet also eine Spektrallinie in drei Komponenten, dem Paschen-Back-Triplett, auf.

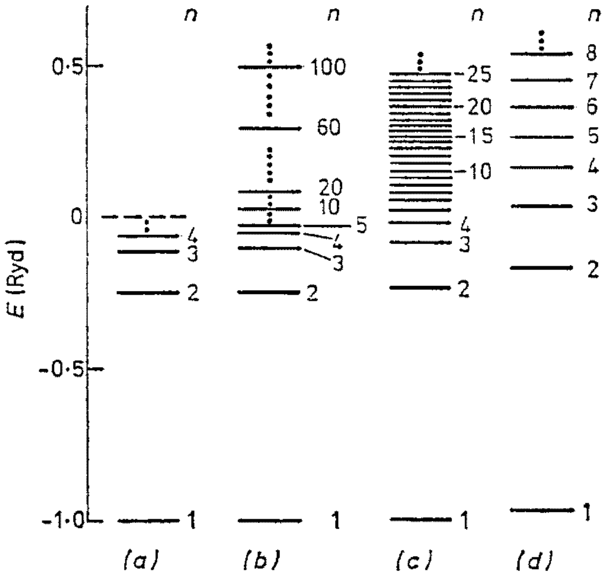


Abbildung 4.2: Die Landauniveaus im bohrschen H-Atom für die Feldstärke (a) 0 Gauß, (b) $5{,}88 \cdot 10^6$ Gauß, (c) $2{,}35 \cdot 10^7$ Gauß, (d) $9{,}4 \cdot 10^7$ G. Die Energie ist in Rydberg angegeben ($1\,\mathrm{Ryd} = R_\infty \approx 13{,}61\,\mathrm{eV}$). Die horizontal gestrichelte Linie markiert die Ionisationsgrenze. Man beachte, dass für $B \neq 0$ die diskreten Energieniveaus sich zu unbegrenzt hohen Energien erstrecken. Der Elektronenspin wurde in diesem Diagramm vernachlässigt (Quelle: Garstang, 1977).

4.3.4 Starke Magnetfelder – der quadratische Zeeman-Effekt

In den bisherigen Betrachtungen gingen wir davon aus, dass $H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{II}}}$, d.h. der in B quadratische Term vernachlässigbar ist. Mit zunehmender Feldstärke B kann jedoch der Beitrag von $H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{II}}}$ signifikant werden, sowohl absolut gesehen als auch relativ zu den Beiträgen der anderen Terme. Dies kann im Zeeman-Bereich, im Paschen-Back-Bereich oder im intermediären Bereich zwischen Zeeman- und Paschen-Back-Bereich als Effekt 2. Ordnung auftreten. Tritt dieser Fall ein, so spricht man vom quadratischen Zeeman-Effekt.

4.3.5 Sehr starke Magnetfelder – die Landau-Niveaus

Wenn man nun zu noch stärkeren Magnetfeldern übergeht ($B > Z^2 \times 3{,}0 \cdot 10^{10}$), so kommt man in den Bereich, in dem $H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{I}}} + H_{\mathrm{mag}^{\mathrm{II}}} \gg H_{\mathrm{coul}}$ ist. Im Grenzfall handelt es

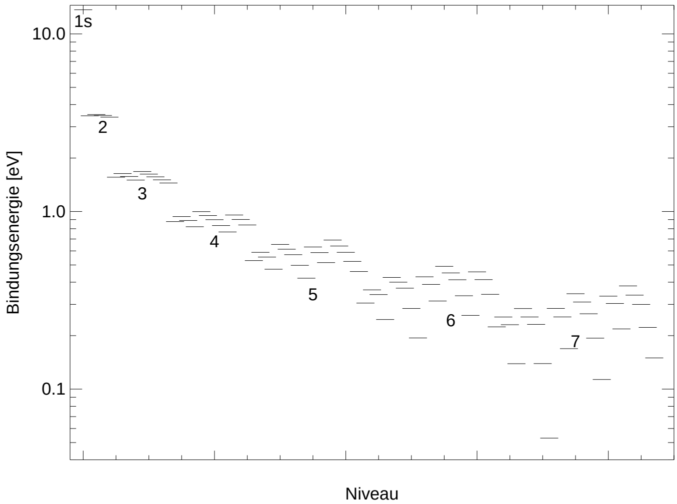


Abbildung 4.3: Bindungsenergie (eV) der Wasserstoff-Energieniveaus bei einer Magnetfeldstärke von 10^7 Gauß. Diese Daten basieren auf den Tabellen von Ruder et al. (1994) und wurden für diese Magnetfeldstärke interpoliert. Zu Gunsten der Übersichtlichkeit ist nur die Hauptquantenzahl der Niveaus angegeben. Ein Vergleich mit Abb. 4.4 zeigt den starken Einfluss eines Magnetfeldes auf die Bindungsenergie.

sich um die Bewegung freier Elektronen. Klassisch kann die Bewegung eines Elektrons auf einer Kreisbahn um die Magnetfeldrichtung (z-Achse) mit der Geschwindigkeit v mit Hilfe der Lorentzkraft beschrieben werden:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = e\mathrm{v}B. \tag{4.9}$$

Landau (1930) behandelte diese Fragestellung erstmals quantenmechanisch. Er zeigte, dass Bahnradius und Energieniveaus nicht kontinuierlich verteilt sind, sondern vielmehr in diskreten, quantisierten Werten, den Landau-Energieniveaus auftreten:

$$\begin{aligned} r_o^2 &= (2\lambda+1)R_\mathrm{c}^2 & R_\mathrm{c} &= \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \\ E &= (K+\frac{1}{2})\,\hbar\,\omega_\mathrm{c} + \frac{p_z^2}{2m} & \omega_\mathrm{c} &= \frac{eB}{m} \\ \lambda &\leq 0,1,2\ldots & K &\leq 0,1,2\ldots \end{aligned} \tag{4.10}$$

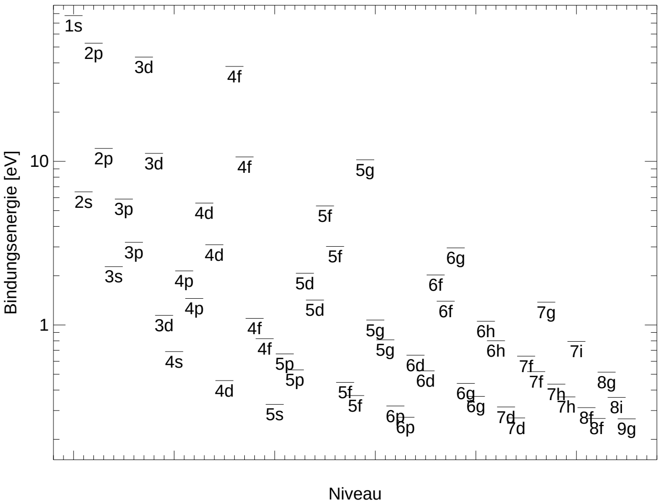


Abbildung 4.4: Bindungsenergie (eV) der Wasserstoff Energieniveaus bei einer Magnetfeldstärke von 10^{11} Gauß (logarithmische y-Achse). Diese Daten basieren auf den Tabellen von Braun (2002b) und wurden für diese Magnetfeldstärke interpoliert. Die Niveaus sind gemäß der gängigen LS-Kopplung Termbezeichnung mit ihrer Hauptquantenzahl und Drehimpulsquantenzahl bezeichnet. Dies macht bei dieser Feldstärke streng physikalisch keinen Sinn, erleichtert jedoch das Verständnis der Daten. Niveaus mit einer positiven M-Quantenzahl liegen oberhalb der Ionisationsgrenze und gehen daher nicht in Rechnung ein. Je kleiner die M-Quantenzahl ist, desto stärker gebunden ist das zugehörige Niveau.

Mir R_c und ω_c wird der Zyklotron-Radius bzw. die Zyklotron-Frequenz (hier in SI Einheiten) bezeichnet. Verwendet man Zylinderkoordinaten, so ist dieses System in ρ und φ quantisiert, nicht jedoch in z-Richtung. Wie sehen nun die Energieterme eines wasserstoffähnlichen Atoms in einem starken Magnetfeld aus?

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = eB\mathrm{v} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \text{Kraftgleichung} \tag{4.11}$$

$$n\hbar = m\mathrm{v}r - \frac{eBr^2}{2} \qquad \text{Quantisierung des Drehmoments} \tag{4.12}$$

$$E = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad \text{Gesamtenergie} \tag{4.13}$$

Dabei bezeichnet ε_0 die elektrische Feldkonstante. Eliminiert man v so erhält man:

$$n^2 = \frac{rZ}{a_0} + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \tag{4.14}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}. \qquad \text{bohrscher Radius} \tag{4.15}$$

Für kleine B ist R groß und man erhält $r \approx n^2 a_0/Z$ ($Z \equiv$ Kernladungszahl), den normalen bohrschen Radius. Für große B ergibt sich $r \approx \sqrt{2n}R$, der klassische Landau-Radius. Somit kann die Gesamtenergie ausgedrückt werden als

$$E = \hbar\omega_\mathrm{c}\left(\frac{1}{2}n + \frac{r^2}{4R^2} - \frac{ZR^2}{2ra_0}\right). \tag{4.16}$$

Die Bindungsenergie ergibt sich als Differenz zwischen der momentanen Energie und der Energie in Abwesenheit des Coulombfeldes: $ZR^2\hbar\omega_\mathrm{c}/2ra_0$ (siehe Abb. 4.2).

Geht man zu immer höheren Magnetfeldern, so dominiert zunehmend $H_{\mathrm{mag^{II}}}$, da dieser in B quadratisch ist. Bei der Lösung der Schrödingergleichung taucht nun die Schwierigkeit auf, dass nur noch der Bahndrehimpuls in Magnetfeldrichtung l_z und die Parität „gute“ Quantenzahlen sind. Eine weitere Separation des Problems ist jedoch nicht mehr möglich.

Eine Berechnung der Eigenwerte kann in diesem Fall nicht mehr durch Entwicklung der Wellenfunktionen nach Kugelfunktionen geschehen, da die sphärische Symmetrie des Coulombfeldes immer mehr zerstört wird. Eine Entwicklung in zylindrische Landauzustände ist hier geeigneter. Setzt man diesen Ansatz in die Schrödingergleichung ein, so erhält man eine Differentialgleichung, deren nummerische Lösung schwierig ist.

Für Atome in starken Magnetfeldern muss gleichzeitig eine neue Art der Termbezeichnung gefunden werden. Nach Garstang (1977) verwendet man für den Fall schwacher Felder eine Basis, die man aus einer Mischung der Nullfeldwellenfunktionen in der $n-l-m_l$-Basis zusammensetzt. Solange keine Terme mit verschiedener Hauptquantenzahl mischen, erfolgt die Bezeichnung gemäß des Hauptbeitrags ($0.832|5s_0\rangle - 0.543|5d_0\rangle + 0.114|5g_0\rangle \rightsquigarrow |5s_0'\rangle$). Auf der anderen Seite ist es möglich, die asymptotischen Landau-Quantenzahlen n, m (Landauniveau, magnetische Quantenzahl) und ν (Parität: $\pi = (-1)^\nu$) zu verwenden.

Das Ergebnis dieser Rechnung zeigt eindrucksvoll die Abbildung 4.5, in der die aus den Energieeigenwerten berechneten Wellenlängen der Wasserstofflinien in Abhängigkeit vom Magnetfeld aufgetragen sind. Bei niedrigen Feldstärken kann man noch gut die vertraute Aufspaltung niedriger Übergänge in Zeeman-Tripletts erkennen; mit weiter zunehmender Feldstärke teilen diese sich in weitere Komponenten auf, deren Wellenlänge zum Teil um mehrere tausend Ångstrom verschoben sein können.

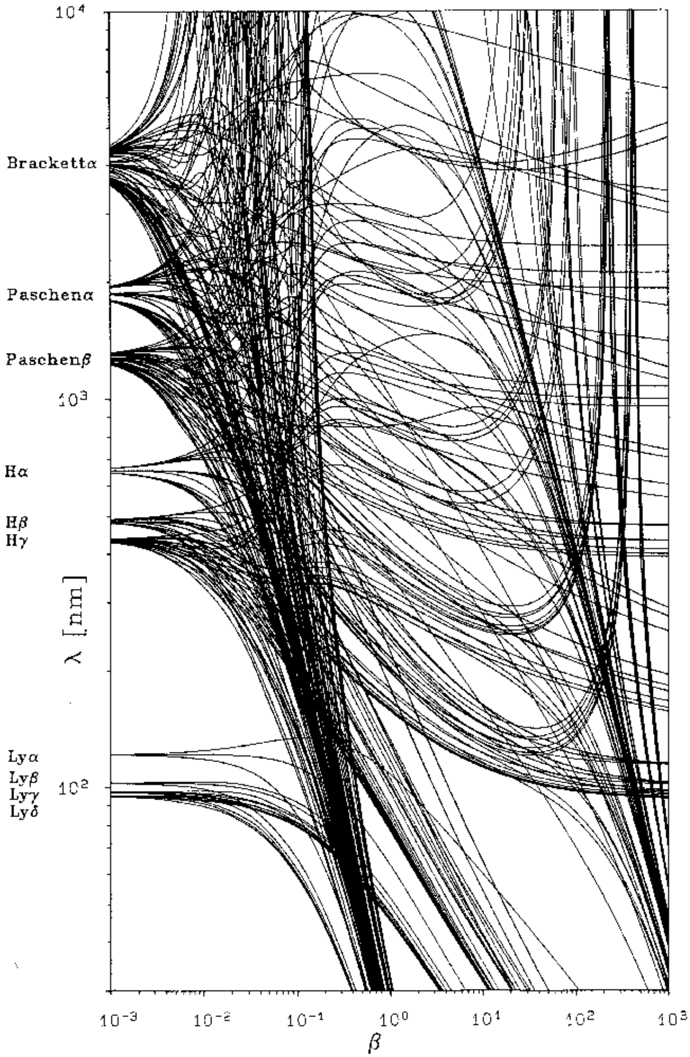


Abbildung 4.5: Lage der Wasserstofflinien in Abhängigkeit vom Magnetfeld ($\beta \equiv B/B_0$ mit $B_0 \approx 4,7018 \cdot 10^9$ Gauß). Man beachte die Maxima und Minima, die einige Komponenten durchlaufen; dies sind die sogenannten stationären Komponenten (Quelle: Ruder et al., 1994).

4.3.6 Die Oszillatorenstärke

Für die spätere Berechnung der Opazitäten ist neben der Bindungsenergie der einzelnen Zustände die Oszillatorenstärke die entscheidende Information, die von der Atomphysik bereitgestellt werden muss. Die Oszillatorenstärke ist ein Maß für die Stärke eines Übergangs zwischen zwei gebundenen Zuständen und ergibt sich aus dem Dipol-Matrixelement $p_{if}^{\Delta m}$ und der Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand ΔE_{if} (1 Rydberg = $R_\infty \approx 13{,}61\,\mathrm{eV}$).

$$d_{if}^{\Delta m} = \left| p_{if}^{\Delta m} \right|^2 \qquad \text{Dipolstärke} \tag{4.17}$$

$$f_{if}^{\Delta m} = \frac{\Delta E_{if}}{1\,R_\infty} \cdot \left| p_{if}^{\Delta m} \right|^2 . \qquad \text{Oszillatorstärke} \tag{4.18}$$

Da die Wellenfunktionen senkrecht zur Magnetfeldachse stark komprimiert werden, ändern sich nicht nur die Energieniveaus sondern auch die Dipolmomente der Atome. Daraus ergibt sich eine stark veränderte Oszillatorstärke, die bei bestimmten Feldern ausgeprägte Maxima haben und bei anderen sogar Null werden können.

4.4 Die Eigenbewegung der Atome im Magnetfeld

Ein Problem ganz anderer Art ist es, dass man bei den bisherigen Überlegungen implizit von einem ruhenden Atom ausgegangen ist. Nun ist aber die Atmosphäre eines Neutronensterns sehr heiß ($T \sim 10^5 - 10^6\,\mathrm{K}$), so dass die typischen Energien der thermischen Bewegung der Atome im Vergleich zu den Bindungsenergien nicht vernachlässigt werden können. Die Berücksichtigung der thermischen Bewegung ist jedoch sehr schwierig, da ein sich senkrecht zum Magnetfeld bewegendes Atom einem in einem orthogonalen elektrischen und magnetischen Feld ruhenden Atom entspricht. Eine solche Feldkonfiguration zerstört jedoch die Zylindersymmetrie.

4.5 Die in dieser Arbeit verwendeten Atomdaten

Die Berechnung von Energieniveaus und Oszillatorenstärken für Atome ist ein eigenes, sehr schwieriges Gebiet. Für den magnetfeldfreien Fall werden seit langem derartige Daten von etlichen Forschungsgruppen sukzessive für Wasserstoff bis hin zu den Eisengruppenelementen mit verschiedenen Ansätzen und variierender Genauigkeit berechnet (z.B. Kurucz 1991; Seaton et al. 1994).

Wie in Teil I ausgeführt besitzen Neutronensterne zum Teil sehr starke Magnetfelder. Durch das externe Magnetfeld werden bestehende Symmetrien aufgebrochen und es ist schwierig eine geeignete Basis zu finden, in der die Eigenzustände gut

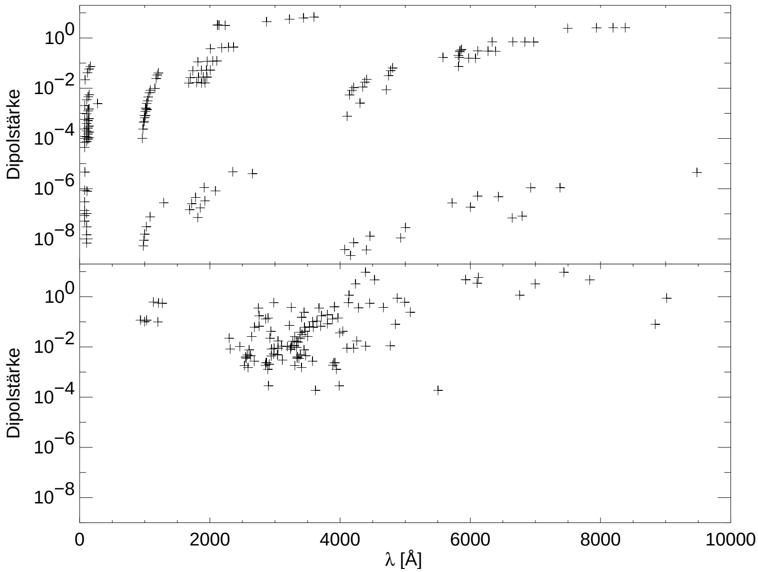


Abbildung 4.6: Dipolstärke der in den Datensätzen von Ruder et al. (1994) und Braun (2002b) enthaltenen Linien für eine Feldstärke von 10^8 (unten) bzw. 10^{12} Gauß (oben).

dargestellt werden können. Insbesondere die Übergangsbereiche mittlerer Feldstärke erweisen sich als problematisch, da hier H_{coul} und $H_{mag\,\mathrm{I}}$ von derselben Größenordnung sind. Leider sind dies oftmals die Bereiche, die von besonderer astrophysikalischer Relevanz sind (z.B. bei Weißen Zwergen). Auf Grund dieser Schwierigkeiten beschränken sich viele publizierte Berechnungen auf die Grundzustände von Elementen. Ohne Kenntnis der Wellenlänge der Übergänge und der zugehörigen Oszillatorenstärken können jedoch keine Opazitäten berechnet werden und sind für diese Arbeit nutzlos.

Die einzigen momentan vollständig verfügbaren Atomdaten sind Rechnungen (Lieb & Solovej, 1992) zu Wasserstoff. Die Linienpositionen von Helium bei verschiedenen Magnetfeldstärken stehen ebenso schon zur Verfügung. Die für die Strahlungstransportrechnung zusätzlich erforderlichen Oszillatorenstärken sollen jedoch erst demnächst publiziert werden. Darüberhinaus gibt es intensive Anstrengungen weitere Elemente zu berechnen; z.B. Neuhauser et al. (1986) und Lieb & Solovej (1992). Insbesondere das für Neutronensterne entscheidende Eisen stellt auf Grund seiner bis zu 26 Elektronen (je nach Ionisationsstufe) eine neue Herausforderung dar (z.B. Rajagopal et al. 1997; Mori & Hailey 2002). Allerdings beschränken sich viele Be-

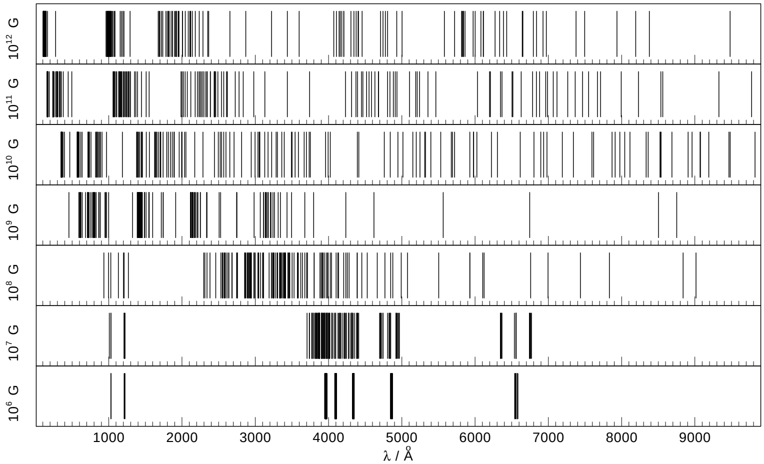


Abbildung 4.7: Vergleich der Wellenlängen der Linien von Wasserstoff bei Feldstärken von 10^6 (unten) – 10^{12} Gauß (oben). Im Bereich $10^6 - 10^9$ werden die Daten von Ruder et al. (1994) verwendet, in dem darüber liegenden Bereich die von Braun (2002b).

rechnungen auf die Grundzustände der Atome. Im Vordergrund liegt zumeist noch die Diskussion der verwendeten Berechnungsmethoden. Die Publikation eines vollständigen Satzes zuverlässiger Atomdaten steht noch aus. Eine Berücksichtigung der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Eigenbewegung der Atome ist momentan nicht oder nur unter Vernachlässigung eigentlich wichtigerer Aspekte möglich.

In dem bereits etablierten Feld der magnetischen Weißen Zwerge sind aus diesen Gründen reine Wasserstoffatmosphären Stand der heutigen Forschung und erste Ergebnisse zu gemischten H/He-Atmosphären werden präsentiert. Ziel bei der Berechnung von Neutronensternatmosphären sollte es deshalb sein, zunächst diesen Stand zu erreichen. In dieser Arbeit werden die Atomdaten von Ruder et al. (1994) (siehe Abb. 4.3, Abb. 4.5), Braun (2002a) und Braun (2002b) (siehe Abb. 4.4, Abb. 4.6) verwendet (siehe Abb. 4.7).

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich stets auf die Berechnung der Linienübergänge. Genauso wichtig sind die kontinuierlichen gebunden-frei-Übergänge. Leider gibt es dazu keine Berechnungen und man ist auf die Verwendung von Näherungsformeln angewiesen. Die Berücksichtigung der kontinuierlichen Absorption stellt den größten Unsicherheitsfaktor bei der Berechnung synthetischer Spektren von Weißen Zwergen oder Neutronensternen dar.

4.5.1 Die Aufbereitung der Atomdaten

In dieser Arbeit werden die von Ruder et al. (1994) berechneten Wasserstoff-Atomdaten in der von Jordan (1988) aufbereiteten Form verwendet. Es stehen dabei für 152 Linien folgende Daten zur Verfügung: Bezeichnung des Übergangs, Faktor n_k für die Starkverbreiterung, Energie des unteren und des oberen Niveaus, die Wellenlänge des Übergangs sowie das Dipol-Matrixelement für verschiedene Werte von β ($\beta \equiv B/B_0$ mit $B_0 = 4,7018 \cdot 10^9$ Gauß). Atomdaten für hohe Magnetfeldstärken stehen dabei nur für wenige Linien zur Verfügung.

Diese Daten müssen für die Bedürfnisse der Modellrechnung aufbereitet werden. Die Magnetfeldgeometrie gibt den Wertebereich $[B_{min}, B_{max}]$ vor, innerhalb dessen beliebige Werte für B im Laufe der Rechnung auftreten können. Um eine konsistente Behandlung zu gewährleisten, werden daher als erstes diejenigen Linien ausgeschlossen, die diesen Wertebereich nicht vollständig abdecken. Um die Atomdaten an beliebigen Feldstärken zu erhalten, werden durch die in β diskretisierten Daten ein kubischer Spline gefittet (siehe Press et al., 1986), der eine zuverlässige Interpolation für jedes beliebige β erlaubt.

Kapitel 5

Berechnung der Opazitäten

Die für den Strahlungstransport relevanten Eigenschaften des Plasmas, aus dem eine Neutronensternatmosphäre besteht, wird durch die Opazitäten $\kappa_r(\nu)$, $\kappa_p(\nu)$, $\kappa_l(\nu)$ sowie die magneto-optischen Parameter ρ_w und ρ_r beschrieben. Diese Größen gehen in die Strahlungstransportgleichung Gl. 7.4 als Komponenten der Transportmatrix ein. Ihrer Berechnung widmet sich dieses Kapitel.

Um die Opazitäten innerhalb einer Sternatmosphäre berechnen zu können, bedarf es zum einen der Kenntnis der atomaren Wirkungsquerschnitte (siehe Kapitel 4) und zum anderen der Struktur der Sternatmosphäre (siehe Kapitel 6). Zur Struktur gehören z.B. die Temperatur- und Dichteschichtung sowie die tiefenabhängigen Besetzungszahlen der atomaren Niveaus.

5.1 Die Grundbegriffe

5.1.1 Die Aufspaltung im Magnetfeld

Wird ein externes Magnetfeld mit in die Betrachtung einbezogen, so kommt die Aufhebung der Entartung der Wasserstoffniveaus bezüglich der magnetischen Quantenzahl m_l hinzu. Als Resultat beobachtet man eine Aufspaltung der Spektrallinien im Magnetfeld, wie sie erstmals von Zeeman 1896 beobachtet wurde. Bei den hier betrachteten Dipolübergängen muss dann entsprechend zwischen Übergängen mit $\Delta m_l = -1, 0, 1$, d.h. σ_+ (linkszirkularem – l), π (parallelen – p) und σ_- (rechtszirkularem – r) Licht unterschieden werden. Die Opazität einer einzelnen Linie wird also entsprechend dem Δm dieser Linie in die drei Opazitäts-Koeffizienten κ_l, κ_p, oder κ_r aufgeteilt (siehe Abb. 5.1 und Abb. 5.2).

5.1.2 Die Opazität

Die Opazität κ gibt an, wieviel Intensität $I(\nu)$ bei der Frequenz ν aus einem Strahl entlang der Strecke ds absorbiert wird:

$$\frac{dI(\nu)}{ds} = -\kappa(\nu) \cdot I(\nu). \tag{5.1}$$

Die Opazität $\kappa(\nu)$ einer Linie oder eines Übergangs in das Kontinuum (ohne stimulierte Emission) hängt von zwei Größen ab:

$$\kappa(\nu) = \sigma(\nu)\, n_{\text{low}}. \tag{5.2}$$

Der erste Term ist der Wirkungsquerschnitt $\sigma(\nu)$ des Übergangs, der zweite Term stellt die Besetzungsdichte (Teilchen/Volumen) dar, von dem der betrachtete Übergang ausgeht. Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche. Es ist üblich, die Frequenzabhängigkeit des Querschnitts bei Linienabsorption in Form einer normierten Profilfunktion $\Phi(\nu)$ abzuspalten:

$$\sigma(\nu) = \sigma_0 \cdot \Phi(\nu). \tag{5.3}$$

5.2 *Die Besetzungszahlen der Wasserstoffniveaus*

Im Folgenden wird kurz skizziert, wie man aus den Besetzungszahlen für den feldfreien, entarteten Fall, also den Eingangsgrößen (siehe Abschnitt 6.4.2), die Werte für den im Magnetfeld aufgespaltenen Fall erhält.

Die tiefenabhängigen (Index d) Besetzungszahlen der durch das Magnetfeld in ihre Feinstruktur aufgespaltenen Wasserstoffniveaus n_d^i ergeben sich aus den Besetzungszahlen des feldfreien Falles $\tilde{n}_d^N$ und der Temperatur der jeweiligen Tiefe T_d unter der Annahme des LTE:

$$\begin{aligned} n_d^i \equiv n_d^{N,L,M} &= \tilde{n}_d^N \cdot \frac{\mathrm{w}_d^{N,L,M}}{b_d^N} \\ \mathrm{w}_d^{N,L,M} &= e^{\frac{E^{N,L,M} - E_{\text{min}}}{kT_d}} \\ b_d^N &= \sum_{L=0}^{N-1} \sum_{M=-L}^{L} \mathrm{w}_d^{N,L,M}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Hierbei sind:	E_{min}	Energie des Grundzustandes
	k	Boltzmann Konstante
	$N \in [1, N_{\text{max}}]$	die Hauptquantenzahl des neutralen H-Atoms
	$L \in [0, N-1]$	die Drehimpulsquantenzahl
	$M \in [-L, L]$	die magnetische Quantenzahl

$$i \in [1, \frac{N_{\text{max}}(N_{\text{max}}+1)(2N_{\text{max}}+1)}{6}]$$

In der praktischen Anwendung unterliegt man der Einschränkung, dass bei einer bestimmten magnetischen Feldstärke i.A. nicht alle aufgespalteten Energieniveaus $E^{N,L,M}$ bekannt sind. Sie werden in den obigen Summen entsprechend ausgelassen.

Des Weiteren muss bei der Anwendung beachtet werden, in welchen Einheiten die Energie der einzelnen Niveaus notiert wird. Die hier verwendeten atomaren Daten sind in Rydberg notiert und werden entsprechend in gaußsche Einheiten umgerechnet.

Im Laufe der Arbeit hat es sich jedoch gezeigt, dass die Energieniveaus im Magnetfall sehr stark verschoben und aufgespalten werden. Es macht daher nur bei niedrigeren Feldstärken, wenn die Aufspaltung noch klein im Vergleich zu den Niveauabständen sind, Sinn die hier beschriebene LTE-gemäße Aufteilung der Besetzungszahlen zu verwenden. Für die in Kapitel 12 gezeigten Ergebnisse wurden daher stets auf der Nullfeld-Temperaturstruktur basierende LTE-Besetzungszahlen verwendet, wobei das Ionisationsgleichgewicht beibehalten wurde.

5.3 Die Linienopazität

Der Beitrag einer Linie zur Gesamtopazität setzt sich aus vier Komponenten zusammen:

$$\kappa(\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} \cdot f_{lu} \cdot \Phi(\nu_0 - \nu) \cdot (n_{\text{low}} - \frac{g_{\text{low}}}{g_{\text{up}}} n_{\text{up}}). \tag{5.5}$$

Dabei sind $\sigma_0 = \frac{\pi e^2}{m_e c}$ der Querschnitt des klassischen Oszillators; c die Lichtgeschwindigkeit; die Oszillatorenstärke f_{lu} ist der quantenmechanische Korrekturfaktor eines individuellen Übergangs low $\longrightarrow$ up; $\Phi(\nu_0 - \nu)$ dessen normierte Profilfunktion. Mit dem Beitrag $-g_{\text{low}}/g_{\text{up}} n_{\text{up}}$ wird die stimulierte Emission berücksichtigt; dabei sind n_{low}, g_{low}, n_{up} und g_{up} die Besetzungszahlen bzw. statistischen Gewichte des unteren und des oberen Niveaus. Im LTE beschreibt das Boltzmann-Gesetz, wie diese beiden Größen innerhalb einer Ionisationsstufe miteinander verbunden sind:

$$\frac{n_{\text{up}}}{n_{\text{low}}} = \frac{g_{\text{up}}}{g_{\text{low}}} \, e^{-(E_{\text{up}} - E_{\text{low}})/kT} \tag{5.6}$$

5.3.1 Das Linienprofil einer einzelnen Linie

Drei verschiedene Einflüsse sind für das resultierende Linienprofil einer einzelnen Linie verantwortlich. Es sind dies die thermische Verbreiterung, die Starkverbreiterung und die Strahlungsdämpfung (natürliche Linienbreite) (siehe z.B. Mihalas, 1978).

5.3.1.1 Thermische Verbreiterung

Die thermische Verbreitung wird durch die thermische Bewegung der strahlenden Atome, d.h. durch den Dopplereffekt, verursacht und wird durch ein Gaußprofil beschrieben. Man geht dabei von einer maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung aus. Die Dopplerbreite ergibt sich zu:

$$\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \nu_0 \sqrt{\frac{kT}{\frac{1}{2}\, m_{\mathrm{Atom}}\, c^2}}. \tag{5.7}$$

5.3.1.2 Strahlungsdämpfung

Die Strahlungsdämpfung resultiert aus der endlichen Lebensdauer angeregter Energieniveaus und der damit verbundenen Energieunschärfe; sie wird durch ein Lorentzprofil charakterisiert. Sie ist durch die klassische Strahlungsdämpfungskonstante gekennzeichnet:

$$\gamma_{rad} = \frac{8}{3}\frac{\pi^2 e^2}{m_e c^3} \cdot \nu_0^2. \tag{5.8}$$

5.3.1.3 Starkverbreiterung

Wechselwirkung des strahlenden Atoms mit anderen Teilchen (Ionen, Atomen, Elektronen) sind die Ursache der Druckverbreiterung. Physikalisch handelt es sich um die Einflüsse von Eigendruckverbreiterung sowie linearem und quadratischem Starkeffekt auf Lage und Breite der Energieniveaus.

In schwachen Magnetfeldern ist die Starkverbreiterung der dominierende Prozess. Hervorgerufen wird diese Verbreiterung der Spektrallinien durch die statistische Überlagerung der elektrischen Felder aller das Leuchtatom umgebenden Ionen. Das resultierende lokale elektrische Feld wird mit Hilfe der holtsmarkschen Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet (Holtsmark 1919; Holtsmark 1924). Basierend auf den Rechnungen zum linearen Starkeffekt von Schwarzschild (1916) und Epstein (1916) kann die Starkverbreiterung sehr vereinfacht durch ein Lorentzprofil charakterisiert werden. Für Wasserstoff ergibt sich:

$$\gamma_{\mathrm{stark}} = \frac{3h}{8\pi\, e\, m_e} \cdot E_0 \cdot \bar{n}_k \cdot C_{\mathrm{stark}}, \tag{5.9}$$

$$E_0 = 2{,}6 \cdot e \cdot N^{2/3}. \tag{5.10}$$

E_0 ist eine Abschätzung der elektrischen Feldstärke am Ort des emittierenden Atoms; N ist die Teilchenzahldichte der Ionen und $\bar{n}_k$ eine Zahl, die von dem Anfangs- und Endterm des betrachteten Übergangs abhängt. Tabellen für die Starkkomponenten und deren $\bar{n}_k$ haben Underhill & Waddell (1959) veröffentlicht. C_{stark} ist ein freier Parameter in der Größenordnung von eins, der eine freie Änderung der Stärke der Starkverbreiterung erlaubt.

Obwohl unzureichend, dürften die Auswirkungen dieser Beschreibung vor allem für hohen Magnetfeldstärken ($\geq 10^{10}$ Gauß) eingeschränkt sein. Für diese Felder

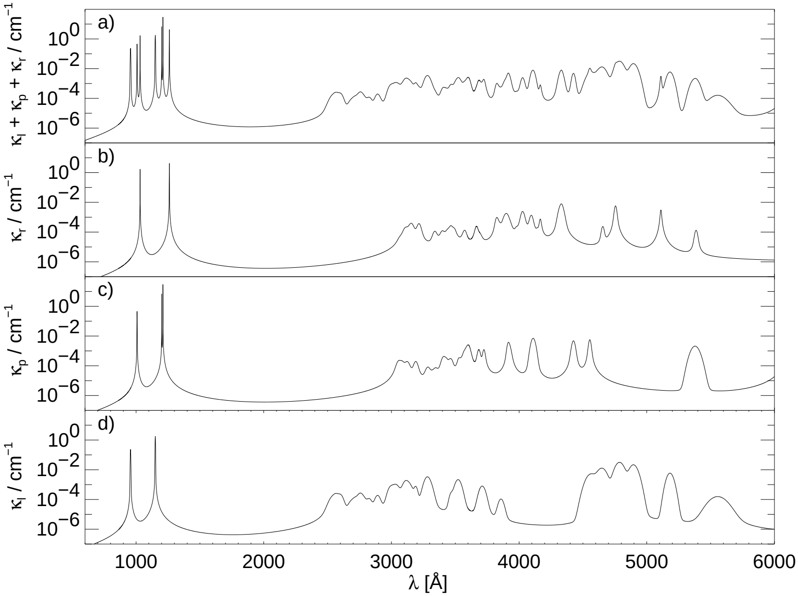


Abbildung 5.1: Verlauf der Linienopazitäten κ_l (d), κ_p (c), κ_r (b) und deren Summe (a) für eine Magnetfeldstärke von 10^8 Gauß. Diese Opazitäten wurden für ein einzelnes Segment mit T_{eff}=16 000K, $\log g$=8,0, $\alpha=45°$ und $\Delta B = 2{,}0 \cdot 10^6$ Gauß. Die angegebenen Feldstärken sind die jeweiligen Polfeldstärken. Dargestellt sind die Opazitäten am innersten Tiefenpunkt (T $\approx$ 26 000 K, Besetzungzahl des H-Grundzustands = $1{,}75 \cdot 10^{15}$ Teilchen / cm^3; vgl. auch Abb. 5.2).

überwiegt die Verschiebung durch das Magnetfeld und die Verbreiterung durch dessen räumliche Variation (Abschnitt 5.3.2). Nur bei stationären Komponenten kann der Starkeffekt wieder wichtig werden (Jordan, 1988). Eine Diskussion der Probleme im Zusammenhang mit der unzulänglichen Beschreibung der Starkverbreiterung findet sich bei Jordan (1992).

5.3.2 Die Mittelung über die Neutronensternoberfläche

Zusätzlich kommt erschwerend noch hinzu, dass mangels räumlicher Auflösung nur ein über die ganze Sternoberfläche gemitteltes Spektrum beobachtet werden kann. Dies hat zur Folge, dass sich die einzelnen, an unterschiedlichen Orten entstandenen Profile zu einem Gesamtprofil im beobachteten Spektrum aufsummieren (siehe

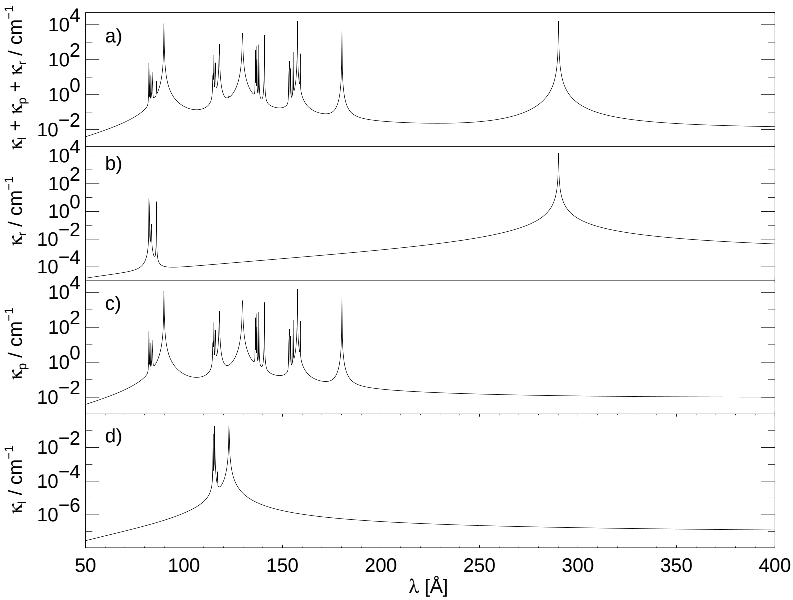


Abbildung 5.2: Verlauf der Linienopazitäten κ_l (d), κ_p (c), κ_r (b) und deren Summe (a) für eine Magnetfeldstärke von 10^{12} Gauß. Diese Opazitäten wurden für ein einzelnes Segment mit T_{eff} =500 000K, log g =14,39, $\alpha = 45°$ und $\Delta B = 2{,}0 \cdot 10^6$ Gauß berechnet. Die angegebenen Feldstärken sind die jeweiligen Polfeldstärken. Dargestellt sind die Opazitäten am innersten Tiefenpunkt (T $\approx$ 26 000 K, Besetzungzahl des H-Grundzustands = $1{,}75 \cdot 10^{15}$ Teilchen / cm^3; vgl. auch Abb. 5.1).

Abschnitt 11.3). Zu diesem Zweck wird die Sternoberfläche in eine endliche Anzahl von Flächenelemente diskretisiert (siehe Abschnitt 11.3.1), deren Einzelspektren gewichtet zu einem Gesamtspektrum aufaddiert werden.

Geht man von einem zentrierten Dipolfeld aus, so variiert die Magnetfeldstärke zwischen Pol und Äquator um einen Faktor zwei. Auch die Temperatur kann, wie in Abschnitt 3.2.5.2 diskutiert, über die Neutronensternoberfläche variieren. Da jedes Flächenelement eine endliche Ausdehnung hat, muss diese Variation auch für jedes einzelne Element mitberücksichtigt werden. Dies geschieht durch eine zusätzliche Modifikation des oben abgeleiteten Linienprofils.

5.3.2.1 Variation des Magnetfelds

Mit der Variation des Magnetfeldes über die Oberfläche geht eine Verschiebung der jeweiligen Lage des Linienkerns einher. Aufsummiert entsteht dadurch der Eindruck einer Verbreiterung des Linienprofils. Dieser Effekt wird durch eine zusätzliche individuelle Gaußverbreiterung für jedes einzelnes Oberflächensegment simuliert, deren Halbwertsbreite $\Delta\nu_B$ sich wie folgt ergibt:

$$\Delta\nu_B = \frac{d\nu}{dB}\Delta B. \tag{5.11}$$

Die Variation des Magnetfeldes über ein Segment ΔB ergibt sich aus der Magnetfeldgeometrie. Die Ableitung $d\nu/dB$ gewinnt man aus den aufbereiteten Atomdaten.

5.3.2.2 Variation der Effektivtemperatur

In dieser Arbeit wird von einer homogenen horizontalen Temperaturverteilung ausgegangen (vgl. Abschnitt 3.2.5.2). Folglich muss keine Variation der Temperatur über ein einzelnes Flächenelement im Modell berücksichtigt werden.

5.3.2.3 Rotationsverbreiterung

Die Rotation eines Neutronensterns führt zu einer Linienverbreiterung aufgrund des Doppler-Effekts:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\mathrm{v}(\vec{r})}{c}. \tag{5.12}$$

λ ist die Wellenlänge der Linie und $\mathrm{v}(\vec{r})$ stellt die projizierte Verteilung der Rotationsgeschwindigkeit über die Sternoberfläche dar. Für einen typischen Neutronenstern ($\mathrm{R} = 10\,\mathrm{km}$), der mit einer Periode von 1 sec rotiert ergibt sich eine maximale Rotationsgeschwindigkeit von $\approx 60\,\mathrm{km/s}$. Aus Gl. 5.12 ergibt sich daraus $\Delta\lambda \approx 0,2\,\mathrm{\AA}$ bei einer Wellenlänge von 1000 Å. Der Effekt der Rotationsverbreiterung ist also recht klein und wird daher momentan im Modell vernachlässigt.

5.3.3 Das resultierende Linienprofil

Das Zusammenwirken unabhängiger Verbreiterungsmechanismen wird mathematisch durch die Faltung beschrieben, welche die Normierung erhält.

Wirken Strahlungsdämpfung und Druckverbreiterung durch Stöße zusammen, so kann dies wiederum durch ein Lorentzprofil mit der Strahlungsdämpfungskonstante $\gamma = \gamma_{rad} + \gamma_{col}$ beschrieben werden. Dopplerverbreiterung und magnetische Verbreiterung ergeben zusammen ein Gaußprofil der Breite $\Delta\nu = \sqrt{\Delta\nu_{\mathrm{D}}{}^2 + \Delta\nu_{\mathrm{B}}{}^2}$.

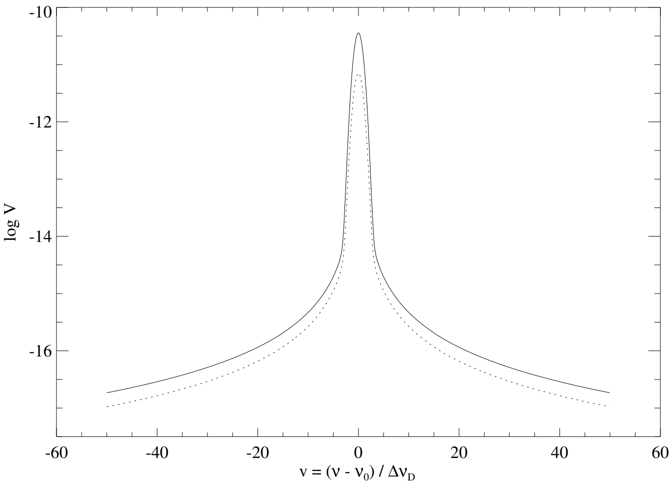


Abbildung 5.3: Typisches Profil einer Voigt-Funktion für $\nu_0 = 10^{15}$ Hz ($\lambda = 3\,000\,$Å; durchgezogen) und $\nu_0 = 5 \cdot 10^{15}$ Hz ($\lambda = 1\,500\,$Å; gestrichelt) ($T = 75\,000$ K, $N_e = 10^{15}\,cm^{-3}$).

Faltet man die resultierenden Lorentz- und Gaußprofile miteinander so ergibt dies:

$$V(a, \mathrm{v}) = \frac{1}{\Delta\nu_\mathrm{D}\sqrt{\pi}} \cdot H(a, \mathrm{v}). \tag{5.13}$$

Dabei ist $H(a, \mathrm{v})$ die auf $\sqrt{\pi}$ normierte Voigt-Funktion:

$$H(a, \mathrm{v}) = \frac{a}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{(\mathrm{v} - x)^2 + a^2}\, dx, \text{mit} \qquad \mathrm{v} = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_\mathrm{D}} \qquad a = \frac{\gamma}{4\pi\Delta\nu_\mathrm{D}}. \tag{5.14}$$

Entsprechend ihrer Eigenschaft als Profilfunktion ist ihre Fläche gleich eins ($\int_{-\infty}^{+\infty} V(a, \mathrm{v})\, d\mathrm{v} = 1$). Ein Problem bei der Berechnung der Voigt-Funktion ist es, dass sie nicht analytisch darstellbar ist. Man ist daher auf nummerische Berechnung oder Approximationsformeln angewiesen (siehe Abb. 5.3 u. Abb. 5.8).

Ein klassischer Ansatz verwendet die Harrissche Reihe (Hellwege, 1965). Dieser Algorithmus kann jedoch nicht empfohlen werden, da er im Bereich $1{,}4 < a < 3{,}0$ und $0{,}0 < v < 3{,}0$ zu ungenauen Ergebnissen führt. Eine Berechnung der Dispersionsfunktion, vgl. Abschnitt 5.7.1, mit Hilfe dieses Ansatzes empfiehlt sich daher auch nicht. Ein im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelter Ansatz basierte auf einer

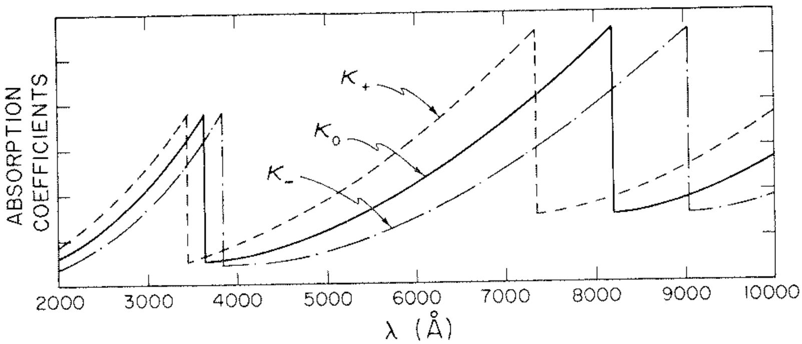


Abbildung 5.4: Aufspaltung einer Absorptionskante in die drei Komponenten für σ^+, σ^- und π Licht (Quelle: Lamb & Sutherland, 1974).

Splineinterpolation im von a und v aufgespannten Parameterraum der Voigt-Funktion. Dieser Ansatz erbrachte jedoch keine Zeitersparnis. Zuverlässige und schnelle Ergebnisse liefert eine Implementierung mittels komplexer Zahlen unter Verwendung der von Unsöld (1968) und Hauschildt et al. (1995) vorgeschlagenen Beschleunigung bei der Berechnung der Linienflügel. Als Test für die Korrektheit der Algorithmen und ihrer Implementierung wurde das die Voigt-Funktion definierende Integral Gl. 5.13 direkt nummerisch mit Hilfe der Romberg-Methode in der Ordnung $K = 5$ berechnet (Press et al., 1995).

5.3.4 Stationäre Komponenten

Die einzelnen Verbreiterungsmechanismen führen zu einer starken „Verschmierung“ der Linien. Daher sind die sogenannten stationären Komponenten, die bei bestimmten Feldstärken Maxima oder Minima durchlaufen, der wichtigste Ansatzpunkt für die Identifikation einer einzelnen Komponente.

5.4 Die Kontinuumsopazität

Während in den letzten Jahren einiger Fortschritt auf dem Gebiet der Berechnung von Linienstärken erzielt worden ist (siehe Kapitel 4), gibt es auf dem Gebiet der Wirkungsquerschnitte für Kontinuumsübergänge noch keine Daten. Man ist daher gezwungen mit einfachen Näherungen auszukommen.

Das Modell dieser Arbeit geht von der Arbeit Kramers (1923) für den magnetfeldfreien Fall (siehe Unsöld, 1968) aus:

$$\kappa_{zero}(\nu) = \frac{64\,\pi^4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{m_e\,e^{10}}{c\,h^6} \cdot \frac{1}{n^5}\,\frac{\nu_{ion}^3}{\nu^3} \cdot \tilde{n}^N \tag{5.15}$$

$$\nu_{ion} = c \cdot \frac{R_\infty}{n^2}. \tag{5.16}$$

Dabei ist ν_{ion} die Ionisationsfrequenz der betreffenden Kante. Da nur die Kanten der Serien ($n = 1\ldots5$) betrachtet werden, wird die Aufspaltung nach m_l nicht berücksichtigt. Entsprechend geht die Gesamtbesetzungszahl $\tilde{n}^N$ in obige Formel ein.

Im Magnetfeld spalten die Absorptionskanten in die drei Komponenten für σ^+, σ^- und π Licht auf. In Abschnitt 4.3.5 ergab sich die Aufspaltung zu $\pm\frac{1}{2}\,\hbar\,\omega_{\mathrm{cyc}} = \pm\,\hbar\,\omega_{Larmor}$[1]. Lamb & Sutherland (1974) schlugen vor, die Nullfeldwerte mit verschobenen Frequenzen als Wert für die aufgespalteten Absorptionskanten zu verwenden (siehe auch Abb. 5.4):

$$\kappa_{\Delta m}(\nu) = \frac{\nu}{\nu - \Delta m\,\nu_{Larmor}} \cdot \kappa_{zero}(\nu - \Delta m\,\nu_{Larmor}). \tag{5.17}$$

Da in die Larmor-Frequenz das lokale Magnetfeld eingeht, muss seine Variation ΔB innerhalb eines Oberflächenelementes mit berücksichtigt werden. Die Ionisationsfrequenzen ν_{ion} streuen gemäß:

$$\Delta\nu_{ion} = \frac{d\nu_{ion}}{dB}\Delta B. \tag{5.18}$$

Nach Jordan (1988) kann die aus diesem Ansatz resultierende Profilfunktion mit Hilfe der gaußschen Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(x)$ wie folgt dargestellt werden:

$$\Phi(\nu)_{\Delta m} = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\nu - \Delta m \cdot \nu_{ion}}{\sqrt{2\pi}\,\Delta\nu_{ion}}\right)\right]. \tag{5.19}$$

Eine ausführlichere Diskussion und verbesserte Ansätze finden sich in Jordan (1988).

5.5 Die Zyklotronabsorption

Neben den eigentlichen Absorptionsprozessen spielt in den größtenteils ionisierten Atmosphären die Streuung an freien Elektronen eine erhebliche Rolle. Im feldfreien Fall handelt es sich um die Thomsonstreuung. In starken Magnetfeldern tritt für die

[1] Es ist hierbei auf die verwendete Normierung zu achten. Im gaußschen System ergibt sich die Larmor-Frequenz zu $\omega_{Larmor} = eB/2m_ec$ bzw. $\nu_{Larmor} = eB/4\pi\,m_ec$.

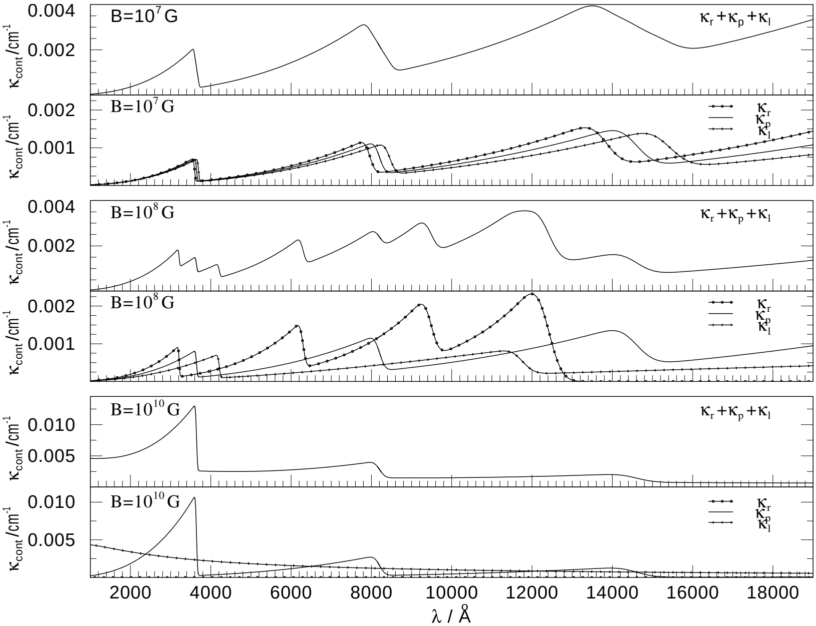


Abbildung 5.5: Verlauf der Kontinuumsopazität für drei verschiedene Magnetfeldstärken. Diese Opazitäten wurden für ein einzelnes Segment mit $T_{\rm eff}$ =16 000K, log g =8,0, α=45° und $\Delta B = 2,0 \cdot 10^6$ Gauß berechnet. Die angegebenen Feldstärken sind die jeweiligen Polfeldstärken. Mit zunehmender Feldstärke verschieben sich die σ^+ und die σ^- immer mehr ins Blaue bzw. ins Rote. Dargestellt sind die Opazitäten am innersten Tiefenpunkt (T $\approx$ 26 000 K, Besetzungzahl des H-Grundzustands = $1,75 \cdot 10^{15}$ Teilchen / cm^3).

Streuung in der Ebene senkrecht zur Magnetfeldachse die Zyklotronabsorption an deren Stelle. Die Streuung freier Elektronen in Richtung der Magnetfeldachse bleibt in dieser Arbeit unberücksichtigt.

Klassisch betrachtet handelt es sich bei der Zyklotronabsorption um eine Beschleunigung der Elektronen auf ihrer Kreisbahn senkrecht zum Magnetfeld. Daher hat die Absorption eine scharfe Resonanz bei der Zyklotronkreisfrequenz $\omega_c = eB/(m_e c)$ (in gaußschen Einheiten).

Quantenmechanisch kann dies als ein Übergang zwischen zwei benachbarten Landauniveaus beschrieben werden:

$$E_n = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p_\parallel}{m_e c}\right)^2 + 2n\frac{B}{B_{\rm crit}}}; \tag{5.20}$$

dabei ist $p_{\|}$ der Teilchenimpuls parallel zum Feld, n die Hauptquantenzahl und

$$B_{\text{crit}} \equiv \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} \approx 4,4 \cdot 10^{13}\text{Gauß} \tag{5.21}$$

die kritische Magnetfeldstärke, bei der die Zyklotronenergie eines Elektrons im Feld gerade $m_e c^2$ entspricht. Eine Quantisierung findet also nur senkrecht zum Magnetfeld statt. Die zugehörige Auswahlregel erlaubt dabei nur Übergänge mit $\Delta m = +1$, da es sich, wie beschrieben, um eine Beschleunigung handelt. Entsprechend wird die Zyklotronabsorption nur der Gesamtopazität für rechtszirkulares Licht hinzuaddiert. Lamb & Sutherland (1974) berechneten die frequenzintegrierte Zyklotronopazität zu:

$$\kappa_{r\text{cyc}}(\omega) \approx N_e \cdot \frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{2\pi c}{\omega_c}\right)^2 \left(\frac{B}{B_{\text{crit}}}\right) \frac{\omega_c}{1-e^{-\hbar\omega_c/kT}} \cdot \Phi(\omega-\omega_c). \tag{5.22}$$

Das Absorptionsprofil $\Phi(\omega-\omega_c)$ wird auch hier durch ein Voigtprofil beschrieben. Es setzt sich im Einzelnen zusammen aus der Dopplerverbreiterung: $\Delta\omega_D = \omega_c \cdot \sqrt{2kT/m_e c^2} \cdot |\cos\psi|$; der magnetischen Verbreiterung auf Grund der Variation über des Magnetfeldes über ein Sternsegment: $\Delta\omega_c = e/mc \cdot \Delta B$; sowie die durch Stöße mit Elektronen verursachte Verbreiterung: $\gamma = \nu_e/\sqrt{\ln 2}$ (Bekefi, 1966) (ν_e siehe Gl. 5.34). In praxi hat sich gezeigt, dass durch dieses Profil der Einfluss der Zyklotronlinie weit vom Linienzentrum entfernt stark überschätzt wird. Es wird daher nach zehn Dopplerbreiten abgeschnitten (Jordan, priv. Komm.).

5.6 Die Stokesopazitäten

Um die Strahlungstransportgleichung übersichtlicher zu formulieren, wurden von Unno (1956) die den Stokesparametern zugeordneten Stokesopazitäten eingeführt. Neben den bekannten Opazitäten geht hier noch der Winkel ψ zwischen Magnetfeld- und Beobachterrichtung mit ein (siehe Abschnitt 11.3.1).

$$\kappa_I = \frac{1}{2}\kappa_p \sin^2\psi + \frac{1}{4}(\kappa_r+\kappa_l)(1+\cos^2\psi) \tag{5.23}$$

$$\kappa_Q = \frac{1}{2}\kappa_p \sin^2\psi - \frac{1}{4}(\kappa_r+\kappa_l)\sin^2\psi \tag{5.24}$$

$$\kappa_V = \frac{1}{2}(\kappa_l-\kappa_r)\cos\psi. \tag{5.25}$$

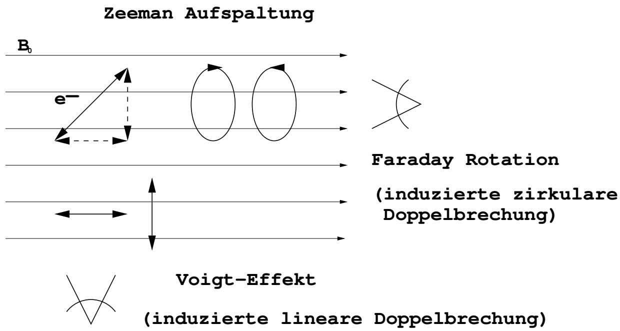


Abbildung 5.6: Klassisches Bild des Zeemaneffekts, sowie von Faraday-Rotation und Voigt-Effekt.

5.7 *Die magneto-optischen Parameter*

In Anwesenheit eines Magnetfeldes ändern sich neben den Absorptionseigenschaften der Materie als Funktion der Frequenz, dargestellt durch $\kappa_I, \kappa_Q, \kappa_V$, auch die Ausbreitungscharakteristika der Strahlung. In einem magnetischen Feld können sich die Brechungsindizes für die unterschiedlich polarisierten Zeeman-aufgesplitteten Linien unterscheiden $(n_+, n_-, n_{||}, n_\perp)$. Damit folgt eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schwingungsmoden und somit eine Änderung der Phasenbeziehung zwischen den einzelnen Komponenten. Dies wird durch die magneto-optischen Parameter ρ_R und ρ_W beschrieben. Die Magnetfeldrichtung zeichnet dabei eine bestimmte Richtung aus, ganz analog zur optischen Achse eines Kristalls.

Wichtig bei der Betrachtung der magneto-optischen Parameter sind folgende zwei Grenzfälle der Magnetfeldrichtung relativ zum Beobachter (siehe auch Abb. 5.6):

- Die Faraday-Rotation [induzierte zirkulare Doppelbrechung]: ρ_R
  - Das Magnetfeld liegt in Ausbreitungsrichtung.
  - Das Licht wird in einen rechts- und einen linkszirkular polarisierten Anteil zerlegt.
  - Die Brechungsindizes für beide Anteile (n_l, n_r), respektive ihre Phasengeschwindigkeiten $(c/n_l, c/n_r)$ unterscheiden sich.
  - Der Winkel $d\xi$, um den sich die große Halbachse der Polarisationsellipse pro Längenelement dl in Ausbreitungsrichtung dreht, entspricht der hal-

ben Phasendifferenz (ν_0, ω_0 – Frequenz außerhalb des Mediums):

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\frac{\omega_l - \omega_r}{\nu_0} = \frac{\omega_0}{2c}(n_l - n_r)\frac{c}{\nu_0} = \frac{\omega_0}{2c}(n_l - n_r)l, \\
\frac{d\xi}{dl} &= \frac{\omega_0}{2c}(n_l - n_r).
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

- Der Voigt-Effekt [induzierte lineare Doppelbrechung]: ρ_W
  - Das Magnetfeld liegt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.
  - Das Licht wird in einen zum Magnetfeld parallelen und dazu senkrechten linear polarisierten Anteil zerlegt.
  - Die Brechungsindizes für beide Anteile ($n_\parallel, n_\perp$), respektive ihre Phasengeschwindigkeiten ($c/n_\parallel, c/n_\perp$) unterscheiden sich.
  - Die Rotation der Polarisationsellipse ergibt sich analog zu:

$$
\frac{d\zeta}{dl} = \frac{\omega_0}{2c}(n_\parallel - n_\perp). \tag{5.27}
$$

Diese zwei Grenzfälle können nun problemlos auf beliebige Winkel ψ zwischen Magnetfeld und Ausbreitungsrichtung verallgemeinert werden (Wittmann 1974; Martin & Wickramasinghe 1981) (siehe Abb. 5.7):

$$
\rho_R \equiv -2\,\cos\psi\,\frac{d\xi}{dl} = -\frac{\omega_0}{c}(n_l - n_r)\cos\psi, \tag{5.28}
$$

$$
\rho_W \equiv -\sin^2\psi\,\frac{d\zeta}{dl} = -\frac{\omega_0}{2c}(n_\parallel - n_\perp)\sin^2\psi. \tag{5.29}
$$

5.7.1 *Die magneto-optischen Effekte der Absorptionslinien*

Der Brechungsindex einer einzelnen Linie ($\kappa_{li}, \kappa_{pi}, \kappa_{ri}$) ist in seinem Verlauf gekennzeichnet durch die Dispersionsfunktion $F(a, \mathrm{v})$. Ausgehend von dem Brechungsindex einer einzelnen unverschobenen Komponente (Born, 1972) hat Wittmann (1974) die Beiträge der einzelnen Komponenten aufaddiert. Martin & Wickramasinghe (1981) korrigierten dann noch das Vorzeichen:

$$
\rho_r = -\left(\sum_i \kappa_{ri}F_{ri} - \sum_j \kappa_{lj}F_{lj}\right)\cos\psi \tag{5.30}
$$

$$
\rho_w = -\left(\sum_k \kappa_{pk}F_{pk} - \frac{1}{2}\left(\sum_j \kappa_{lj}F_{lj} + \sum_i \kappa_{li}F_{li}\right)\right)\sin^2\psi. \tag{5.31}
$$

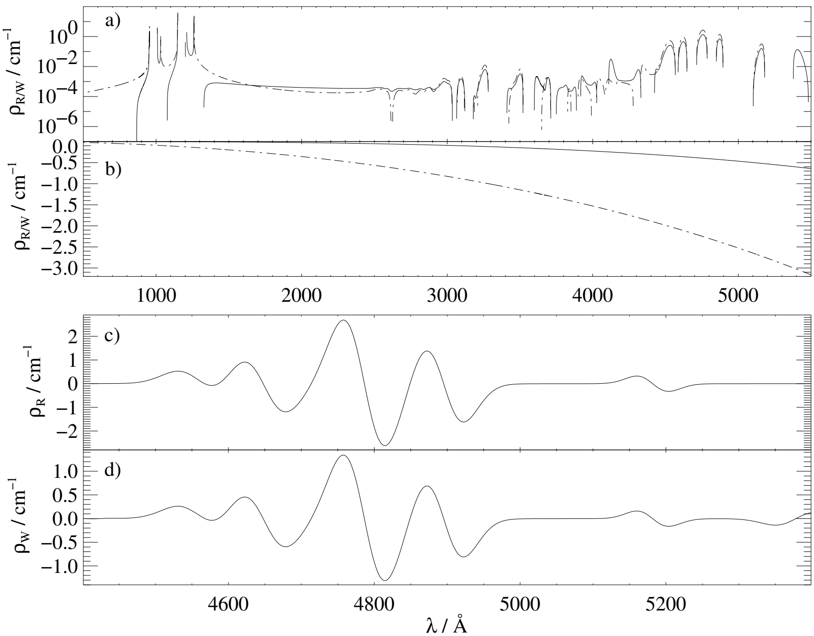


Abbildung 5.7: Verlauf der magneto-optischen Parameter ρ_R und ρ_W für eine Magnetfeldstärke von 10^8 Gauß am innersten Tiefenpunkt (T $\approx$ 26 000 K, Besetzungzahl des H-Grundzustands = $1,75 \cdot 10^{15}$ Teilchen cm^{-3}). Diese Parameter wurden für ein einzelnes Segment mit T_{eff} =16 000 K, log g =8,0, α=45° und $\Delta B = 2,0 \cdot 10^6$ Gauß berechnet. Die angegebenen Feldstärken sind die jeweiligen Polfeldstärken; a) logarithmische y-Achse; der Beitrag der Linien zu ρ_R (strich-punktierte Linie) und ρ_W (durchgezogene Linie) ist dargestellt b) Beitrag des Kontinuums c) & d) vergrößerter Ausschnitt des Linienbeitrages von ρ_R bzw. ρ_W.

Die Dispersionsfunktion für jede einzelne Linie ergibt sich aus der Linienprofilfunktion $H(a_{xi}, \mathrm{v}_{xi})$ (Voigt-Funktion, x = l/p/r):

$$F_{xi} = F(a_{xi}, \mathrm{v}_{xi}) = \frac{1}{a_{xi}} \left(\frac{1}{2} H(a_{xi}, \mathrm{v}_{xi}) + \frac{1}{4} \frac{\partial H(a_{xi}, \mathrm{v}_{xi})}{\partial v} \right). \tag{5.32}$$

Da F antisymmetrisch in v ist (siehe Abb. 5.8), führen die magneto-optischen Parameter der Linien zu Asymmetrien der Linien (Martin & Wickramasinghe, 1981). In der algorithmischen Umsetzung wird die Ableitung $dH(a, \mathrm{v})/d\mathrm{v}$ an der Stelle v_j dadurch gewonnen, dass ein Polynom zweiter Ordnung durch $H(a, \mathrm{v}_{j-1}), H(a, \mathrm{v}_j), H(a, \mathrm{v}_{j+1})$

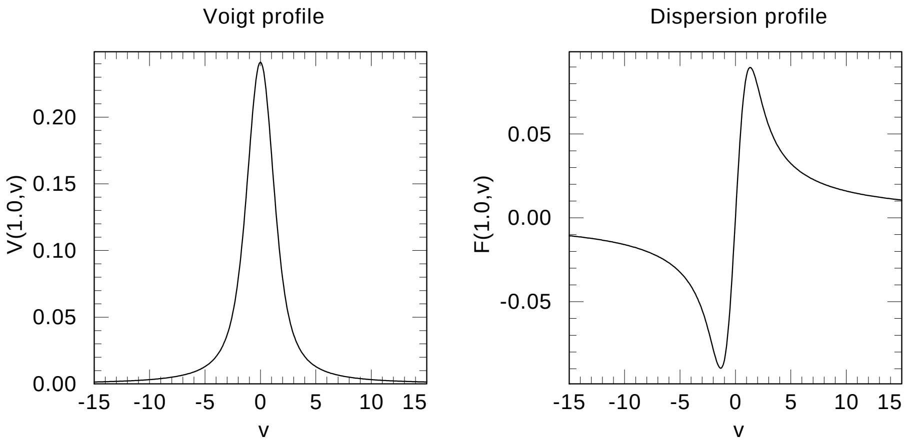


Abbildung 5.8: Verlauf der Voigt- und der Dispersionsfunktion für $a = 1,0$.

gefittet wird und dieses dann abgeleitet wird. Dieses Vorgehen ist wesentlich schneller und zuverlässiger als die direkte Verwendung einer analytisch gewonnenen ersten Ableitung der Voigt-Funktion.

5.7.2 Die magneto-optischen Effekte des Kontinuums

Ausgangspunkt für die Herleitung des magneto-optischen Effekts des Kontinuums ist die Bewegungsgleichung eines Elektrons, das sich in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ befindet und von einer elektromagnetischen Welle $\vec{E}_{\pm}$ durchquert wird (Jordan et al., 1991):

$$m_e\ddot{\vec{r}} + m_e\nu_e\dot{\vec{r}} + m\,\omega_p\vec{r} = -e\left(\vec{E}_{\pm} - \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \times \vec{B}\right). \tag{5.33}$$

$\vec{r}$ bezeichnet den Ortsvektor des Elektrons, ν_e die Elektronenstoßfrequenz und T die Temperatur. ω_p ist die Plasmafrequenz $\sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$ bei der Elektronendichte n_e. Das $\pm$ bezieht sich auf die rechts- und linkszirkular polarisierten Anteile. Die Formel für die Elektronenstoßfrequenz wurde von Jordan (1988) aus den Formeln von Spitzer (1956) hergeleitet:

$$\nu_e = \frac{\pi^{3/2}}{4}\frac{e^4 n_e}{\sqrt{2m_e k^3 T^3}} \ln\left(\frac{3}{2e^3}\sqrt{\frac{k^3T^3}{\pi N_e}}\right). \tag{5.34}$$

Als Lösung dieser Gleichung erhält man eine komplexe Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ bei der die Zyklotronfrequenz ω_c eine wichtige Rolle spielt (O'Connell & Wallace 1981; Palik & Furdyna 1970):

$$\varepsilon'_{\substack{l\\r}} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega \pm \omega_c)}{\omega[(\omega \pm \omega_c)^2 + \nu_e^2]} \qquad \varepsilon'_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \nu_e^2} \tag{5.35}$$

$$\varepsilon''_{\substack{l\\r}} = \frac{\omega_p^2 \nu_e}{\omega[(\omega \pm \omega_c)^2 + \nu_e^2]} \qquad \varepsilon''_{\parallel} = \frac{\omega_p^2 \nu_e}{\omega(\omega^2 - \nu_e^2)} \tag{5.36}$$

$$\varepsilon'_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2[(\omega_p^2 - \omega^2)(\omega_p^2 - \omega^2 + \omega_c^2) + \omega^2\nu_e^2]}{\omega^2(\omega_p^2 - \omega^2 + \omega_c^2 + \nu_e^2)^2 + \nu_e^2(\omega_p^2 - 2\omega^2)^2} \tag{5.37}$$

$$\varepsilon''_{\perp} = \frac{\omega_p^2 \nu_e[\omega^2(\omega_c^2 + \nu_e^2) + (\omega_p^2 - \omega^2)^2]}{\omega[\omega^2(\omega_p^2 - \omega^2 + \omega_c^2 + \nu_e^2)^2 + \nu_e^2(\omega_p^2 - 2\omega^2)^2]}. \tag{5.38}$$

Über die Beziehung:

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} + \varepsilon'\right)}, \tag{5.39}$$

erhält man den Brechungsindex n und somit ρ_R und ρ_W. In der Nähe der Zyklotronfrequenz kommt es zu scharfen Resonanzen auf Grund der Terme:

$$f(\omega) = \frac{1}{(\omega - \omega_c)^2 + \nu_e^2}, \tag{5.40}$$

$$g(\omega) = \frac{\omega - \omega_c}{(\omega - \omega_c)^2 + \nu_e^2}. \tag{5.41}$$

Berücksichtigt man jedoch, dass mit der Variation des Magnetfeldes über ein Segment der Sternoberfläche auch die Zyklotronfrequenz sich ändert ($\Delta\omega_c$), so können f und g in der Umgebung $(\omega_c \pm 5 \cdot \Delta\omega_c)$ durch ihren Mittelwert ersetzt werden (Jordan et al., 1991):

$$f(\omega) = \frac{\pi}{10\Delta\omega_c \nu_e}, \tag{5.42}$$

$$g(\omega) = \frac{\omega - \omega_c}{10\Delta\omega_c|\omega - \omega_c|} \ln \frac{25\Delta\omega_c^2 + \nu_e^2}{\nu_e^2}. \tag{5.43}$$

Teil III

Polarisierter Strahlungstransport

KAPITEL 6

Physik der Sternatmosphären

Jedes physikalische Modell von Sternatmosphären muss beschreiben, auf welche Art ein heißes Plasma und ein Strahlungsfeld miteinander wechselwirken. Dieses Kapitel widmet sich daher zunächst den Zustandsgleichungen der ionisierten Materie sowie der Beschreibung des Strahlungsfeldes im magnetfeldfreien Fall. Anschließend wird gezeigt, wie diese Grundgleichungen in der Physik der Sternatmosphären miteinander verbunden und in Form von LTE- und NLTE-Atmosphären umgesetzt werden.

Dies kann hier natürlich nur sehr knapp geschehen. Die grundlegende Physik soll angesprochen werden, ohne jedoch ins Detail zu gehen oder gar ausführlich herzuleiten. Die Literatur zu den hier angesprochenen Themen ist vielfältig und kann hier nur beispielhaft genannt werden: Mechanik, Goldstein (1989); Elektrodynamik, Jackson (1999); Thermodynamik, Reif (1987); Physik der Sternatmosphäre, Gray (1976), Mihalas (1978), Rutten (1997), Rybicki & Lightman (1979), Unsöld (1968); nummerische Umsetzung: Werner (1987a), Dreizler (1992), Werner et al. (1998), Werner & Dreizler (1999).

6.1 Die Strukturgleichungen für klassische Sternatmosphären

6.1.1 Die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik

Gegeben sei ein großes Volumen V, in dem sich sehr viele einzelne Atome bewegen. Die Verteilung der einzelnen Atome über alle Zustände im Phasenraum kann durch die atomare Verteilungsfunktion $f(\vec{r},\vec{v},t)$ beschrieben werden ($\vec{r},\vec{v} \equiv$ Orts- bzw.
Geschwindigkeitsvektor; $t \equiv$ Zeit). Die mittlere Anzahl je Ortsvolumenelement wird mit $n(\vec{r},t) = \int dv^3 f(\vec{r},\vec{v},t)$ bezeichnet. Eine typische Verteilungsfunktion ist die maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung.

Man denke sich nun irgendeine Funktion $\chi(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t)$, die z.B. eine Eigenschaft eines Atoms beschreibt. Der Mittelwert von χ ist definiert durch:

$$\langle\chi(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t)\rangle \equiv \frac{1}{n(\vec{r},t)}\int dv^3\, f(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t)\cdot\chi(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t). \tag{6.1}$$

Ziel ist es nun eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie sich z.B. die Geschwindigkeitsverteilung der Atome in einem Nichtgleichgewichtszustand gegenüber einem Gleichgewichtszustand verändert. Folgt man der Bahn eines Atoms im Phasenraum, so ergibt sich für die Verteilungsfunktion:

$$f(\vec{r}+\dot{\vec{r}}dt,\vec{\mathrm{v}}+\dot{\vec{\mathrm{v}}}dt,t+dt)\,dr^3dv^3 = f(\vec{r},\vec{\mathrm{v}},t)+\frac{df}{dt_{\mathrm{coll}}}dr^3dv^3dt, \tag{6.2}$$

wobei $df/dt_{\mathrm{coll}}\,dr^3dv^3$ die Änderung der mittleren Anzahl von Atomen in dr^3dv^3 pro Zeiteinheit, die durch Stöße bewirkt wird, bezeichnet. Da sich das Phasenraumvolumen in erster Ordnung nicht ändert, kann dies mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $(\vec{r},\vec{\mathrm{v}})$ umgeschrieben werden:

$$\frac{df}{dt_{\mathrm{coll}}} = \frac{\partial f}{\partial t}+(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)f+(\vec{F}\nabla_p)f. \tag{6.3}$$

$\vec{F}$ bedeutet hierbei die auf das Atom wirkende Kraft. Diese Gleichung wird als Boltzmann-Gleichung bezeichnet. Da das eigentliche Interesse der Eigenschaft $\langle\chi\rangle$ gilt, multipliziert man beide Seiten der Boltzmanngleichung mit χ und integriert über alle Geschwindigkeiten. Anschließende Umformung ergibt die Bilanzgleichung:

$$\mathscr{C}(\chi)\equiv\int d\mathrm{v}^3\frac{df}{dt_{\mathrm{coll}}}\chi = \frac{\partial}{\partial t}(n\langle\chi\rangle)+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(n\langle \mathrm{v}_\alpha\chi\rangle)-n\langle\frac{d\chi}{dt}\rangle. \tag{6.4}$$

Wobei v_α und $\partial/\partial x_\alpha$ ($\alpha = 1,2,3$) die Geschwindigkeit in den, bzw. die partielle Ableitung nach den drei Raumrichtungen bedeutet. Der Beitrag der Stöße zur Bilanzgleichung lässt sich mit Hilfe des Wirkungsquerschnitts σ direkt angeben:

$$\mathscr{C}(\chi) = \frac{1}{2} = \iiint dv^3dv_1^3\,d\Omega\, f\, f_1\, V\,\sigma\,\Delta\chi. \tag{6.5}$$

Die Bilanzgleichung nimmt eine sehr einfache Form an, wenn die Größe χ beim Stoß zwischen Molekülen erhalten bleibt, so dass $\Delta\chi = 0$. Dann wird auch $\mathscr{C} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\chi\rangle+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\langle v_\alpha\chi\rangle = n\langle\frac{d\chi}{dt}\rangle. \tag{6.6}$$

Wichtige Erhaltungsgrößen sind die Gesamtmasse ($\chi = m$), der Gesamtimpuls ($\chi = mv_\gamma$; $\gamma = 1,2,3$) sowie die Gesamtenergie ($\chi = \frac{1}{2}mv^2$). Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen, denen eine Gasströmung gehorchen muss:

1. Erhaltung der Masse: *Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0, \tag{6.7}$$

$$\rho(\vec{r},t) \equiv m\, n(\vec{r},t), \qquad \text{Massendichte}$$

$$\vec{u} \equiv \langle \vec{\mathrm{v}} \rangle. \qquad \text{kollektive Strömungsgeschwindigkeit}$$

2. *Impulserhaltungsgleichung der Hydrodynamik:*

$$\rho \frac{du_\gamma}{dt} = -\frac{\partial P_{\alpha\gamma}}{\partial x_\alpha} + \rho \vec{F}'_\gamma, \tag{6.8}$$

$$P_{\alpha\gamma} \equiv \rho \langle {}_\alpha u_\gamma \rangle, \qquad \text{Spannungstensor}$$

$$\vec{F}' \equiv \frac{\vec{F}}{m}. \qquad \text{Kraft pro Masseneinheit}$$

Physikalisch bedeutet das schlicht, dass die zeitliche Änderung des Impulses, z.B. eines Flüssigkeitselements, durch die Spannungskräfte (einschließlich des normalen Drucks) und die äußeren Kräfte hervorgerufen wird.

3. *Energieerhaltungsgleichung der Hydrodynamik:*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon) + \nabla[(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho\varepsilon + P)\,\vec{u}] = \vec{F}'\vec{u} - \nabla(\vec{F}_{rad} + \vec{F}_{con}). \tag{6.9}$$

Mit ε wird die innere Energie und mit F_{rad}, F_{con} der radiative bzw. konvektive Fluss dargestellt.

6.1.2 Die Bewegungsgleichungen für klassische Sternatmosphären

Die Gleichungen der Hydrodynamik lassen sich in unserem Fall weiter vereinfachen. Im klassischen Fall der Physik der Sternatmosphären geht man von einer stationären ($\partial/\partial t = 0$), statischen ($\vec{u} = 0$), planaren (eindimensionalen) und nicht-konvektiven Atmosphäre aus.

1. *Statistisches Gleichgewicht:*

$$\frac{dn_i}{dt} = 0. \tag{6.10}$$

n_i sind die Besetzungsdichten der individuellen atomaren Energieniveaus (nicht zu verwechseln mit der Hauptquantenzahl n).

2. *Hydrostatisches Gleichgewicht:* In die Gleichung für das Hydrostatische Gleichgewicht geht der Gesamtdruck ein. Er setzt sich zusammen aus Gas-, Strahlungsdruck sowie dem durch Mikroturbulenz entstehenden Druck (charakterisiert durch die Geschwindigkeit v; dieser Beitrag wird hier jedoch vernachlässigt werden):

$$P = P_{gas} + P_{rad} + P_{turb} = NkT + \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu + \frac{1}{2}\rho v_{turb}^2 \tag{6.11}$$

$$\nabla P = \rho \vec{F}' \quad \Longrightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g, \tag{6.12}$$

$$dm = -\rho dz, \tag{6.13}$$

$$\frac{dP_{gas}}{dm} = g - \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu d\nu, \tag{6.14}$$

wobei H_ν den winkelgemittelten Energiefluß, den sog. Eddingtonfluss bezeichnet (siehe Gl. 6.24).

3. *Radiatives Gleichgewicht:*

$$\nabla \vec{F}_{rad} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_{rad} = const \equiv \sigma\, T_{\text{eff}}{}^4 \tag{6.15}$$

4. Hinzu kommt die Randbedingung für das Plasma: die lokale *elektrische Neutralität*:

$$\sum_j n_j Z_j - n_e = 0, \tag{6.16}$$

6.2 Die Strahlungstransportgleichung

6.2.1 Die Strahlungsintensität und verwandte Größen

6.2.1.1 Die Strahlungsintensität:

Als Strahlungsintensität I_ν wird diejenige Energiemenge bezeichnet, welche pro Raumwinkel $d\omega$, Frequenzbereich $d\nu$ und Zeiteinheit dt durch eine Fläche dS im Winkel θ relativ zur Flächennormalen $\vec{n}$ hindurchströmt.

$$dE = I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\, dS \cos\theta\, d\omega\, d\nu\, dt. \tag{6.17}$$

6.2.1.2 Die Photonen-Verteilungsfunktion:

Dies entspricht der Zahl der Photonen $f(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\, d\omega\, d\nu$ mit der Energie $h\nu$, die mit der Geschwindigkeit c dieses Flächenelement durchfliegen:

$$dE = h\nu \cdot f \cdot (c\,dt)(\vec{n} \cdot d\vec{S})(d\omega\, d\nu), \tag{6.18}$$

$$\Longrightarrow \qquad I_\nu = (c\,h\nu)\, f. \tag{6.19}$$

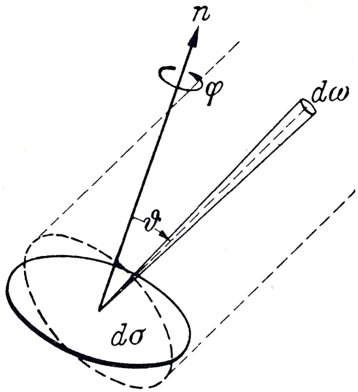


Abbildung 6.1: Die Strahlungsintensität I_ν. Der Winkel ϑ wird im Text mit θ bezeichnet (Quelle: Unsöld, 1968).

Die Strahlungsintensität I_ν stellt also eine spezielle Verteilungsfunktion dar, auf die die Ergebnisse von Abschnitt 6.1 angewandt werden können.

6.2.1.3 Momente der Verteilungsfunktion:

$$E_\nu = \oint (h\nu) \cdot f_\nu d\omega = \frac{1}{c} \oint I_\nu \, d\omega, \tag{6.20}$$

$$\vec{F}_\nu = \oint (h\nu) \cdot (c\vec{n}) \cdot f_\nu d\omega = \oint \vec{n} I_\nu \, d\omega, \tag{6.21}$$

$$\vec{G} = \oint \left(\frac{h\nu}{c}\right) \cdot \vec{n} \cdot f d\omega = \frac{1}{c^2} \vec{F}. \tag{6.22}$$

E_ν gibt die Energiedichte des Strahlungsfeldes, $\vec{F}_\nu$ den Energiefluss und $\vec{G}$ gibt die Photonen-Impulsdichte an. In der Astrophysik verwendet man jedoch meist die Größen mittlere Intensität J_ν und Eddingtonfluss $\vec{H}_\nu$:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} (cE_\nu), \tag{6.23}$$

$$\vec{H}_\nu = \frac{1}{4\pi} (\vec{F}_\nu). \tag{6.24}$$

6.2.2 Die Absorptions- und Emissionskoeffizienten

Die Strahlungstransportgleichung beschreibt die Änderung des Strahlungsfeldes auf Grund seiner Wechselwirkung mit der Materie. Die phänomenologische Beschreibung dieser Wechselwirkung erfolgt mit Hilfe der sogenannten Absorptions- und Emissionskoeffizienten (vergleiche hierzu Kapitel 5).

6.2.2.1 Der Absorptionskoeffizient:

Er beschreibt den Intensitätsverlust durch Absorption, welchen ein enges Strahlenbündel der Intensität I_ν erfährt, wenn es durch Materie der geometrischen Dicke ds hindurch geht:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\chi_\nu I_\nu \tag{6.25}$$

$$\chi_\nu \equiv \kappa_\nu + \sigma_\nu. \tag{6.26}$$

Der Kehrwert der Opazität χ kann als mittlere freie Weglänge eines Photons aufgefasst werden; der Absorptionskoeffizient setzt sich aus einem wahren Absorptionsanteil (κ – das Photon wird vernichtet / thermalisiert) und einem Streuterm (σ – das Photon wird aus dem Sehstrahl herausgestreut) zusammen.

6.2.2.2 Der Emissionskoeffizient:

Als Pendant zum Absorptionskoeffizient gibt er an, wieviel Energie ein Strahlenbündel der Intensität I_ν hinzugewinnt, wenn es durch Materie der geometrischen Dicke ds hindurch geht:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \eta_\nu \tag{6.27}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht, d.h. wenn die spezifische Intensität durch die Planckfunktion gegeben ist ($I_\nu = B_\nu$), gilt das kirchhoffsche Gesetz:

$$B_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}. \tag{6.28}$$

6.2.3 Phänomenologische Ableitung der Strahlungstransportgleichung

Im Folgenden wird die Energiebilanz entlang eines Sehstrahls in einer statischen Atmosphäre untersucht:

$$\mu \frac{dI(\nu,\mu,z)}{dz} = \eta(\nu,\mu,z) - \chi(\nu,\mu,z) I(\nu,\mu,z) \tag{6.29}$$

$$\mu \equiv \cos\theta = \vec{n} \cdot \vec{e}_z = \frac{dz}{ds}. \tag{6.30}$$

Die geometrischen Tiefenskalen s und z sind entlang des Strahls bzw. senkrecht zur Sternoberfläche definiert. Beim Wechsel von s nach z tritt daher noch der Cosinus des Winkels θ zwischen Oberflächennormalen und Ausbreitungsrichtung in der Strahlungstransportgleichung auf. Mit Hilfe der Größen optische Tiefe und Quellfunktion lässt sich die Strahlungstransportgleichung in ihrer üblichen Form darstellen.

6.2.3.1 Die optische Tiefe:

Im Fall reiner Absorption ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon die Distanz τ zurücklegt $p(\tau_\nu) = exp(-\tau_\nu)$. Die Größe τ nennt man optische Tiefe und ist definiert als

$$d\tau_\nu \equiv -\chi_\nu dz. \tag{6.31}$$

6.2.3.2 Die Quellfunktion:

S ist proportional zu der Anzahl Photonen, die pro Tiefenintervall emittiert werden.

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \tag{6.32}$$

$$N_{em} = S(\tau)\, d\tau\, \frac{4\pi}{h\nu}\, d\nu\, dt\, dS. \tag{6.33}$$

6.2.3.3 Die endgültige Form der Strahlungstransportgleichung:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu. \tag{6.34}$$

6.3 Magnetfeldfreie Sternatmosphären

Die bisherigen Ausführungen haben sich sehr ausführlich mit der Berechnung der Opazitäten beschäftigt. Es bleibt jetzt noch zu klären, auf welche Weise die Sternatmosphäre als solche, d.h. die Druck- und Temperaturschichtung, im Rahmen dieser Arbeit berechnet wird.

6.3.1 LTE-Atmosphären

Einfache Modelle basieren auf der Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (LTE). Hier werden neben der Geschwindigkeitsverteilung des Elektronen- und Ionengases auch Ionisationsbruchteile und Besetzungszahlen der einzelnen atomaren Niveaus durch die lokale Temperatur gekennzeichnet. Charakterisierende Gleichung ist die Saha-Boltzmann-Gleichung. Im LTE geht man davon aus, dass Stöße mit Elektronen oder Ionen gegenüber radiativen Prozessen dominieren und somit Ionisation und Besetzung der einzelnen atomaren Niveaus an lokale Zustandsgrößen (Temperatur und Druck) gekoppelt sind. Diese Annahme ist allerdings nur für den Fall hoher Elektronendichten und niedriger Temperaturen gerechtfertigt. Damit das Strahlungsfeld durch den Zustand der unmittelbaren Umgebung bestimmt ist, muss die freie Weglänge der Photonen kleiner als die der Elektronen sein. Im strikten LTE geht man von der Näherung aus, die Quellfunktion $S_\nu(\vec{r})$ durch die Kirchhoff-Planck-Funktion $B_\nu(T)$ mit der lokalen Elektronentemperatur beschreiben zu können.

6.3.2 NLTE-Atmosphären

Geht man jedoch zu heißeren Sternen mit Effektivtemperaturen ab etwa 25 000 K, je nach Dichte und Ausdehnung der Atmosphäre, oder betrachtet man die äußersten Bereiche einer Atmosphäre, so gewinnen Abweichungen vom LTE zunehmend an Bedeutung. Die Linienkerne (Zentren der Profile) starker Spektrallinien, z.B. von Wasserstoff oder Helium, sowie die Ionisationsgleichgewichte der Elemente werden durch NLTE-Effekte wesentlich beeinflusst. In zunehmender Weise sind die Ionisationsstruktur und die Besetzung der einzelnen atomaren Niveaus nicht mehr durch Stöße mit den Elektronen sondern durch die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld bestimmt. Berücksichtigt man nun noch die stark mit der Wellenlänge variierende freie Weglänge der Photonen, d.h. die Photonen stammen aus unterschiedlichen Tiefen- und somit Temperaturschichten, so kann sich ein stark nicht-lokaler Charakter des Strahlungsfeldes bei diesen Atmosphären ergeben. Die Besetzungszahlen können nun nur noch explizit aus den Be- und Entvölkerungsraten der atomaren Niveaus bestimmt werden. Von großer Bedeutung ist es daher, diese Raten, und somit die ihnen zu Grunde liegenden atomaren Wirkungsquerschnitte der einzelnen Übergänge, möglichst genau und detailliert zu berechnen. Auf dieser Methode basierende Modelle werden NLTE-Modellatmosphären genannt. Erste Wasserstoff-Helium-NLTE-Modelle wurden von Auer & Mihalas (1969) berechnet. Für Neutronensterne wurden die ersten magnetfeldfreien Wasserstoff-Helium-Eisen NLTE-Modelle von Werner & Deetjen (2000) berechnet.

6.3.3 Kombinierte LTE / NLTE-Atmosphären

In der Praxis wählt man eine Kombination aus LTE- und NLTE-Beschreibung. Da die energetisch sehr hoch liegenden Niveaus nahe der Ionisationsgrenze sehr viel enger zueinander liegen, kann aufgrund hoher Elektronenstoßraten davon ausgegangen werden, dass diese im LTE mit dem Grundzustand der nächsthöheren Ionisationsstufe stehen. Somit müssen nur die unteren Niveaus eines jeden Ions im NLTE beschrieben werden. Weiterhin wird die Aufspaltung der Energieniveaus bezüglich des Gesamtdrehimpulses J, die sogenannte Feinstrukturaufspaltung, nicht berücksichtigt.

Die Besetzung der einzelnen nicht aufgespaltenen Niveaus untereinander wird als im LTE befindlich angenommen. Die Aufspaltung geht jedoch in Form der entsprechenden statistischen Gewichte dieser Niveaus in die Berechnung ein.

Die selbstkonsistente Lösung der in Kapitel 6 aufgeführten Gleichungen unter der Annahme des NLTE stellt ein sehr gutes Modell einer magnetfeldfreien Sternatmosphäre dar. Die Berechnung derartiger Modelle ist aufwändig und schwierig.

6.4 Sternatmosphären mit Magnetfeldern

> „Here the algebraic minefield reaches formidable proportions and only deeply committed transfer theorists dare enter!“ Rees (1987)

6.4.1 Mögliche Einflüsse eines Magnetfeldes auf eine Sternatmosphäre

- Die Spektrallinien erfahren eine Verschiebung und Aufspaltung in Anwesenheit eines Magnetfeldes. Dies könnte zu einer generellen Anhebung der Opazität über einen großen Frequenzbereich führen, da es zu einer geringeren Sättigung der einzelnen Linien kommt. Um trotzdem Flusskonstanz zu gewährleisten, müsste die Atmosphäre mit einem größeren Temperaturgradienten „reagieren“. Die Temperatur in den tieferen Temperaturschichten stiege an und fiele in Richtung Oberfläche ab (Backwarming).

- Die Kontinuumsopazität verändert sich ebenfalls in Anwesenheit eines Magnetfeldes, was seinerseits auf die Atmosphärenstruktur rückkoppelt.

- Die Zyklotronabsorption tritt an Stelle der Thomsonstreuung als Opazitätsquelle auf und beeinflusst die Struktur, wenn die Zyklotronfrequenz in dem Bereich liegt, in dem der relevante Teil des Strahlungsflusses emittiert wird. Dieser Fall tritt ein für Magnetfelder in der Größenordnung von 10^8 Gauß.

- Hydrostatische Gleichung: Neben Gravitation und Strahlungdruck kann der vom Magnetfeld ausgeübte Druck eine relevante Größe werden. In einem reinen Dipolfeld tritt kein magnetischer Druck auf. Er ist durch die Abweichung des Magnetfeldes von der Dipolstruktur bestimmt. Dies erfordert jedoch genauere Kenntnis auch der kleinskaligen Magnetfeldstruktur, was extreme Anforderungen an die Beobachtungs- und Analysetechniken stellt.

- Die starken Magnetfelder verursachen eine ortsabhängige Effektivtemperatur.

- Starke Magnetfelder (10^{11}–10^{13} Gauß) stabilisieren die Atmosphäre gegen Konvektion (Miralles et al., 1997). Instabilität gegen Konvektion tritt nur bei Neutronensternen mit sehr schwachen Magnetfeldern ($< 10^8 - 10^9$ Gauß) auf, hier

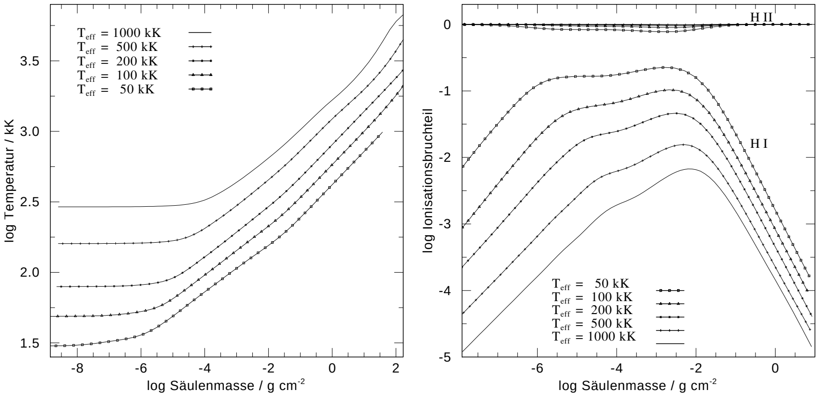


Abbildung 6.2: Temperaturschichtung und Ionisationsstruktur von einigen in dieser Arbeit verwendeten Nullfeldatmosphären ($\log g = 14{,}39$).

jedoch mit hohen Geschwindigkeiten ($1 - 10\,\mathrm{km/s}$). Physikalisch kann dies dadurch begründet werden, dass das Plasma sich in erster Ordnung nur noch entlang der Magnetfeldlinien bewegen kann.

6.4.2 Verwendung einer Nullfeldatmosphäre

Ein vollständige, in sich geschlossene Lösung des Sternatmosphärenproblems unter Berücksichtigung eines Magnetfeldes ist sehr schwierig. Neben dem Problem, eine Lösungsmethode zu finden, ist auch die Frage zu berücksichtigen, ob sich die Lösung in für Analysen praktikabler Zeit berechnen lässt (siehe hierzu die Ausführung in Abschnitt 11.6). Es bietet sich daher an, dieses Ziel schrittweise zu erreichen. Daher wird in dieser Arbeit bei der Berechnung der Struktur (Temperaturschichtung, Besetzungszahlen usw.) der Sternatmosphäre das Magnetfeld vernachlässigt (Nullfeldatmosphäre). Die gewonnene Struktur wird dann nicht mehr verändert (siehe Abb. 6.2). Im zweiten Schritt wir das Magnetfeld berücksichtigt und der polarisierte Strahlungstransport durch diese Atmosphäre berechnet (Lineformation). Als Resultat erhält man synthetische Fluss- und Polarisationsspektren, die mit der Beobachtung verglichen werden können. Die Struktur der Sternatmosphäre ist somit Lösung eines bereits bekannten Problems und kann mit Hilfe bereits bestehender Programme (z.B. Werner & Dreizler, 1999) berechnet werden. Daher wird die Struktur im folgenden Kapiteln als reine Eingangsgröße behandelt und der Schwerpunkt auf den polarisierten Strahlungstransport gelegt.

6.4.3 Abschätzung des Fehlers

Erste Abschätzungen des Fehlers, den man bei der Verwendung einer Nullfeldatmosphäre für die Lineformation macht, wurden schon vor 30 Jahren aufgestellt. Die Autoren gingen von der vereinfachenden Annahme aus, dass die Stoßraten so hoch sind, dass von einer gleichmäßigen Besetzung aller magnetischen Unterniveaus eines gegebenen Niveaus ausgegangen werden kann. Die Besetzungszahlen selbst können jedoch sehr wohl vom LTE abweichen. Dieser Ansatz wird complete dealignment genannt.

So hat Rees (1969) den Einfluss inkohärenter Streuung für Absorptionslinien eines Zweiniveau-Atommodell in einem uniformen Magnetfeld untersucht. Seine Lösung gilt für den Fall, dass die Aufspaltung groß genug ist. Rees (1969) kam dabei zu dem Schluss, dass die Besetzungszahlen einer Nullfeldatmosphäre sehr nahe an denen des vollständig gelösten Problems liegen. In die gleiche Richtung weisen die Ergebnisse der Untersuchungen von von Domke (1970), Domke & Staude (1973a,b) und Landi degl'Innocenti (1978).

Angesichts der Ungenauigkeiten, die an anderen Stellen in das Modell eingehen, wie z.B. den gebunden-frei Querschnitten, ermutigen diese Ergebnisse sich in einem ersten Schritt auf die Lineformation auf der Basis von NLTE Nullfeldatmosphären zu beschränken. In diesem Ansatz bestärkt, wird man nicht zuletzt durch die sehr guten Ergebnisse, die, basierend auf dieser Annahme, auf dem Gebiet der magnetischen Weißen Zwerge erzielt wurden.

KAPITEL 7

Polarisierter Strahlungstransport in Sternatmosphären

In diesem und den zwei folgenden Kapiteln werden die Gleichung für den polarisierten Strahlungstransport und die damit verbundenen Größen eingeführt, ein Überblick über die verwendeten nummerischen Lösungsverfahren gegeben und auf zwei von ihnen detailliert eingegangen.

7.1 Polarisierte Strahlung – die Stokesparameter

Das von den Sternen kommende Licht ist normalerweise unpolarisiert. Besitzt ein Stern jedoch ein Magnetfeld, so wird die von der Sternatmosphäre emittierte Strahlung vom Magnetfeld polarisiert.

Zur Beschreibung dieser Polarisation können die von Stokes (1862) eingeführten Parameter verwendet werden (siehe auch Jackson 1999; Rybicki & Lightman 1979). Seien $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ zwei orthogonale Einheitsvektoren, die zusammen mit dem Vektor in Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_z$ ein kartesisches Koordinatensystem bilden, so ergibt sich der normierte Polarisationsvektor $\vec{m}$ zu:

$$\vec{m}(t) = E_x(t)\vec{e}_x + E_y(t)\vec{e}_y. \tag{7.1}$$

Dabei sind $E_x(t)$ und $E_y(t)$ i.A. komplexe Funktionen, um so eine mögliche Phasenverschiebung berücksichtigen zu können ($E_x(t) = E_{0x}(t) \cdot e^{i(kz-\omega t+\delta_x(t))}$; wobei k der Wellenvektor, ω die Kreisfrequenz und δ_x eine Phasenverschiebung des Lichts sind). Die monochromatischen Stokesparameter I, Q, U, V, zusammengefasst im Stokesvektor $\vec{I} = (I, Q, U, V)^T$, charakterisieren die Polarisationseigenschaften vollständig. I bezeichnet wie üblich die Gesamtintensität, Q und U charakterisieren die lineare und V die zirkulare Polarisation (siehe Abb. 7.1).

$$\begin{aligned} I &= \langle E_{0x}^2\rangle + \langle E_{0y}^2\rangle & \qquad U &= 2\,\langle E_{0x}E_{0y}\cos\delta\rangle \\ Q &= \langle E_{0x}^2\rangle - \langle E_{0y}^2\rangle & \qquad V &= 2\,\langle E_{0x}E_{0y}\sin\delta\rangle \end{aligned} \tag{7.2}$$

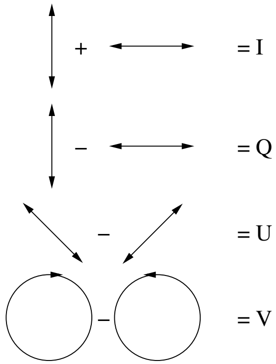


Abbildung 7.1: Anschauliche Definition der Stokeskomponenten.

Dabei bedeuten die spitzen Klammern eine zeitliche Mittelung. Die Phasendifferenz $\delta = \delta_x - \delta_y$ bestimmt den Rotationssinn. Bei $\sin\delta > 0$ handelt es sich um rechtszirkular polarisiertes Licht, V ist also positiv; für linkszirkular polarisiertes Licht ist V negativ. Für vollständig unpolarisiertes Licht, d.h. $Q = U = V = 0$, reicht die Größe I wieder zur Beschreibung aus. Zwei nützliche Hilfsgrößen stellen der Polarisationsgrad für linear polarisiertes Licht r_l und der Grad der zirkularen Polarisation r_c dar:

$$r_l = \frac{\sqrt{Q^2+U^2}}{I} \qquad r_c = \frac{V}{I}. \tag{7.3}$$

Zum Abschluss sei angemerkt, dass solange weder Faraday-Rotation noch Doppelbrechung auftreten, das lokale kartesische Koordinatensystem stets so orientiert werden kann, dass die z-Achse in Ausbreitungsrichtung und die x-Achse in der von z-Achse und Magnetfeldachse aufgespannten Ebene liegen. Dadurch reicht eine Komponente zur Beschreibung der linearen Polarisation (Q) aus. Der Winkel zwischen Magnetfeldachse und z-Achse wird mit γ bezeichnet.

7.2 Die physikalischen Größen und ihre mathematische Notation

Beim polarisierten Strahlungstransport handelt es sich um die Lösung einer via Tiefe, Stokeskomponenten, Frequenz und Richtungswinkel teilweise gekoppelten Differentialgleichung (DGL). Ein guter Teil der zumeist auftretenden Verständnisschwierigkeiten ist jedoch auf eine eher inkonsistente oder zumindest verwirrende Notation zurückzuführen.

Daher ist den eigentlichen Ausführungen dieser Abschnitt vorangestellt, um auf diese notationsbedingten Schwierigkeiten einzugehen.

7.2.1 Die physikalischen Größen

- Die geometrische Tiefe t; Längenskala, die den kürzesten geometrischen Abstand eines Punktes innerhalb der Atmosphäre zur Oberfläche angibt.

- Die Stokeskomponenten I, Q, U, V; sie sind Funktionen der geometrischen Tiefe und der Frequenz ν: $I \equiv I(t,\nu), Q \equiv Q(t,\nu), U \equiv U(t,\nu), V \equiv V(t,\nu)$.

- Durch die Zeeman-Aufspaltung der Spektrallinien infolge des Magnetfeldes muss die Opazität für jede Polarisationsrichtung (links-, rechtszirkular, parallel) getrennt berücksichtigt werden (vgl. Kapitel 5): $\kappa_l \equiv \kappa_l(t,\nu)$, $\kappa_r \equiv \kappa_r(t,\nu)$, $\kappa_p \equiv \kappa_p(t,\nu)$.

- Die Stokesopazitäten $\kappa_I, \kappa_Q, \kappa_U, \kappa_V$: $\kappa_I \equiv \kappa_I(t,\nu)$, $\kappa_Q \equiv \kappa_Q(t,\nu)$, $\kappa_U \equiv \kappa_U(t,\nu)$, $\kappa_V \equiv \kappa_V(t,\nu)$.

- Die magneto-optischen Parameter ρ_R, ρ_W: $\rho_R \equiv \rho_R(t,\nu)$, $\rho_W \equiv \rho_W(t,\nu)$.

- Die kontinuierliche (S_c) und die Linienquellfunktion (S_l): $S_c \equiv S_c(t,\nu)$, $S_l \equiv S_l(t,\nu)$.

Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, ist die Strahlungstransportgleichung (STG) eine in Stokeskomponenten und der Tiefe gekoppelte DGL. Solange keine Streuung berücksichtigt wird liegt jedoch keine Kopplung zwischen den einzelnen Frequenzpunkten oder Winkelrichtungen vor. Die Abhängigkeit der oben aufgeführten physikalischen Größen von der Frequenz wird daher im Folgenden nicht weiter explizit aufgeführt.

$$\kappa_I(t,\nu) \longrightarrow \kappa_I(t) \qquad \text{usw.}$$

Die jetzt nur noch von der Tiefe t abhängigen physikalischen Größen müssen nun für eine nummerische Umsetzung des Problems noch diskretisiert werden.

$$t \longrightarrow t_k \qquad \text{und} \qquad \kappa_I(t) \longrightarrow \kappa_{Ik} \qquad \text{usw.}$$

Das Resultat kann als Vektor der Dimension ND (Zahl der Tiefenpunkte) dargestellt werden:

$$\vec{\kappa}_I \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{I1} \\ \kappa_{I2} \\ \vdots \\ \kappa_{IND} \end{bmatrix}.$$

Um eine übersichtlichere Darstellung der Gleichungen zu erhalten werden die vier Stokeskomponenten I, Q, U und V zum Stokesvektor $\vec{I}$ zusammengefasst. Es handelt sich dabei also um einen Vektor der Dimension vier.

$$\vec{I} \equiv \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

7.2.2 Die mathematische Notation

Am Beispiel $\vec{\kappa}_I$ und $\vec{I}$ wird die Schwäche der Vektornotation deutlich. Man läuft Gefahr, Vektoren oder Matrizen unterschiedlicher Dimension in den Gleichungen nicht mehr unterscheiden zu können. Dies gilt insbesondere, da ja gerade $\vec{I}$ auch noch von der Tiefe abhängt, und daher eigentlich mit $\vec{I}_k$ bezeichnet werden müßte.

Aus diesem Grund wurde nachfolgend eine Notation der Gleichung für den polarisierten Strahlungstransport entwickelt, die keine Vektor- oder Matrix-Symbole verwendet. Stattdessen wird die z.B. in der Relativitätstheorie übliche Einstein Notation verwendet, bei der über identische Indizes summiert wird. Ein Beispiel:

$$\vec{L} = \hat{A} \cdot \vec{I} \qquad \text{wird geschrieben als} \qquad L^{\alpha} = A^{\alpha\beta} \cdot I^{\beta} \qquad \alpha, \beta \in [1,4]$$
$$\vec{I} = \hat{\Lambda} \cdot \vec{Q} \qquad \text{wird geschrieben als} \qquad I_k = \Lambda_{kd} \cdot Q_d \qquad k, d \in [1, ND].$$

Bei den Matrizen steht der erste Index für die Zeile, der zweite für die Spalte. Die Stokesindizes α und β werden von nun an stets oben und die Tiefenindizes k und d unten notiert. Es wird nicht zwischen einer Indexposition I^{α} oder I_{α} unterschieden. Mathematisch streng genommen muss natürlich zwischen dem Hilbertraum $\mathscr{H}$ und dem Vektorraum $\mathscr{H}^*$ der linearen Funktionale auf dem Hilbertraum $\mathscr{H}$ unterschieden werden. In der Physikliteratur werden lineare Funktionale oft als bra-Vektoren $\langle w|$ und Hilbertraumvektoren als ket-Vektoren $|u\rangle$ geschrieben. Zugunsten einer klaren Unterscheidung zwischen Tiefenindizes und Stokesindizes wird hier jedoch darauf verzichtet. Umsomehr muss man sich bei den im Folgenden eingeführten Matrizen stets bewusst sein, dass es sich um lineare Operatoren handelt.

7.3 Die Gleichung für den polarisierten Strahlungstransport – STG

SATZ 7.1 (POLARISIERTE STRAHLUNGSTRANSPORTGLEICHUNG, STG)
Basierend auf der Herleitung von Hardorp et al. (1976) kann die Gleichung für den polarisierten Strahlungstransport wie folgt dargestellt werden :

$$\mu \frac{d}{dt} I_k^{\alpha} = S_k^{\alpha} - \left[A_k^{\alpha\beta} + F_k^{\alpha\beta}\right] I_k^{\beta} = S_k^{\alpha} - T_k^{\alpha\beta} I_k^{\beta}. \tag{7.4}$$

DEFINITION 7.1.1

$$\text{mit} \quad \begin{array}{lll} k \in [1,\mathrm{ND}] & \mu = \cos\theta & : \text{Richtungskosinus} \\ \alpha,\beta \in [1,4] & t = t_k & : \text{geometrische Tiefenskala} \end{array}$$

$$I_k^{\alpha} = \begin{bmatrix} I_k \\ Q_k \\ U_k \\ V_k \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

$$A_k^{\alpha\beta} = {}_aA_k^{\alpha\beta} + {}_dA_k^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \kappa_{Ik} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{Ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{Ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{Ik} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{Qk} & 0 & \kappa_{Vk} \\ \kappa_{Qk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{Vk} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$F_k^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{Rk} & 0 \\ 0 & \rho_{Rk} & 0 & -\rho_{Wk} \\ 0 & 0 & \rho_{Wk} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

$$S_k^{\alpha} = \begin{bmatrix} S_{c_k} + (\kappa_{Ik} - 1)S_{lk} \\ \kappa_{Qk} S_{lk} \\ 0 \\ \kappa_{Vk} S_{lk} \end{bmatrix}. \tag{7.8}$$

DEFINITION 7.1.2 Bei κ_I, κ_Q und κ_V handelt es sich um die in Abschnitt 5.6 eingeführten Stokesopazitäten. S_c beschreibt die Quellfunktion des Kontinuums und S_l die Linienquellfunktion. Die einfachste Annahme besteht in der Verwendung der Planckfunktion B (sog. striktes Lokales Thermodynamisches Gleichgewicht, LTE).

DEFINITION 7.1.3 Die Matrix $A_k^{\alpha\beta}$ wird als verallgemeinerte Absorptionsmatrix bezeichnet. Sie setzt sich aus einem Absorptions- und einem Dispersionsanteil zusammen. $F_k^{\alpha\beta}$ ist die Faraday- oder anomale Dispersions-Matrix und bei S_k^{α} handelt es sich um den Quellvektor. $T_k^{\alpha\beta}$ ist die Transportmatrix.

ANMERKUNG 7.1.1 Die obige Darstellung macht die explizite Kopplung der Stokesparameter in der polarisierten Strahlungstransportgleichung deutlich.

ANMERKUNG 7.1.2 Bei den vorherigen Definitionen fällt auf, dass die Opazität κ_U scheinbar nicht definiert bzw. 0 ist. Dies kann durch eine geeignete Wahl des lokalen Koordinatensystems stets erreicht werden. Diese Form der polarisierten Strahlungstransportgleichung gilt unter der Voraussetzung $\phi = 0$, d.h. dass die Projektion der Magnetfeldachse auf den Hintergrund und die x-Achse zusammenfallen (siehe Abb. 11.3).

ANMERKUNG 7.1.3 Im Grenzfall eines verschwindenden Magnetfeldes gilt:

$$\kappa_I = \kappa \quad \wedge \quad \kappa_Q = \kappa_V = 0$$
$$\rho_R = \rho_W = 0.$$

Die Gleichung für den polarisierten Strahlungstransport geht dann in die in Abschnitt 6.2.3 hergeleitete Strahlungstransportgleichung (6.34) über.

SATZ 7.2 (VERALLGEMEINERUNG FÜR $\phi \neq 0$)
Ein Winkel $\phi \neq 0$ entspricht einer Rotation des Koordinatensystems um ϕ und hat somit nur Auswirkung auf die Werte von Stokes-Q und V. Die Lösung des Strahlungstransports muss also noch in das globale Koordinatensystem transformiert werden (Martin & Wickramasinghe, 1979b):

$$\begin{bmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 \\ 0 & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

7.4 Die Unno-Lösung

SATZ 7.3 (DIE UNNO-LÖSUNG)
Unno (1956) hat eine geschlossene Lösung der Transportgleichung unter folgenden Annahmen abgeleitet:

1. Die Absorptionskoeffizienten κ_I, κ_Q und κ_V sind unabhängig von der optischen Tiefe τ, d.h. also konstant. (Die Frequenzabhängigkeit bleibt natürlich erhalten.)

2. Die magneto-optischen Parameter ρ_R und ρ_W sind vernachlässigbar.

3. Die Quellfunktion S ist eine lineare Funktion der optischen Tiefe.

$$B = B_0(1 + \beta\,\tau) \qquad \text{Milne-Eddington-Näherung.} \tag{7.10}$$

4. Thomsonstreuung wird nicht berücksichtigt ($\sigma = 0$).

5. $I \rightarrow B$ für $\tau \rightarrow \infty$.

Unter diesen Voraussetzungen bildet die Strahlungstransportgleichung ein lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Die Vernachlässigung der magneto-optischen Parameter erlaubt stets eine Wahl des Koordinatensystems, in dem U zu Null wird. Die Lösung am innersten Tiefenpunkt lautet:

$$\begin{aligned} I_U &= B_0\,(1+\frac{\beta\,\mu\,\kappa_i}{\kappa_I^2-\kappa_Q^2-\kappa_V^2}), \\ Q_U &= -B_0\,\frac{\beta\,\mu\,\kappa_Q}{\kappa_I^2-\kappa_Q^2-\kappa_V^2}, \\ V_U &= -B_0\,\frac{\beta\,\mu\,\kappa_V}{\kappa_I^2-\kappa_Q^2-\kappa_V^2}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

SATZ 7.4 (ERWEITERTE UNNO-LÖSUNG)
Die Unno-Lösung wurde dann noch auf den Fall mit magneto-optischen Parametern von Martin & Wickramasinghe (1979a) erweitert:

$$\begin{aligned} I_U &= B_0+\frac{\mu B_0\beta}{\kappa_I-\frac{\kappa_V^2}{\kappa_{IW}}-\frac{\kappa_{Q\rho}^2}{\kappa_{IR}}} \\ Q_U &= -\frac{\kappa_{Q\rho}}{\kappa_{IR}}(I_U-B_0) \\ U_U &= \left(-\frac{\kappa_V}{\kappa_{IW}}-\frac{\rho\,\kappa_{Q\rho}}{\kappa_{IR}}\right)(I_U-B_0) \\ V_U &= \frac{1}{\kappa_I}(\rho_W V_U-\rho_R Q_U). \end{aligned} \tag{7.12}$$

DEFINITION 7.4.1

$$\begin{aligned} \text{mit}\quad \kappa_{IW} &= \kappa_I+\frac{\rho_W^2}{\kappa_I}, \qquad & \kappa_{IR} &= \kappa_I+\frac{\rho_R^2}{\kappa_I}-\rho^2\kappa_{IW}, \\ \rho &= \frac{\rho_R\rho_W}{\kappa_I\kappa_{IW}}, \qquad & \kappa_{Q\rho} &= \kappa_Q+\rho\,\kappa_V. \end{aligned} \tag{7.13}$$

ANMERKUNG 7.4.1 Ausgehend von dieser Unno-Lösung für eine große optische Tiefe τ haben Martin & Wickramasinghe (1979a) ein Verfahren vorgestellt, das eine schrittweise Berechnung des Stokesvektor von Tiefenpunkt zu Tiefenpunkt von innen nach außen erlaubt. Nähere Einzelheiten finden sich in den Arbeiten von Martin & Wickramasinghe (1979a) und Jordan (1988).

ANMERKUNG 7.4.2 In Gl. 6.32 ist die Quellfunktion als das Verhältnis von Emission zu Absorption definiert worden. Die Anwesenheit eines Magnetfeldes verursacht, wie beschrieben, eine anisotrope Richtungscharakteristik von Emission und Absorption. Die Verwendung der skalaren Planckfunktion zur Beschreibung des Quotienten, unter Annahme des thermodynamischen Gleichgewichts, ist hier nur unter der Annahme gerechtfertigt, dass beide dieselbe Richtungscharakteristik aufweisen.

7.5 Lösungsverfahren für die STG

Im Rahmen dieser Arbeit werden vier verschiedene Lösungsverfahren verwendet:

1. *Das ALI-Verfahren* von Takeda (1991) (accelerated lambda iteration – ALI) (siehe Kapitel 8). Dieses Iterationsverfahren kann als einziges neben der wahren Absorption auch die Streuung mit berücksichtigen.

2. *Die Matrixexponentiallösung* ist ein direkter, analytischer Weg zur Lösung der Transportgleichung, der von Dittmann (1995) vorgeschlagen wurde (MATEXP) (siehe Kapitel 9).

3. *Die erweiterte Unno-Lösung* von Martin & Wickramasinghe (1979a) (M&W) (siehe Abschnitt 7.4).

4. *Das Näherungsverfahren mit den verallgemeinerten Stokesparametern* (APPROX). Dieses analytische Verfahren berechnet die Stokesparameter über die Normalmoden in der Näherung für hohe Faraday-Rotationen. Eine Darstellung des Verfahrens findet sich in Schmidt (1997).

Die beiden für diese Arbeit wichtigsten Verfahren sind erstens die ALI Methode, da sie als einzige auch die Streuung mit berücksichtigen kann und zudem „nummerisch saubere" Spektren liefert. Da die ALI-Methode jedoch sehr langsam ist, wird für die Berechnung der Modellspektren momentan das MATEXP Verfahren herangezogen.

Die M&W und APPROX Methode dienen lediglich zur Kontrolle der Implementation und der Abschätzung der Geschwindigkeit und der Abweichung der unterschiedlich gewonnenen Ergebnisse untereinander (siehe Kapitel 11).

Generell kann gesagt werden, dass das ALI-Verfahren die langsamste aber zugleich die stabilste Methode darstellt. Die Lösungsmethode nach M&W sowie die APPROX Methode wurden unter den beschriebenen vereinfachenden Annahmen entwickelt. Entsprechend kann es zu z.T. recht deutlichen Fehlern kommen, wenn diese Annahmen nicht mehr erfüllt sind. Insbesondere bei den von mir berechneten Neutronensternmodellen mit Magnetfeldern größer als $\approx 10^9$ Gauß erwiesen sich diese beiden Methoden als nummerisch instabil.

KAPITEL 8

Das ALI Verfahren

8.1 *Die formale Entkoppelung der STG*

SATZ 8.1 (DIE FORMAL ENTKOPPELTE STG, FE-STG)
Die explizite Kopplung der Stokeskomponenten via β in der STG (7.4) lässt sich formal durch die Einführung der verallgemeinerten Quellfunktion Q_k^α und der Dispersionsmatrix $M_k^{\alpha\beta}$ aufheben:

$$\frac{d}{d\tau} I_k^\alpha = I_k^\alpha - Q_k^\alpha. \tag{8.1}$$

DEFINITION 8.1.1

Hierbei sind:

$$d\tau = -\frac{\kappa_{Ik}}{\mu} dt \tag{8.2}$$

$$Q_k^\alpha = B_k^\alpha - M_k^{\alpha\beta} I_k^\beta \tag{8.3}$$

$$B_k^\alpha = \frac{1}{\kappa_{Ik}} S_k^\alpha \tag{8.4}$$

$$M_k^{\alpha\beta} = \frac{1}{\kappa_{Ik}} \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{Qk} & 0 & \kappa_{Vk} \\ \kappa_{Qk} & 0 & -\rho_{Rk} & 0 \\ 0 & \rho_{Rk} & 0 & -\rho_{Wk} \\ \kappa_{Vk} & 0 & \rho_{Wk} & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.5}$$

BEWEIS 8.1.1 Der Beweis ergibt sich durch kurze Umformung der STG unter Verwendung der aufgeführten Definitionen:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{dt} I_k^\alpha &= S_k^\alpha - \left[A_k^{\alpha\beta} + F_k^{\alpha\beta} \right] I_k^\beta \\ &= S_k^\alpha - \left[{}_aA_k^{\alpha\beta} + {}_dA_k^{\alpha\beta} + F_k^{\alpha\beta} \right] I_k^\beta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \kappa_{Ik} B_k^{\alpha} - \kappa_{Ik} \left[\delta^{\alpha,\beta} + \frac{1}{\kappa_{Ik}} \left({}_d A_k^{\alpha\beta} + F_k^{\alpha\beta} \right) \right] I_k^{\beta} \\
\frac{\mu}{\kappa_{Ik}} \frac{d}{dt} I_k^{\alpha} &= B_k^{\alpha} - I_k^{\alpha} + M_k^{\alpha\beta} I_k^{\beta} \\
\frac{d}{d\tau} I_k^{\alpha} &= I_k^{\alpha} - Q_k^{\alpha}. \qquad \Box
\end{aligned}
$$

ANMERKUNG 8.1.1 Die formal entkoppelte STG besteht aus vier formal unabhängigen Differentialgleichung. Die Stokesparameter I^{α} sind nun nur noch implizit über Gl. 8.1 gekoppelt.

ANMERKUNG 8.1.2 Der Übergang vom Differential dt zu $d\tau$ bedeutet zugleich einen Wechsel von einer geometrischen Tiefenskala zu einer optischen Tiefenskala, der sog. τ-Skala. Sie ergibt sich aus (8.2) zu:

$$
\tau_1 = 0 \qquad \tau_k = \tau_{k-1} + \frac{1}{\mu} \frac{\left(\kappa_I^d + \kappa_I^{d-1} \right)}{2} \cdot (t_k - t_{k-1}). \tag{8.6}
$$

In praxi ist jedoch nicht eine geometrische Tiefenskala t, mit $[t]$=cm gegeben, sondern eine Säulendichte m, mit $[m]$ =g/cm^2 sowie eine Massendichte ρ, mit $[\rho]$ =g/cm^3. Dies führt zu:

$$
(t_k - t_{k-1}) = \frac{m_k - m_{k-1}}{(\rho_k + \rho_{k-1})/2}. \tag{8.7}
$$

8.2 *Die kontinuierliche Lösung der formal entkoppelten STG*

SATZ 8.2 (KONTINUIERLICHE LÖSUNG DER FE-STG)
Die kontinuierliche Lösung der formal entkoppelten STG lautet:

$$
I^{\alpha}(\tau) = I^{\alpha}(\tau_{ND}) \cdot e^{-(\tau_{ND} - \tau)} + \int_{x=\tau}^{\tau_{ND}} Q^{\alpha}(x) e^{-(x-\tau)} dx. \tag{8.8}
$$

BEWEIS 8.2.1 Die formal entkoppelte STG stellt eine inhomogene lineare, d.h. quasilineare DGL erster Ordnung dar. Die verallgemeinerte Quellfunktion Q_k^{α} ist die Differenz stetiger Funktionen, d.h. der Quellfunktion und der mit der Dispersionsmatrix modifizierten Intensität, und somit selbst stetig. Die Standardvoraussetzungen sind also erfüllt und der Beweis kann der Literatur entnommen werden (z.B. Fischer & Kaul, 1990). $\Box$

8.3 Exkurs: Nummerische Integration mit der Trapezregel

AUFGABE 8.3 (NUMMERISCHE INTEGRATION MIT TRAPEZREGEL)
Gegeben sei das Integral:

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{8.9}$$

Gesucht sind die Integrationsgewichte w_a und w_b, so dass

$$I = w_a f(a) + w_b f(b). \tag{8.10}$$

$$\text{wobei} \quad \begin{array}{rlrl} [a,b] & : \text{Teilintervall} & f(x) & : \text{zu integrierende Funktion} \\ g(x) & : \text{Gewichtsfunktion} & f(a), f(b) & : \text{gegeben.} \end{array}$$

LÖSUNG 8.3.1 Die zu integrierende Funktion kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(b)+f(a)}{2} + r \cdot \frac{f(b)-f(a)}{2} \\ g(x) &= g^e(r) + g^o(r) \\ g^e(r) &= \frac{1}{2}\left(g(m+\frac{\Delta}{2}r) + g(m-\frac{\Delta}{2}r)\right) \\ g^o(r) &= \frac{1}{2}\left(g(m+\frac{\Delta}{2}r) - g(m-\frac{\Delta}{2}r)\right). \end{aligned} \tag{8.11}$$

SATZ 8.4
Die Integrationsgewichte für die Gewichtsfunktion $g(x) = e^{-x}$ lauten:

$$\begin{aligned} w_a &= \quad e^{-a} + \frac{1}{b-a}(e^{-b} - e^{-a}) \\ w_b &= -e^{-b} + \frac{1}{b-a}(e^{-a} - e^{-b}). \end{aligned} \tag{8.12}$$

BEWEIS 8.4.1

$$G = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(e^{-m-\frac{\Delta}{2}r} + e^{-m+\frac{\Delta}{2}r}\right) dr = \frac{1}{\Delta}e^{-m} \cdot \left(-e^{-\frac{\Delta}{2}} + e^{\frac{\Delta}{2}}\right)$$

$$H = \int_0^1 \frac{1}{2}r \cdot \left(e^{-m-\frac{\Delta}{2}r} - e^{-m+\frac{\Delta}{2}r}\right) dr = \frac{1}{\Delta}e^{-m} \cdot \left(-e^{-\frac{\Delta}{2}} - \frac{2}{\Delta}e^{-\frac{\Delta}{2}} - e^{\frac{\Delta}{2}} + \frac{2}{\Delta}e^{\frac{\Delta}{2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
w_a &= \frac{\Delta}{2}(G-H) = e^{-a} + \frac{1}{b-a}\left(e^{-b} - e^{-a}\right) \\
w_b &= \frac{\Delta}{2}(G+H) = -e^{-b} + \frac{1}{b-a}\left(e^{-a} - e^{-b}\right).
\end{aligned}
\qquad \square
$$

8.4 Die diskretisierte Lösung der formal entkoppelten STG

SATZ 8.5 (DISKRETISIERTE LÖSUNG DER FE-STG)
Die diskretisierte Lösung der formal entkoppelten STG lautet:

$$I_k^\alpha = \Lambda_{k,d} \cdot Q_d^\alpha. \tag{8.13}$$

DEFINITION 8.5.1

$$
\text{mit} \qquad \Lambda_{k,d} = \begin{cases} 0 & \text{für } d < k, \\ e^{\tau_k} \cdot w_a\big|_{[k,k+1]} & \text{für } d = k, \\ e^{\tau_k} \cdot \left(w_a\big|_{[d,d+1]} + w_b\big|_{[d-1,d]} \right) & \text{für } k < d < ND, \\ e^{\tau_k} \cdot \left(w_b\big|_{[d-1,d]} + e^{\tau_{ND}} \right) & \text{für } d = ND. \end{cases}
$$

$$
\text{und} \qquad
\begin{aligned}
w_a\big|_{[d,d+1]} &= \quad e^{-\tau_d} + \frac{1}{\tau_{d+1} - \tau_d}(e^{-\tau_{d+1}} - e^{-\tau_d}) \\
w_b\big|_{[d-1,d]} &= -e^{-\tau_d} + \frac{1}{\tau_d - \tau_{d-1}}(e^{-\tau_{d-1}} - e^{-\tau_d}).
\end{aligned}
$$

ANMERKUNG 8.5.1 $\Lambda_{k,d}$ wir als Λ-Matrix bezeichnet und ist eine konkrete Darstellung des abstrakten Lösungsoperators einer diskretisierten inhomogenen DGL.

ANMERKUNG 8.5.2 Zu beachten ist, dass die vier formal unabhängigen Differentialgleichungen durch ein und denselben Lösungsoperator Λ gelöst werden.

BEWEIS 8.5.1 Durch Diskretisierung der Lösung der kontinuierlichen DGL erhält man die Lösung der diskretisierten DGL. Im Folgenden muss also noch gezeigt werden, dass eine Diskretisierung der Lösung 8.8 in der behaupteten Weise dargestellt werden kann.

Die optische Tiefenskala τ wird in ND Tiefenpunkte diskretisiert: $\tau(k) \to \tau_k$ und das Integral wird durch eine Summe ersetzt:

$$I_k^\alpha = I_{ND}^\alpha \cdot e^{-(\tau_{ND} - \tau_k)} + \sum_{d=k}^{ND} Q_d^\alpha \cdot e^{-(\tau_d - \tau_k)} \cdot w_d.$$

Eine geschickte Wahl der Integrationsgewichte ist nun entscheidend, um eine nummerisch möglichst exakte und stabile Lösung zu erhalten. Eine Anwendung der Trapezregel auf den Integranden $Q_d^\alpha \cdot e^{-\tau_d}$ ist daher ungeeignet. Die Trapezregel ist jedoch dann ausreichend genau, wenn man die e-Funktion als Gewichtsfunktion im Sinne von Abschnitt 8.3 versteht. Man spricht dann von einer stückweise linearen Approximation von Q_d^α.

Überträgt man die Überlegungen von Abschnitt 8.3 und verallgemeinert sie auf eine Diskretisierung in ND Teilintervalle, so führt dies zu folgender Summe:

$$
\begin{aligned}
I_k^\alpha = e^{\tau_k} \cdot Q_{ND}^\alpha \cdot e^{-\tau_{ND}} + w_a\big|_{[k,k+1]} \cdot I_k^\alpha + w_b\big|_{[ND-1,ND]} \cdot Q_{ND}^\alpha \\
+ \sum_{d=k+1}^{ND-1} \left(w_a\big|_{[d,d+1]} + w_b\big|_{[d-1,d]} \right) \cdot Q_d^\alpha).
\end{aligned}
$$

Diese Summe lässt sich also in der behaupteten einfachen Form darstellen und die Gewichte ergeben sich aus Satz 8.4. □

ANMERKUNG 8.5.3 Für einen zur Oberfläche hin gerichteten Strahl ($\mu > 0$) ist Λ also als obere Dreiecksmatrix gegeben. Abseits der Rechnung leuchtet dies auch unmittelbar ein, denn die verallgemeinerte Quellfunktion Q_k^α wird für einen gegebenen Tiefenpunkt k vom innersten Tiefenpunkt bis zu eben dieser Tiefe aufintegriert.

8.5 Die Randwertbedingungen

Um schließlich zu einer Lösung zu gelangen, müssen noch die Randwertbedingungen angegeben werden. Im einfachsten Fall geht man davon aus, dass die auf die Sternoberfläche eingestrahlte Leistung Null ist. Als Randbedingung am untersten Tiefenpunkt kommt für die Intensität $I_k^1(\nu) = B(\nu)$ mit der Temperatur des innersten Tiefenpunkts zum Einsatz. Desweiteren wird davon ausgegangen, dass am untersten Tiefenpunkt unpolarisiertes Licht eingestrahlt wird ($I_k^{2/3/4}(\nu) = 0$).

8.6 Die Lambda-Iteration

Mit Hilfe der diskretisierten Lösung der STG und den Randwertbedingungen kann nun ein konkretes Lösungsschema für den polarisierten Strahlungstransport entwickelt werden. Ein naheliegender Ansatz ist ein iteratives Lösungsverfahren. Da man die zur Berechnung von Q_k^α eigentlich notwendige Intensität I_k^α natürlich noch nicht kennt, beginnt man mit einer Startnäherung $I_{k\ \mathrm{start}}^\alpha$.

$$I_k = B_k Q_k = U_k = V_k = 0. \tag{8.14}$$

Mit dieser Startnäherung kann zunächst ${}_{FS}Q_k^\alpha$ (FS – formal solution) und dann ein verbessertes ${}_{FS}I_k^\alpha$ berechnet werden. Beide Werte stellen also nur eine Näherung der tatsächlichen Lösung dar. Diese Iteration muss nun sooft wiederholt werden, bis eine zufriedenstellende Konvergenz erreicht wird. Dieses Verfahren wird Lambda-Iteration (LI) genannt.

Mit ΔI_k^α wird der Fehler bezeichnet, den man im aktuellen Iterationsschritt macht:

$$\Delta I_k^\alpha \equiv (I_k^\alpha -_{FS} I_k^\alpha) = \Lambda_{k,d} \cdot (Q_d^\alpha -_{FS} Q_d^\alpha). \tag{8.15}$$

8.7 Die beschleunigte Lambda-Iteration

Vorteil der formalen Entkoppelung der STG (siehe Abschnitt 8.1) ist die vergleichsweise einfache Lösbarkeit der resultierenden entkoppelten Differentialgleichungen. Dadurch sind aber die einzelnen Stokeskomponenten eben auch nur noch lose miteinander gekoppelt. Dies hat zur Folge, dass z.B. eine Änderung von Stokes V am innersten Tiefenpunkt sich nur im Laufe sehr vieler Iterationen bei allen anderen Stokeskomponenten und Tiefen bemerkbar macht. Die Rückkopplungsreaktion des Systems bedarf ebenfalls entsprechend viel Zeit. Ziel ist es daher ein Verfahren zu entwickeln, das diese Nachteile abmildert, ohne die Vorteile aufzuheben.

Dies war Ausgangspunkt für eine sehr viel leistungstärkere Methode, die von Cannon (1973) auf der Basis der Operatorstörungstechniken entwickelt wurde, die Methode der genäherten Lambda-Operatoren.

$$\Lambda = \Lambda^* + (\Lambda - \Lambda^*), \tag{8.16}$$

wobei Λ^* ein geeignet gewählter, genäherter Λ-Operator sein soll. Von Scharmer (1981) wurde diese Methode für das Gebiet der magnetfeldfreien NLTE Atmosphären erweitert und im Laufe der Zeit von Werner & Husfeld (1985) und Werner (1986), Werner (1987b), Werner (1988) immer weiter verfeinert. Takeda (1991) übertrug dann diesen Ansatz auf das Problem des polarisierten Strahlungstransports.

AUFGABE 8.6 (ZIEL DES ALI VERFAHRENS)
Ziel des ALI Verfahrens ist es, nach jedem Iterationsschritt eine Korrektur zu berechnen, die den Fehler ΔI_k^α teilweise kompensiert.

LÖSUNG 8.6.1 Dieses Ziel kann durch folgenden Ansatz erreicht werden:

$$I_k^\alpha =_{FS} I_k^\alpha + \Lambda_{k,d}^* \cdot \left(Q_d^\alpha -_{FS} Q_d^\alpha\right). \tag{8.17}$$

Die Wahl des Λ^*-Operators ist entscheidend für eine schnelle und sichere Konvergenz. Er muss die entscheidenden Eigenschaften des exakten Λ-Operators haben und trotzdem leicht zu invertieren sein. Die zwei Wichtigsten sind:

- Der diagonale Λ^*-Operator (Werner & Husfeld, 1985) enthält am besten die Diagonale des exakten Λ-Operators (Olson et al., 1986). Bei dieser Wahl werden die einzelnen Tiefen voneinander entkoppelt, so dass die Berechnung keinen Aufwand erfordert.

- Der bidiagonale Λ^*-Operator enthält die Haupt- und die erste obere Nebendiagonale des exakten Λ-Operators. Hier koppelt man die aktuelle Tiefenschicht an darunterliegende Nachbarschichten. Dadurch kommt der nicht-lokale Charakter des Strahlungsfeldes mehr zur Geltung.

- Der tridiagonale Λ^*-Operator enthält die Haupt- und die ersten Nebendiagonalen des exakten Λ-Operators. Da die für den Fall ohne Streuung in Satz 8.5 hergeleitete Λ-Matrix obere Dreiecksform besitzt, ist dieser Λ^*-Operator mit dem bidiagonalen identisch.

Da die exakte Λ-Matrix die Ausbreitung einzelner Strahlungspulse über alle Tiefenpunkte beschreibt, Q proportional zur Zahl der emittierten Photonen ist und diese überwiegend in den umliegenden Tiefenschichten absorbiert werden, entsprechen diese Λ^*-Operatoren, gerade für große optische Tiefen, in denen die LI versagt sehr gut den gestellten physikalischen Anforderungen.

SATZ 8.7 (ÄQUIVALENTE FORMULIERUNG DES ALI VERFAHRENS)
Wählt man die Λ^*-Matrix zu ($\delta_{k,d}$ - Kronecker Delta):

$$\Lambda^*_{k,d} = (\delta_{k,d+1} + \delta_{k,d} + \delta_{k,d-1}) \cdot \Lambda_{k,d} \,, \tag{8.18}$$

so lässt sich Gl. 8.17 als einfaches Gleichungssystem darstellen:

$$L_k^\alpha = -A_k^{\alpha\beta} I_{k-1}^\beta + B_k^{\alpha\beta} I_k^\beta - C_k^{\alpha\beta} I_{k+1}^\beta. \tag{8.19}$$

DEFINITION 8.7.1

$$\begin{aligned}
A_k^{\alpha\beta} &= -\Lambda_{k,k-1} \cdot M_{k-1}^{\alpha\beta} & L_k^\alpha = {}_{FS}I_k^\alpha &- \Lambda_{k,k-1} \cdot ({}_{FS}Q_{k-1}^\alpha - B_{k-1}^\alpha) \\
B_k^{\alpha\beta} &= \Lambda_{k,k} \cdot M_k^{\alpha\beta} + \delta_{\alpha,\beta} & &- \Lambda_{k,k} \cdot ({}_{FS}Q_k^\alpha - B_k^\alpha) \\
C_k^{\alpha\beta} &= -\Lambda_{k,k+1} \cdot M_{k+1}^{\alpha\beta} & &- \Lambda_{k,k+1} \cdot ({}_{FS}Q_{k+1}^\alpha - B_{k+1}^\alpha).
\end{aligned} \tag{8.20}$$

BEWEIS 8.7.1 Der Beweis ergibt sich durch Einsetzen der tridiagonalen Λ^* Matrix und einigen leichten algebraischen Umformungen:

$$
\begin{aligned}
I_k^\alpha &= {}_{FS}I_k^\alpha + \Lambda^*_{k,d} \cdot \left(Q_d^\alpha - {}_{FS}Q_d^\alpha\right) \\
&= {}_{FS}I_k^\alpha + \Lambda_{k,k-1} \cdot \left(Q_{k-1}^\alpha - {}_{FS}Q_{k-1}^\alpha\right) \\
&\quad + \Lambda_{k,k} \cdot \left(Q_k^\alpha - {}_{FS}Q_k^\alpha\right) \\
&\quad + \Lambda_{k,k+1} \cdot \left(Q_{k+1}^\alpha - {}_{FS}Q_{k+1}^\alpha\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_k^\alpha - \Lambda_{k,k-1}(B_{k-1}^\alpha - M_{k-1}^{\alpha\beta} I_{k-1}^\beta) &= {}_{FS}I_{k-1}^\alpha - \Lambda_{k,k-1}\,{}_{FS}Q_{k-1}^\alpha \\
- \Lambda_{k,k}(B_k^\alpha - M_k^{\alpha\beta} I_k^\beta) &\quad - \Lambda_{k,k}\,{}_{FS}Q_k^\alpha \\
- \Lambda_{k,k+1}(B_{k+1}^\alpha - M_{k+1}^{\alpha\beta} I_{k+1}^\beta) &\quad - \Lambda_{k,k+1}\,{}_{FS}Q_{k+1}^\alpha \\
I_k^\alpha + \Lambda_{k,k-1} M_{k-1}^{\alpha\beta} I_{k-1}^\beta &= {}_{FS}I_{k-1}^\alpha - \Lambda_{k,k-1}({}_{FS}Q_{k-1}^\alpha - B_{k-1}^\alpha) \\
+ \Lambda_{k,k} M_k^{\alpha\beta} I_k^\beta &\quad - \Lambda_{k,k}({}_{FS}Q_k^\alpha - B_k^\alpha) \\
+ \Lambda_{k,k+1} M_{k+1}^{\alpha\beta} I_{k+1}^\beta &\quad - \Lambda_{k,k+1}({}_{FS}Q_{k+1}^\alpha - B_{k+1}^\alpha).
\end{aligned}
$$

Sortieren nach I_{k-1}^α, I_k^α und I_{k+1}^α sowie Anwendung der Gl. 8.17 liefert nun die Behauptung. □

AUFGABE 8.8 (LÖSUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS)
Gesucht ist die Lösung I_k^α des Gleichungssystems 8.19 unter Berücksichtigung der in Abschnitt 8.4 hergeleiteten Λ-Matrix.

LÖSUNG 8.8.1 (LÖSUNG FÜR EINEN BIDIAGONALEN Λ^*-OPERATOR) Wie schon in Anmerk. 8.5.3 festgestellt ist Λ eine obere Dreiecksmatrix. Damit ist aber $A_k^{\alpha\beta} = 0$ gemäß (8.20). Die Lösung von (8.19) kann man daher durch Iteration vom innersten (ND) zum äußersten Tiefenpunkt erhalten. Ausgangspunkt ist hierbei die innere Randbedingung:

$$
\begin{aligned}
I_{ND}^1 &= B(T_{ND}) \\
I_{ND}^{2/3/4} &= 0 \\
I_k^\alpha &= (B_k^{\alpha\beta})^{-1} \cdot (C_k^{\alpha\beta} I_{k+1}^\beta + L_k^\alpha).
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

LÖSUNG 8.8.2 (LÖSUNG FÜR EINEN DIAGONALEN Λ^*-OPERATOR) Neben $A_k^{\alpha\beta}$ ist hier auch $C_k^{\alpha\beta} = 0$.

$$
I_k^\alpha = (B_k^{\alpha\beta})^{-1} \cdot I_{k+1}^\beta. \tag{8.22}
$$

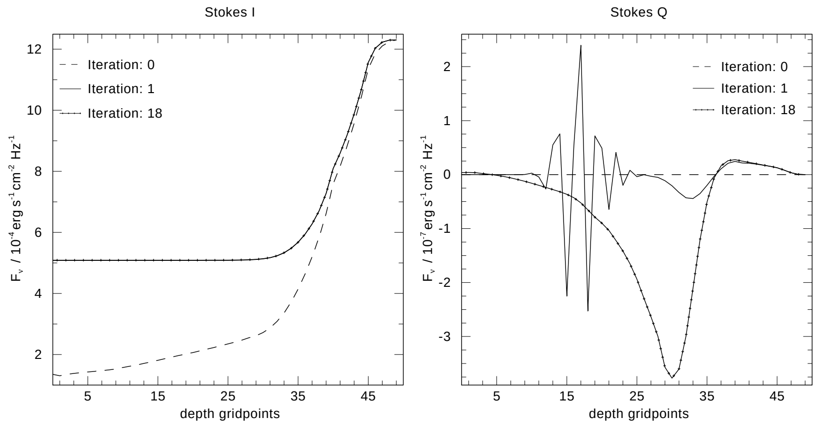


Abbildung 8.1: Typisches tiefenabhängiges Konvergenzverhalten von Stokes I und Q beim ALI Verfahren

8.7.1 Das Konvergenzverhalten der ALI Methode

Die ALI Methode konvergiert in den meisten Fällen in 12 (Kontinuum) bis 20 (Linienkern) Iterationsschritten. Das typische, auch von der Tiefe abhängige Konvergenzverhalten ist in Abb. 8.1 und Abb. 8.2 dargestellt. Dabei wird eine Lösung als konvergent angesehen, wenn für alle Tiefen und Stokeskomponenten in drei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten jeweils folgendes Kriterium erfüllt ist:

$$\frac{\left|I^{\alpha}_{k\ neu} - I^{\alpha}_{k\ alt}\right|}{\left|I^{\alpha}_{1\ neu}\right|} < 10^{-3}. \tag{8.23}$$

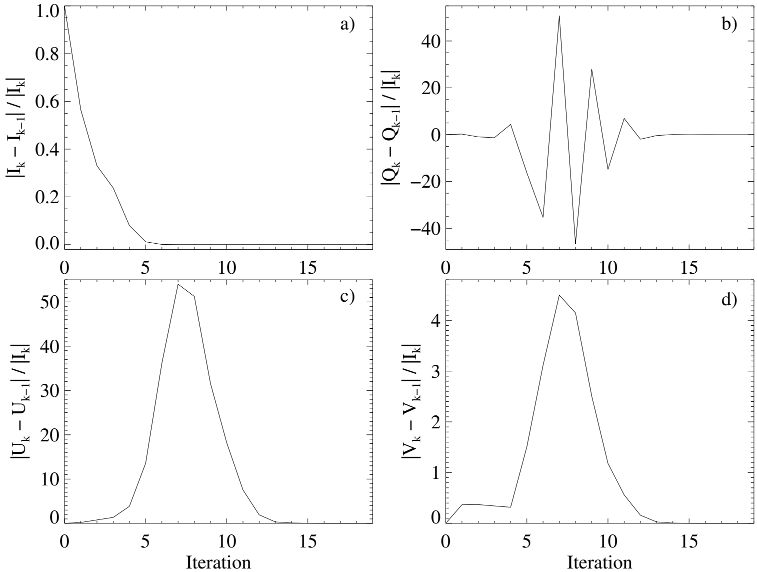


Abbildung 8.2: Relative Korrekturen der einzelnen Stokeskomponenten im Zuge einer ALI Konvergenz; a) $|I_k - I_{k-1}|/|I_k|$ b) $|Q_k - Q_{k-1}|/|I_k|$ c) $|U_k - U_{k-1}|/|I_k|$ d) $|V_k - V_{k-1}|/|I_k|$. Auffallend sind die starken Korrekturen in den Stokeskomponenten der linearen Polarisation (Q, U). Dies begründet sich dadurch, dass diese beiden Komponenten sich lediglich um eine Phasenverschiebung von 90° unterscheiden und über die Faraday-Matrix $F_k^{\alpha\beta}$ bei der ALI Iteration gekoppelt sind.

Kapitel 9

Die Matrixexponentiallösung

Ausgangspunkt der Matrixexponentiallösung ist die Annahme, dass die Transportmatrix $\hat{T}$ unabhängig von der Tiefe ist. Da aber die Tiefenabhängigkeit der Opazitäten ein wichtiges Merkmal dieser Atmosphären ist erscheint dieses Verfahren zunächst gänzlich ungeeignet für die Berechnung realistischer Sternatmosphärenmodelle zu sein. Um es dennoch anwenden zu können, wird die Atmosphäre in ND Tiefenschichten diskretisiert. Zwischen zwei aufeinanderfolgende Tiefenschichten ändern sich die Opazitäten nur wenig und wird bei der Matrixexponentialmethode als konstant angenommen. Ausgehend von dem inneren Rand der Atmosphäre, der durch die Randbedingung vorgegeben ist, kann nun die Strahlung von Tiefenpunkt zu Tiefenpunkt mit Hilfe der Matrixexponentialmethode propagiert werden.

9.1 *Darstellung des Verfahrens*

Zur klareren Darstellung dieses Verfahrens muss die Darstellung gewechselt werden. Verervektoren und -matrizen werden in diesem Kapitel mit Vektor- ($\vec{I}$) bzw. Matrixsymbolen ($\hat{T} \equiv$ Transportmatrix) dargestellt. Der Grund für diesen Darstellungswechsel ist die Vermeidung von mehrdeutigen Ausdrücken der Art $e^{\eta^{\alpha\beta}}$. Der alten Darstellung kann nicht zweifelsfrei entnommen werden, ob hier ein einzelner Skalar oder eine gesamte Matrix im Exponenten steht.

Definition 9.1 (Die STG in Vektornotation)

$$\frac{d\vec{I}(\tau)}{d\tau} = \hat{T}(\tau)\vec{I}(\tau) - \vec{S}(\tau) \qquad \vec{I}(\tau_{ND}) = \vec{I}_{ND} = \begin{bmatrix} B(\tau_{ND}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

$$\hat{T}(\tau) = \hat{A}(\tau) + \hat{F}(\tau) = \begin{bmatrix} \kappa_I(\tau) & \kappa_Q(\tau) & 0 & \kappa_V(\tau) \\ \kappa_Q(\tau) & \kappa_I(\tau) & -\rho_R(\tau) & 0 \\ 0 & \rho_R(\tau) & \kappa_I(\tau) & -\rho_W(\tau) \\ \kappa_V(\tau) & \rho_W(\tau) & 0 & \kappa_I(\tau) \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

SATZ 9.2 (LÖSUNG DER STG FÜR KONSTANTE TRANSPORTMATRIZEN)
Dieses inhomogene System von gewöhnlichen Differentialgleichungen hat eine einfache Lösung unter der Bedingung, dass die Transportmatrix $\hat{T}$ konstant, also tiefenunabhängig ist (Beweis siehe Fischer & Kaul, 1998). Diese Voraussetzung wird zwischen zwei Tiefenpunkten als erfüllt betrachtet:

$$\vec{I}(\tau) = e^{-\widehat{T(\tau_{ND}-\tau)}}\vec{I}_{ND} + \int_{\tau}^{\tau_{ND}} e^{-\widehat{T(s-\tau)}}\,\vec{S}(s)ds. \tag{9.3}$$

DEFINITION 9.2.1 (DIE MATRIXEXPONENTIALFUNKTION)

$$e^{t\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\hat{A}^n. \tag{9.4}$$

9.2 *Die Matrixexponentialfunktion*

Da das Intervall $[0, \tau_{ND}]$ kompakt ist, konvergiert diese Reihe gleichmäßig (Fischer & Kaul, 1998). Mit Hilfe des Minimalpolynoms des linearen Operators A, das auf den Eigenwerten von A basiert, kann eine Zerlegung der Matrixexponentialfunktion $e^{t\hat{A}}$ in eine endliche Summe gefunden werden. Der große Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass die Matrixexponentialfunktion auf die Multiplikation von wenigen und einfachen Matrizen zurückgeführt werden kann.

SATZ 9.3 (ENDLICHE ZERLEGUNG DER MATRIXEXPONENTIALFUNKTION)
Für $\hat{A} \equiv \hat{T}$ wurde diese Zerlegung von Landi degl'Innocenti (1987) angegeben und von Dittmann (1995) in eine für unsere Zwecke geeignetere Darstellung transformiert:

$$e^{\tau\hat{T}} = \sum_{i=0}^{3} c_i(\tau)\hat{M}^i \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit}\quad c_0(\tau) &= e^{\kappa_I \tau}\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot\left(x^2\cosh(y\tau) - y^2\cosh(x\tau)\right)\\
c_1(\tau) &= e^{\kappa_I \tau}\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot\left(\frac{x^2}{y}\sinh(y\tau) - \frac{y^2}{x}\sinh(x\tau)\right)\\
c_2(\tau) &= e^{\kappa_I \tau}\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot\left(\cosh(x\tau) - \cosh(y\tau)\right)\\
c_3(\tau) &= e^{\kappa_I \tau}\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\sinh(x\tau) - \frac{1}{y}\sinh(y\tau)\right).
\end{aligned} \tag{9.6}$$

DEFINITION 9.3.1 Die einzelnen Koeffizienten sind dabei ($E \equiv$ Einheitsmatrix):

$$\hat{M} = \hat{T} - \kappa_I \hat{E} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\kappa_5^2+\rho_3^2)} \qquad & \rho_3^2 &= \sqrt{\kappa_5^4 + 4(\kappa_Q\rho_W + \kappa_V\rho_r)^2}\\
y &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\kappa_5^2-\rho_3^2)} \qquad & \kappa_5 &= \sqrt{\kappa_Q^2+\kappa_V^2-\rho_R^2-\rho_W^2}.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

ANMERKUNG 9.3.1 Die Eigenwerte der Transportmatrix berechnen sich zu:

$$\lambda_1 = \kappa_I + x \quad \lambda_2 = \kappa_I - x \quad \lambda_3 = \kappa_I + y \quad \lambda_4 = \kappa_I - y. \tag{9.9}$$

ANMERKUNG 9.4 (RECHENREGELN FÜR DIE MATRIXEXPONENTIALFUNKTION) Für konstante und nichtsinguläre Matrizen $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gelten die aus dem skalaren Fall bekannten Beziehungen. Mit $[,]$ wird der Kommutator $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ bezeichnet.

$$\begin{aligned}
e^{\hat{A}\tau}\cdot e^{\hat{B}\tau} &= e^{(\hat{A}+\hat{B})\tau}\\
\int e^{\hat{A}s}ds &= -\hat{A}e^{\hat{A}s}|\\
[\hat{A},\hat{B}] &= [-\hat{A},\hat{B}] = 0.
\end{aligned}$$

9.3 Der Unno-Ansatz

Unno (1956) gab eine Lösung der Transportgleichung für den Fall an, dass die Quellfunktion linear mit der optischen Tiefe variiert, also:

$$\vec{S}(\tau) = (\alpha+\beta\tau)\cdot\vec{1} = (\alpha+\beta\tau)\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{9.10}$$

SATZ 9.5 (DER UNNO ANSATZ ZUR LÖSUNG DER STG FÜR KONSTANTE $\hat{T}$)
Das Integral 9.3 berechnet sich für eine in der Tiefe lineare Quellfunktion zu:

$$\begin{aligned}\vec{I}(\tau) = e^{\widehat{-\hat{T}\tau_{ND}-\tau)}}\,\vec{I}_{ND} - e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}\hat{T}^{-1}\left(\vec{S}(\tau_{ND}) + \beta\,\hat{T}^{-1}\vec{1}\right) \\ + \hat{T}^{-1}(\vec{S}(\tau) + \beta\,\hat{T}^{-1}\vec{1}).\end{aligned} \tag{9.11}$$

BEWEIS 9.5.1

$$\begin{aligned}\vec{I}(\tau) &= e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}\,\vec{I}_{ND} + \int_{\tau}^{\tau_{ND}} e^{\widehat{-\hat{T}(s-\tau)}}\,(\alpha+\beta s)\vec{1}ds \\ &= e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}\,\vec{I}_{ND} + \widehat{e^{\hat{T}\tau}}\,(-\alpha\,\hat{T}^{-1}[\widehat{e^{-\hat{T}\tau_{ND}}} - \widehat{e^{-\hat{T}\tau}}])\vec{1} \\ &\quad + \widehat{e^{\hat{T}\tau}}\,(\beta\,\hat{T}^{-2}[\widehat{e^{-\hat{T}\tau_{ND}}}(-\hat{T}\tau_{ND}-1) - \widehat{e^{-\hat{T}\tau}}(-\hat{T}\tau-1)])\vec{1} \\ &= e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}\,\vec{I}_{ND} + (-\alpha\,\hat{T}^{-1}[e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}} - 1])\vec{1} \\ &\quad + (\beta\,\hat{T}^{-2}[e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}(-\hat{T}\tau_{ND}-1) + (\hat{T}\tau+1)]\vec{1}) \\ &= e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}\,\vec{I}_{ND} - e^{\widehat{-\hat{T}(\tau_{ND}-\tau)}}\hat{T}^{-1}(\alpha+\beta\tau_{ND}+\beta\hat{T}^{-1})\vec{1} \\ &\quad + \hat{T}^{-1}(\alpha+\beta\tau+\beta\hat{T}^{-1})\vec{1}. \qquad \square\end{aligned}$$

DEFINITION 9.5.1 Für die soeben hergeleitete Lösung wird noch die Inverse der Transportmatrix benötigt. Wie die Matrixexponentialfunktion ergibt sich die Inverse aus den Eigenwerten und wurde Dittmann (1995) entnommen:

$$\hat{T}^{-1} = \sum_{i=0}^{3} \frac{d_i}{D}\hat{M}^i \tag{9.12}$$

mit

$$\begin{aligned} d_0 = \kappa_I(\kappa_I^2 - \kappa_5^2) \qquad & d_2 = \kappa_I \\ d_1 = \kappa_5^2 - \kappa_I^2 \qquad & d_3 = 1 \\ D = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4 = \kappa_I^2(\kappa_I^2 - \kappa_5^2) &- (\kappa_Q\rho_W + \kappa_V\rho_R)^2. \end{aligned} \tag{9.13}$$

9.4 Grenzfälle

Für konkrete Rechnungen ist es wichtig, folgende drei Grenzfälle für die magneto-optische Parameter (MOP) näher zu betrachten (siehe Dittmann, 1995; Schmidt, 1997):

9.4.1 Verschwindende magneto-optische Parameter

SATZ 9.6 (DIE KOEFFIZIENTEN c_i IM FALLE VON $\rho_r = \rho_w = 0$)

$$\begin{aligned} c_0 &= e^{\kappa_I \tau} & c_2 &= e^{\kappa_I \tau} \frac{1}{\kappa_5^2} \left(\cosh(\kappa_5 \tau) - 1\right) \\ c_1 &= e^{\kappa_I \tau} \tau & c_3 &= e^{\kappa_I \tau} \frac{1}{\kappa_5^2} \left(\frac{1}{\kappa_5} \sinh(\kappa_5 \tau) - \tau\right). \end{aligned} \tag{9.14}$$

BEWEIS 9.6.1 Für $\rho_r = \rho_w = 0$ ändern sich die Koeffizienten zu:

$$\begin{aligned} x &= \kappa_5 \\ y &= 0 = \sqrt{\kappa_Q^2 + \kappa_V^2} \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\sinh(y\tau)}{y} = \tau. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Einsetzen der neuen Koeffizienten liefert die Behauptung. □

9.4.2 Mit magneto-optischen Parametern

Für den Fall mit magneto-optischen Parametern ist $\rho_3^2 > \kappa_5^2$ (siehe Gl. 9.6) und der Radikant von y wird negativ und y selbst ist eine komplexe Zahl.

SATZ 9.7 (DIE KOEFFIZIENTEN c_i MIT REIN REALWERTIGEN ARGUMENTEN)
Für den Fall nicht verschwindender magneto-optischer Parameter können die Koeffizienten c_i der Matrixexponentialfunktion mit rein realwertigen Argumenten dargestellt werden:

$$\begin{aligned} c_0(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} \cdot \frac{1}{x^2+z^2} \cdot \left(x^2 \cos(z\tau) + z^2 \cos(z\tau)\right) \\ c_1(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} \cdot \frac{1}{x^2+z^2} \cdot \left(\frac{x^2}{z} \sin(z\tau) + \frac{z^2}{x} \sinh(x\tau)\right) \\ c_2(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} \cdot \frac{1}{x^2+z^2} \cdot \left(\cosh(x\tau) - \cos(z\tau)\right) \\ c_3(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} \cdot \frac{1}{x^2+z^2} \cdot \left(\frac{1}{x} \sinh(x\tau) - \frac{1}{z} \sin(z\tau)\right). \end{aligned} \tag{9.16}$$

DEFINITION 9.7.1 Separation von y in einen Real- und einen Imaginärteil:

$$y = iz \qquad z = \frac{1}{2}\sqrt{2(\rho_3^2 - \kappa_5^2)}. \tag{9.17}$$

BEWEIS 9.7.1 Das Einsetzen der folgenden Relationen in (9.6) ergibt die obige Darstellung.

$$\cosh(iz\tau) = \cos(z\tau) \qquad \sinh(iz\tau) = i\sin(z\tau) \qquad i^2 = -1. \qquad \square$$

9.4.3 Sehr hohe magneto-optische Parameter

SATZ 9.8 (DIE KOEFFIZIENTEN c_i IM GRENZWERT HOHER MOPS)
Sind die magneto-optischen Parameter sehr viel größer als die Absorptionskoeffizienten, vereinfachen sich die Koeffizienten c_i der Matrixexponentialfunktion zu:

$$\begin{aligned} c_0(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} & c_2(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (\cosh(x\tau) - 1) \\ c_1(\tau) &= e^{\kappa_I \tau}\, \tau & c_3(\tau) &= e^{\kappa_I \tau} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (\frac{1}{x}\sinh(x\tau) - \tau)). \end{aligned} \tag{9.18}$$

BEWEIS 9.8.1 Einsetzen der Limites für x und y für sehr große ρ_R und ρ_W liefert die Behauptung:

$$\begin{aligned} \kappa_5^4 &\propto \rho^4 \\ \rho_3^2 &= \sqrt{\kappa_5^4 + 4(\kappa_Q \rho_W + \kappa_V \rho_r)^2} \approx \sqrt{\kappa_5^4} = \kappa_5^2 \\ \lim_{\rho/\kappa \to \infty} x &= \kappa_3 \\ \lim_{\rho/\kappa \to \infty} z &= 0 \\ \lim_{y \to 0} \frac{\sinh(y\tau)}{y} &= \tau. \qquad \square \end{aligned}$$

Teil IV

Synthetische Spektren von Neutronensternen

KAPITEL 10

Das aktuelle wissenschaftliche Umfeld

Im ersten Teil dieses Kapitels wird das aktuelle Umfeld von der Seite der Beobachtungen her betrachtet und einige der vielversprechendsten Neutronensterne aufgeführt, in deren Spektrum eine thermische Komponente detektiert wurde. Der zweite Teil gibt einen Einblick in die verschiedenen in der Literatur zu findenden Modelle zur Berechnung synthetischer Neutronensternspektren.

Im nächsten Kapitel wird dann näher auf das in dieser Arbeit verwendete Modell für Neutronensterne und auf die Umsetzung in ein Computermodell eingegangen. Zum Abschluß werden exemplarisch einige synthetische Spektren für einen weiten Parameterbereich gezeigt und diskutiert.

10.1 Thermische Komponenten in beobachteten Spektren

Von der Beobachtungsseite her ist es in den letzten Jahren möglich geworden, thermische Strahlung von Neutronensternen zu beobachten. So haben Becker & Trümper (1997) z.B. in ROSAT und ASCA Beobachtungen der Pulsare PSR 0656+14, Geminga, PSR 1055−52 und wahrscheinlich auch Vela thermische Komponenten feststellen können. Das optische Gegenstück von Geminga konnte zwar gefunden werden (Halpern & Tytler, 1988), allerdings sprechen HST- und Keck-Beobachtungen dafür, dass das thermische Spektrum von einer sehr breiten Zyklotron-Emissionslinie überlagert wird (Martin et al. 1998; Mignani et al. 1998a).

Der Millisekundenpulsar PSR J0437−4715 zeigt in seinem Spektrum ebenfalls eine thermische Komponente. Dank seines relativ geringen Magnetfelds ($B \sim 3 \times 10^8$ Gauß) konnten Pavlov & Zavlin (1997) und Zavlin & Pavlov (1998) sog. Schwachfeld-Atmosphären (siehe Abschnitt 10.2.2) für ihre Analyse verwenden.

Der Nachweis von rein thermischen Spektren gelang erstmals Pavlov et al. (1996a) bei zwei alten Pulsaren PSR B1929+09 und PSR 0950+08 mit Hilfe des HST.

Ein weiterer interessanter Kandidat ist der isolierte Neutronenstern RXJ 1856.5−3754. Er wurde von Walter et al. (1996) als der hellste und wahrscheinlich nächste (Kaplan et al., 2002) INS Kandidat entdeckt. Das sehr schwache ($m_{\rm V} \sim 25,6^{\rm m}$) optische Gegenstück von RXJ 1856.5−3754 konnte von Walter

& Matthews (1997) entdeckt werden. Es ist jedoch nach wie vor unklar, ob es sich um einen radio-leisen Pulsar oder um einen durch Akkretion aufgeheizten alten Neutronenstern handelt. Ein ganze Reihe von Untersuchungen beschäftigen sich mit dessen ROSAT-PSPC[1] (Walter et al. 1996; Campana et al. 1997), Chandra[2] (Burwitz et al., 2001), (Drake et al., 2002), EUVE[3] (Pons et al., 2002) und VLT[4] Spektren (van Kerkwijk & Kulkarni 2001a; van Kerkwijk & Kulkarni 2001b).

Kurz vor Abschluss dieser Arbeit wurde nun zum erstenmal von Sanwal et al. (2002) ein Chandra Spektrum des isolierten Neutronensterns 1E 1207.4−5209 veröffentlicht (Abb. 10.1), in dem, nach Meinung der Autoren, zwei Helium-Absorptionslinen bei einer Magnetfeldstärke von $B \approx 1,5 \times 10^{14}$ Gauß nachgewiesen werden können. In den bis dahin verfügbaren Spektren der Röntgensatelliten ROSAT und ASCA von 1E 1207.4−5209 konnten diese Linien noch nicht detektiert werden (Mereghetti et al. 1996; Vasisht et al. 1997; Zavlin et al. 1998). Dieser Fortschritt verstärkt die Hoffnung, dass mit dieser neuen Generation von Teleskopen tatsächlich der erhoffte Durchbruch in der Beobachtung und Analyse von thermischen Neutronensternspektren erzielt werden kann.

10.2 Modelle für Neutronensternatmosphären

10.2.1 Der Stern als schwarzer Körper

Der einfachste Ansatz ist die Behandlung einer Neutronensternatmosphäre als schwarzer Körper. Derartige Analysen sind in der Literatur nach wie vor stark verbreitet, obwohl allgemein davon ausgegangen wird, dass die abgeleiteten Ergebnisse mit großen Fehlern behaftet sind. Da die Temperatur innerhalb der Atmosphäre stark mit der Tiefe variiert und die Opazität frequenzabhängig ist, sieht man unterschiedliche Temperaturen bei verschiedenen Frequenzen. Daher sollte schon der Verlauf des Kontinuums sich von einem Scharzkörperspektrum unterscheiden. Seine „Berechtigung“ erhält dieser Ansatz einzig durch die immensen Schwierigkeiten bei der Berechnung besserer Modelle. Als entscheidendes Hemmnis kam und kommt teilweise immer noch das Fehlen verläßlicher Atomdaten hinzu.

Vergleicht man diese Situation z.B. mit den sehr detaillierten Berechnungen von Sternatmosphären für Weiße Zwerge, so liegt man auf dem Gebiet der Neutronensternatmosphären um etwa 20 Jahre zurück.

[1] ROSAT-PSPC – ROSAT position sensitive proportional counters
[2] Chandra – Röntgensatellit
[3] EUVE – der „Extreme Ultraviolet Explorer“ Satellit
[4] VLT – „Very Large Telescope“; optisches Großteleskop

10.2.2 Schwachfeld-Atmosphäre

Unter einem schwachen Magnetfeld versteht man bei Neutronensternen Felder zwischen 10^8 und 10^9 Gauß. Diese Felder sind zwar bei weitem stärker als jedes im Labor erzeugte, jedoch liegen die Zyklotron-Energien bei $\sim 1 - 10\,\mathrm{eV}$ und somit weit unterhalb des Röntgenbereichs (Pavlov, 1998).

Erste Modelle für sog. Schwachfeld-Atmosphären wurden von Romani (1987) gerechnet. Anschließende Arbeiten (Rajagopal & Romani 1996; Zavlin et al. 1996) verwendeten verbesserte Opazitäten (Iglesias & Rogers, 1996) für reine Wasserstoff-, Helium- und Eisen-Kompositionen. Diese Arbeiten zeigten, dass synthetische Spektren von Wasserstoff- oder Helium-Atmosphären wesentlich härter, d.h. weniger steil im Vergleich zu Schwarzkörperspektren im Bereich $h\nu \geq kT$ sind. Daher erhält man beim Fit mit einem Schwarzkörperspektrum eine 1,5-3 fach höhere Temperatur, was eine offensichtliche erhebliche Diskrepanz darstellt.

Eine Schwachfeld-Atmosphäre wurden von Pavlov et al. (1996b) sowie Zavlin & Pavlov (1998) zur Analyse des nächstgelegenen ($\mathrm{d} = 180\,\mathrm{pc}$) Schwachfeld-Millisekundenpulsars PSR J0437$-$4715 ($B \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{G}$) herangezogen. Sie gelangten zu dem Schluß, dass die Strahlung von zwei Polkappen mit der Temperatur $\sim 10^6\,\mathrm{K}$ und Radius $\sim 1\,\mathrm{km}$ ausgeht. Pavlov & Zavlin (1997) berücksichtigten dann noch die relativistische Lichtablenkung, wodurch es ihnen gelang, das Masse-Radius Verhältnis des Neutronensterns einzuschränken.

10.2.3 Die erste Generation von magnetischen Wasserstoffatmosphären

Die ersten Modelle magnetischer Wasserstoffatmosphären basieren auf vereinfachten Opazitäten für teilweise ionisierten Wasserstoff in starken Magnetfeldern (siehe Pavlov et al., 1995; Pavlov, 1998, für einen Überblick). Diese Modelle beinhalten Gebunden-frei- und Frei-frei Übergänge sowie die Thomson-Streuung als Opazitätsquelle. Sie berücksichtigen jedoch nicht die Linienübergänge und verwenden ein vereinfachtes Modell für das Ionisationsgleichgewicht.

Diese Modelle wurden mit einem gewissen Erfolg für sehr starke Magnetfelder (bis zu 10^{13} Gauß) im Bereich hoher Temperaturen ($\gtrsim 10^6\,\mathrm{K}$) angewendet, also für fast vollständig ionisierte Atmosphären. Auch diese Modelle zeigten klare Abweichungen vom reinen Schwarzkörperspektrum (Shibanov et al., 1992) sowohl im Verlauf des Kontinuums als auch im Auftreten von Absorptionskanten. Die mit diesen Modellen bestimmten Temperaturen liegen meist um einiges unter denen eines Schwarzkörpers und auch unter den aus theoretischen Abkühlkurven vorhergesagten Temperaturen. Da aber beide Modelle z.T. ähnlich gute Fits erlauben, ist nicht klar, ob diese magnetischen Wasserstoffatmosphären eine gute Beschreibung einer Neutronensternatmosphäre darstellen.

Die Spektren sind desweiteren von dem Winkel zwischen Magnetfeld und Oberflächennormalen abhängig. Diese Anisotropie und die damit verbundenen Pulse eines rotierenden Neutronensterns waren Gegenstand weiterer Untersuchungen (Pavlov et al., 1994).

Die nächsten Entwicklungsschritte bestanden in der Integration der lokalen Spektren über die gesamte Neutronensternoberfläche, um so der Variation des Magnetfeldes oder der Temperatur Rechnung zu tragen (Zavlin et al., 1995).

In jüngster Zeit wird auf dem Gebiet der Wasserstoffatmosphären z.B. auch über die verschiedenen möglichen Zustandsformen von Wasserstoff in der Atmosphäre diskutiert (Lai & Salpeter, 1997); sei es atomar, als langkettige Moleküle oder als kondensiertes Metall.

10.2.4 Modelle mit schweren Elementen

Die ersten Modelle mit Helium, Kohlenstoff und Stickstoff wurden von Miller (1992) berechnet. Sie basieren auf Atomdaten eigener Rechnung (Miller & Neuhauser, 1991), für die der Hartree-Fock Code von Neuhauser et al. (1986) verwendet wurde. Auf Grund der gemachten Annahmen und Näherungen muss jedoch davon ausgegangen werden, dass diese Atomdaten sehr ungenau sind und ihr praktischer Wert unklar ist. Zudem berücksichtigt Miller (1992) in seinen Modellen nur die gebunden-frei Übergänge und mittelt dabei über die verschiedenen Polarisationen.

Im Bereich der Wasserstoff- und Helium Atmosphären gibt es Modelle für starke Magnetfelder ($B \sim 10^{12} - 10^{15}$ Gauß) und hohe Temperaturen ($10^6 - 10^7$ K), die von einer vollständigen Ionisation der Atmosphäre ausgehen Ho & Lai (2001).

Da viele dieser Modelle sich bereits im Ansatz und Schwerpunkt sehr deutlich unterscheiden, ist es recht schwierig, die resultierenden Ergebnisse miteinander zu vergleichen. Dies wird sich erst im Vergleich mit ausreichend detailierten Beobachtungen ändern.

Für Neutronensterne von besonderem Interesse sind Modellatmosphären, die Eisen berücksichtigen (siehe Abschnitt 3.2.3). Das erste derartige Modell wurde von Rajagopal et al. (1997) präsentiert. Sie benützen denselben Code von Neuhauser et al. (1986) für die Berechnung der Atomdaten. Entsprechend vorsichtig sind die Ergebnisse zu bewerten. Die neuesten Arbeiten zum Thema Eisen in Neutronensternatmosphären wurden von Lai (2001), Mori & Hailey (2002) und Braun (2002a) publiziert.

Insgesamt kann gesagt werden, dass eine Diskussion dieser Modelle eine Diskussion der verwendeten Atomdaten darstellt. Insofern sind diese Ansätze nicht zuletzt deshalb als Fortschritt zu bewerten, da sie die Notwendigkeit weiterer Arbeit sowohl auf dem Gebiet der Atomdaten als auch in der Modellbildung nachdrücklich unterstreichen.

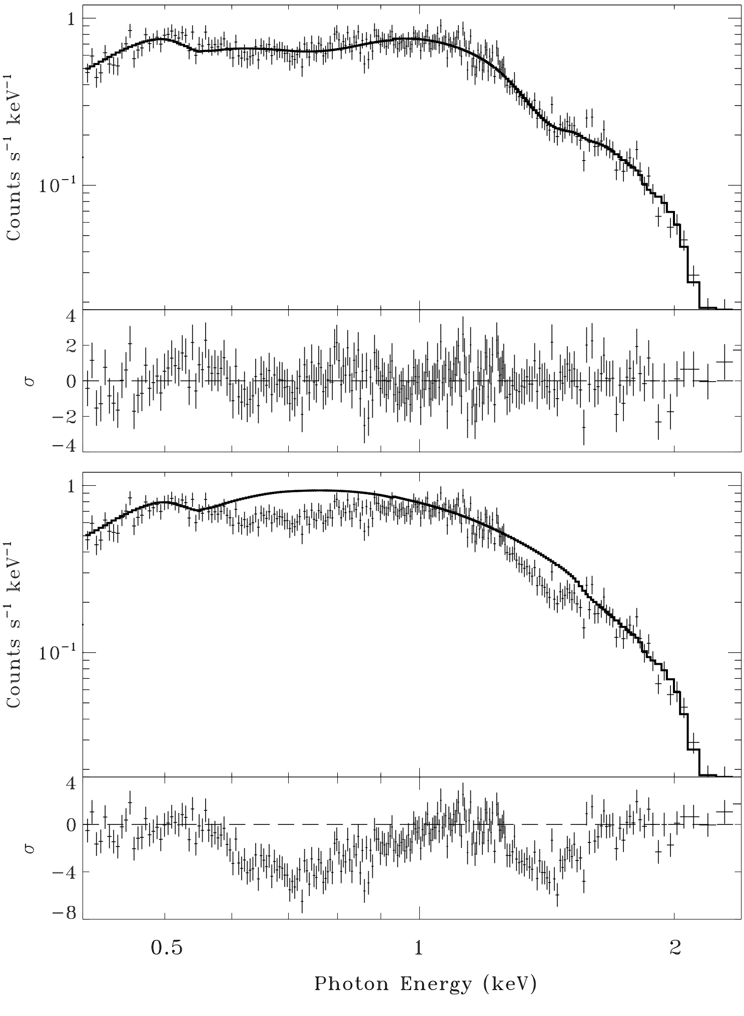


Abbildung 10.1: Erste Detektion zweier Absorptionslinien im Röntgenspektrum von 1E 1207.4−5209. Die obere Abbildung zeigt einen Fit des besten Modells von Sanwal et al. (2002) an die Beobachtung, die darunterliegende das entsprechende Kontinuum-Modell (Quelle: Sanwal et al., 2002).

Kapitel 11

Die Umsetzung in ein Computermodell und dessen Test

Die bisherigen Kapitel dienten der Einführung in das Thema und der Erläuterung der wichtigsten Aspekte des in dieser Arbeit verwendeten Modells zur Berechnung von Neutronensternatmosphären. Diese einzelnen Aspekte gilt es nun in sinnvoller Weise in einem Computermodell zu vereinigen. Die Qualität und physikalische Korrektheit der berechneten synthetischen Spektren und der nummerische Aufwand müssen hierbei jeweils sinnvoll gegeneinander abgewogen werden. Umfangreiche Tests gewährleisten die Korrektheit der Implementierung und dokumentieren das Verhalten und die Auswirkung der in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Verfahren und Ansätze.

11.1 Einführung

Ursprüngliche Idee der Arbeit, Anfang 1999, war es, auf dem im Hause verfügbaren Programm zur Berechnung synthetischer magnetfeldfreier Sternatmosphären PRO2 und MAGWD, einem Programm zur Berechnung von Spektren magnetischer Weißer Zwerge von Stefan Jordan, aufzubauen. Ziel war es, diese Programme vereint auf den Bereich der Neutronensternatmosphären zu erweitern. Da jedoch, entgegen den Erwartungen, die Verwendung von MAGWD durch einen Dritten nicht ermöglicht wurde, musste dieses Ziel im Oktober 2000 fallen gelassen werden. Neues Ziel war nun die Entwicklung einer vollständig neuen Software: PoRTrAIT[1].

11.2 Grundsätzliches zur Entwicklung von PoRTrAIT

11.2.1 Ziele

1. Zunächst musste eine möglichst flexible Datenstruktur für alle Teilaspekte des Programms entwickelt werden. Neben der Flexibilität spielen hierbei die klare Definition von unabhängigen Teilaspekten eine wichtige Rolle. So soll z.B. ein

[1] PoRTrAIT – Polarized Radiation Transport at the Astronomical Institute Tübingen

Wechsel der Magnetfeldgeometrie durch einen Eingriff an einer einzigen Stelle im Programm realisiert werden.

2. Ein klar verständlicher, einheitlicher Programmierstil wurde festgelegt.

3. Zu jedem Zeitpunkt der Entwicklung wurde darauf geachtet, dass rechen- oder speicherplatzintensive Teile des Programms effizient und schnell implementiert wurden.

4. Mit diesem Programm wird z.T. physikalisches Neuland betreten. Die mit dem Programm berechneten Ergebnisse können daher nicht oder nur sehr bedingt, mit bereits publizierten Ergebnissen, oder einfachen Grenzfallüberlegungen verglichen werden (näheres siehe Abschnitt 11.7.5). Es war daher entscheidend, ein Design zu wählen, das ein verifizierbares Testen so vieler Modellaspekte wie möglich erlaubt.

5. Für die Dokumentation der Software innerhalb des Codes wurde eine auf sog. Tags basierte Dokumentationssprache entwickelt. Die zur Extraktion benötigten Scanner, Parser usw. wurden von Eckart Göhler entworfen und bilden die Software AITDOC.

6. Ohne eine sorgfältige Umsetzung der Punkte eins bis fünf ist das gesamte Projekt in Frage gestellt, da man ansonsten Gefahr läuft, zu einem sehr späten Zeitpunkt feststellen zu müssen, dass gewisse Erweiterungen nicht oder nur unter großem Zeitaufwand realisierbar sind; vgl. hierzu die Entwicklung von IrOnIc in Deetjen & Miksa (2002). Desweiteren wäre eine Weiterführung des Projektes durch einen Dritten nicht, oder nur unter großem Zeitaufwand und Fehlerrisiko möglich.

11.2.2 Software Design

Das Design von PORTRAIT ist durch die Theorie der Abstrakten Datentypen (ADT) gekennzeichnet. Die Datenabstraktion ist das Schlüsselkonzept heutiger Softwareentwicklung und sichert das Erreichen der oben gesteckten Ziele (Hathaway 1999; Montlick 1999; O'Neill 1997). Dies bedeutet insbesondere, dass Fortran 90 Module so verwendet werden können, dass viele, wenn auch nicht alle, der Eigenschaften erzielt werden können, die für objektorientiertes Programmieren nötig sind (Brainerd et al. 1994; Ellis et al. 1994). Die wichtigsten Komponenten von PORTRAIT sind in Abb. 11.1 dargestellt und in Abschnitt 11.4 und Kapitel A näher erklärt. Rückblickend hat sich dieses Design durchgehend bewährt.

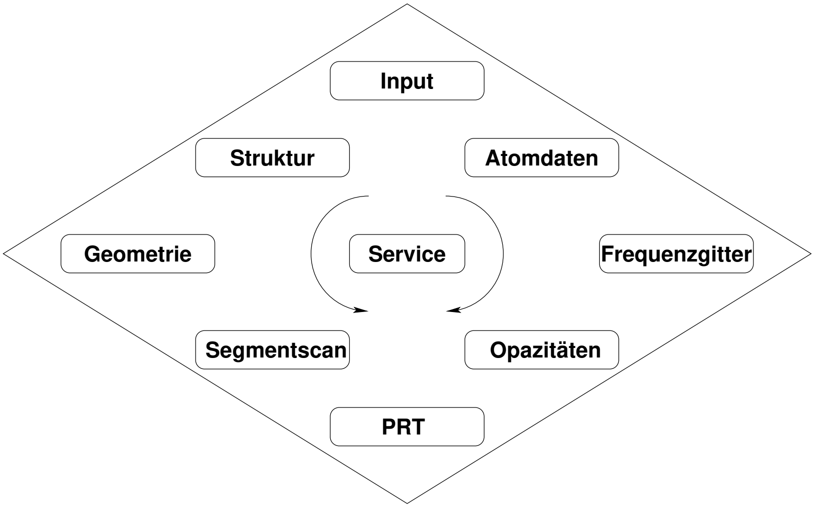


Abbildung 11.1: Die Komponenten der PORTRAIT Software. Nähere Erläuterungen finden sich in Abschnitt 11.4 und Kapitel A.

11.3 Das in dieser Arbeit verwendete Modell

Eine ortsaufgelöste Spektroskopie einer Sternoberfläche ist nur bei der Sonne möglich. Bei einem beobachteten Spektrum handelt es sich also stets um ein über die Oberfläche aufintegriertes Spektrum. Da das Magnetfeld eine Ortsabhängigkeit der Einzelspektren verursacht, muss das synthetische Gesamtspektrum daher analog aus vielen entsprechenden Einzelspektren zusammengesetzt werden. Zu diesem Zweck muß im Modell die Sternoberfläche in viele einzelne Oberflächensegmente diskretisiert werden. Nachfolgend wird daher noch auf einige dieser Aspekte (siehe auch Abb. 11.1) eingegangen, die neben den Opazitäten und dem Strahlungstransport für ein vollständiges Modell wichtig sind.

11.3.1 Die Geometrie

Zur geometrischen Beschreibung der Oberfläche eines Sterns bieten sich drei verschiedene Koordinatensysteme an. Zwei davon sind sternintrinsische Koordinatensysteme. Dies setzt voraus, dass der Stern als Kugel behandelt werden kann und er eine definierte Magnetfeldachse besitzt. Da im Folgenden zentrierte Dipolfelder betrachtet werden, ist dies stets erfüllt. Das dritte Koordinatensystem ist auf den Beobachter zugeschnitten:

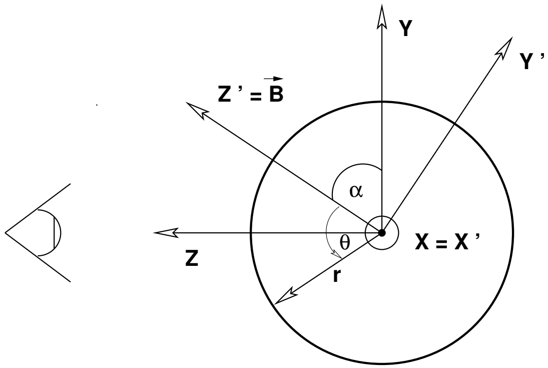


Abbildung 11.2: Das kartesische Koordinatensystem des Sterns (x'y'z' – $\vec{z}' = \vec{B}$) und das des Beobachters (x y z) sowie das Polarkoordinatensystem (r, ϑ, φ).

1. Polarkoordinatensystem (r, ϑ, φ) bezüglich der Magnetfeldachse („north up"). Der Radius des Sterns ist stets auf eins normiert.

2. Kartesisches Koordinatensystem mit z' entlang der Magnetfeldachse und x' senkrecht zur Beobachterrichtung.

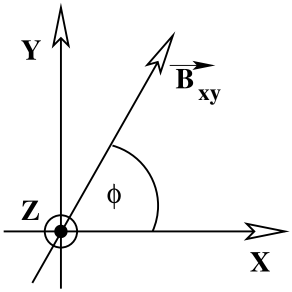
3. Kartesisches Koordinatensystem mit z in Richtung auf den Beobachter und x parallel zu x'.

Als weitere Größe benötigt man den Winkel α, der die Neigung der Magnetfeldachse relativ zur Sichtlinie bezeichnet. Bei $\alpha = 90°$ liegen Beobachterrichtung z und Magnetfeldachse z' parallel und beide kartesische Koordinatensystem werden identisch. Die verwendeten Koordinatensysteme und die relevanten Winkel können den Abbildungen 11.2 und 11.3 entnommen werden.

Die programmtechnische Umsetzung der Geometrie ist so gewählt, dass sie jederzeit auch zur Beschreibung komplexerer Magnetfeldgeometrien (z.B. Quadrupol, verschobener Dipol) verwendet werden kann.

11.3.2 Die Einteilung der Sternoberfläche in Segmente

Die Diskretisierung der Sternoberfläche erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird die Oberfläche zwischen Pol und Äquator in $N_{\text{Bänder}}$ Bänder gleicher Breite eingeteilt (siehe Abb. 11.4). Jedes Band hat dann bei einem typischen Wert von $N_{\text{Bänder}} = 20$ die Breite $\Delta\theta = 90°/N_{\text{Bänder}} = 4{,}5°$. Im zweiten Schritt erfolgt die Einteilung der einzelnen Bänder in ϕ-Richtung. Das den Pol umschließende Band $j = 1$ wird dazu



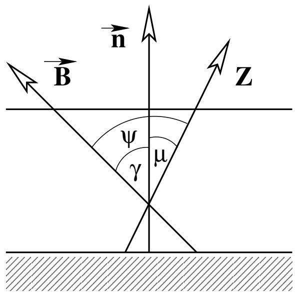


Abbildung 11.3: Die im Modell auftretenden Winkel: ϕ zwischen der Projektion des Magnetfeldvektors $\vec{B}$ auf die xy-Ebene und der x-Achse; $\mu = \cos\theta$ zwischen der Richtung z auf den Beobachter und der Oberflächennormalen $\vec{n}$; γ zwischen $\vec{B}$ und $\vec{n}$; ψ zwischen z-Achse und $\vec{B}$.

in $n_{\phi,1} = 4$ Segmente eingeteilt. Jedes sich anschließende Band j erhält 8 weitere Segmente. Der Abstand in ϕ-Richtung zwischen den Zentren der Segmente eines Bandes beträgt damit $\Delta\phi_j = 360°/n_{\phi,j}$. Die gesamte Oberfläche ist dadurch in $N_{Seg} = 8 \cdot N^2_{\text{Bänder}}$ Segmente eingeteilt. Das Zentrum des i-ten Segmentes im Band j ist gegeben durch:

$$\vartheta_{Seg,ij} = (j - \frac{1}{2}) \cdot \Delta\theta, \tag{11.1}$$

$$\varphi_{Seg,ij} = (i - \frac{1}{2}) \cdot \Delta\phi_j. \tag{11.2}$$

Die Koordinaten der Zentren und die zugehörigen Oberflächennormalen geben die Punkte und Richtungen vor, an denen die Opazitäten berechnet und der polarisierte Strahlungstransport gelöst werden muss.

Die Fläche A_j der Segmente im Band j ergibt sich zu:

$$A_j = \frac{2\pi h}{n_{\phi,j}}, \tag{11.3}$$

wobei h die Höhe des Bandes in z'-Richtung ist. Die Flächen der Segmente eines Breitenbandes sind somit identisch und die Variation über die gesamte Oberfläche ist sehr gering.

Die Aufpunkte sind symmetrisch zur y-Achse gewählt. Diese Geometrie stellt eine gute Approximation der Sternoberfläche dar und es ist gewährleistet, dass kein Oberflächenelement oder keine Richtung der Oberflächennormalen wesentlich stärker als andere gewichtet wird. Zudem hat es den Vorteil, dass pro Breitenband nur einmal die Opazität neu berechnet werden muss. Für zwei spiegelbildlich liegenden Segmente wird der Strahlungstransport nur einmal berechnet; die jeweiligen Einzelspektren erhält man durch Rotation um ϕ bzw. $-\phi$ (vgl. Satz 7.2).

Zur Berechnung des beim Beobachter ankommenden Flusses müssen die Einzelspektren mit der auf eine Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung projizierten Fläche des jeweiligen Segmentes gewichtet werden.

11.3.3 Die Magnetfeldkonfiguration

Die Struktur eines Magnetfeldes kann durch eine Entwicklung in Multipole sinnvoll charakterisiert werden (siehe z.B. Jackson, 1999). Für den Dipolanteil sind die Komponenten in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} B_r &= B_p \cos\vartheta & \qquad B_\vartheta &= -\frac{1}{2} B_p \sin\vartheta \\ B_\varphi &= 0 & B^2 &= \frac{1}{r^6} B_p^2 \left(4\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Dabei ist B_p die polare Feldstärke. Um die Zahl der freien Parameter in Grenzen zu halten, geht man zunächst von einem reinen Dipolfeld aus. Als nächster Schritt kann ein Quadrupolmoment oder eine Verschiebung der Dipolachse aus dem Sternmittelpunkt heraus hinzugenommen werden.

Eine Variation des Magnetfeldes über die Tiefe der Sternatmosphäre muss nicht berücksichtigt werden, da diese sehr klein im Vergleich zum Sternradius ist.

Für jedes einzelne Flächenelement wird neben der mittleren Feldstärke $\bar{B}$ auch die Standardabweichung ΔB berechnet, um so ein Maß für die Variation des Magnetfeldes über das einzelne Flächenelement zu erhalten. Die Standardabweichung dient dazu, mit weniger Flächenelementen auszukommen und wird bei der Berechnung der Absorptionskoeffizienten und magneto-optischen Parameter verwendet (siehe Kapitel 5).

11.3.4 Die Effektivtemperatur

Nichtmagnetische Sternatmosphären werden durch eine globale Effektivtemperatur charakterisiert. In Anwesenheit starker Magnetfelder kann jedoch, wie in Abschnitt 3.2.5 diskutiert, die Effektivtemperatur eine Funktion vom Ort auf der Sternoberfläche werden.

Die entwickelte Software ist daher in der Lage, beliebige ortsabhängige Effektivtemperaturen zu simulieren. Mangels eines physikalisch gesicherten Modells für die Verteilungsfunktion und angesichts der dadurch ansteigenden Zahl freier Parameter ist jedoch unklar, ob die Berücksichtigung dieses Effektes zum jetzigen Zeitpunkt eine Verbesserung des Modells darstellen würde. In den nachfolgenden Modellrechnungen wird daher davon abgesehen.

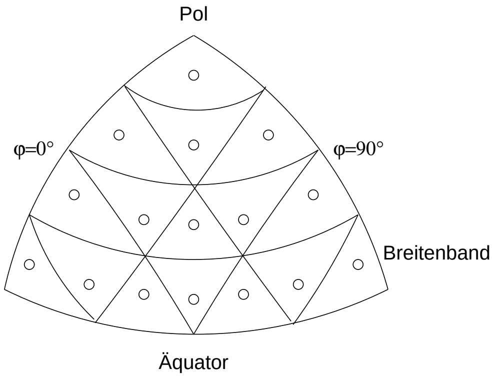


Abbildung 11.4: Einteilung der Neutronensternoberfläche in Segmente: die Abbildung zeigt ein achtel einer Kugeloberfläche. In diesem Beispiel wird jede Hemisphäre zunächst in vier Bänder gleicher Breite $\Delta\vartheta$ eingeteilt und in der dargestellten Weise mit Dreiecken gleicher Fläche unterteilt. $\circ$ markiert den Aufpunkt jedes Segmentes.

11.3.5 Das Frequenzgitter

Das ideale Frequenzgitter sollte zwei diametrale Eigenschaften in sich vereinen. Erstens sollte es klein sein, um Rechenzeit zu sparen. Zweitens sollten die Frequenzpunkte so dicht liegen, dass selbst die schmalste Spektrallinie noch korrekt wiedergegeben wird. Die Verschiebung der Wellenlänge der einzelnen Linien mit dem über die Oberfläche variierenden Magnetfeld verschärft dieses Problem noch.

In dieser Arbeit wurde folgende Lösung gewählt:

1. Zur Abdeckung des Kontinuums wird ein grobes äquidistantes Frequenzgitter erzeugt.

2. Für alle in der Simulation auftretenden Magnetfeldstärken werden die Zentren sämtlicher Linien ermittelt. Im Abstand Δ_{core} um die Linienkerne wird ein sehr dichtes Frequenzgitter erzeugt, zu dem ein weniger dichtes Gitter im Bereich der Flügel hinzukommt (Δ_{wing}). Anschließend können all diejenigen Punkte herausgenommen werden, die einen Abstand von weniger als Δ_{core} bzw. Δ_{wing} zu ihrem linken und rechten Nachbarpunkt besitzen.

3. Um die Absorptionskanten in den Spektren korrekt wiedergeben zu können, wird ein zu 2. analoges Verfahren angewendet.

4. Die Synthese dieser drei Gitter ergibt das verwendete Frequenzgitter.

Innerhalb des Modells wird durchgehend mit Frequenzen ν und den entsprechenden Intensitäten I_ν gearbeitet. Die Darstellung der Spektren erfolgt jedoch in Wellenlängen. Es gilt die Umrechnung:

$$I_\lambda = \frac{\nu^2}{c} \cdot I_\nu. \tag{11.5}$$

11.3.6 Die Struktur der Atmosphäre

Das in dieser Arbeit verwendete Modell verwendet ein Nullfeldatmosphäre, wie sie in Abschnitt 6.4.2 beschrieben wird. Für jede in der Simulation später auftretende Effektivtemperatur muss zuvor eine eigene Nullfeldatmosphäre berechnet werden; $\log g$ bleibt dabei gleich. Es handelt sich dabei um eine NLTE Wasserstoffatmosphäre, die mit der Software von K. Werner, T. Rauch und S. Dreizler berechnet wird (z.B. Werner & Dreizler, 1999).

11.3.7 Die Gravitationsrotverschiebung

Unter der Gravitationsrotverschiebung versteht man eine Wellenlängenvergrößerung von Strahlung in Regionen mit hohen Gravitationsfeldstärken. Photonen besitzen gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie eine zu ihrer Energie äquivalente Masse ($E = mc^2$). Um aus dem Gravitationsfeld eines Sterns entweichen zu können müssen sie „Arbeit verrichten" und erleiden dadurch einen Energieverlust:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{GM}{c^2 R} \tag{11.6}$$

Für einen typischen Neutronenstern gilt $z \approx 0,2$. Innerhalb der Sternatmosphäre mit einer typischen Dicke von 10 mm spielt dieser Effekt keine Rolle. Für einen Vergleich mit Beobachtungen werden die berechneten Spektren zum Schluss noch gemäß Gl. 11.6 rotverschoben.

11.4 Vereinfachter Ablauf des Gesamtprogramms

In diesem Abschnitt wird skizziert, in welcher Weise die in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Teilaspekte zu einem Ganzen verbunden wurden. Einen guten ersten Eindruck davon vermittelt Abb. 11.5. Eine detaillierte Ausführung zu den wichtigsten Komponenten der Software und ihre Verknüpfung mit den vorherigen Kapiteln findet sich in Kapitel A und der „PORTRAIT Interface Documentation" (Deetjen, 2002).

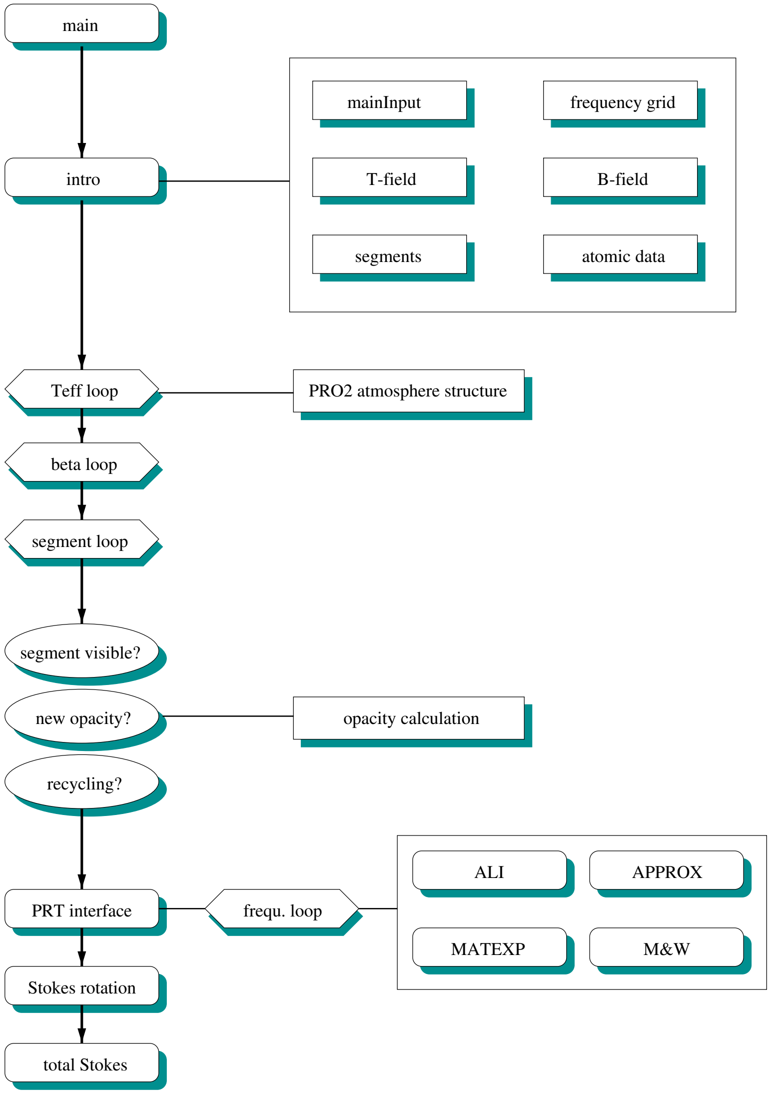


Abbildung 11.5: Ablaufplan des entwickelten Computerprogramms PORTRAIT. Nähere Erläuterungen finden sich in Abschnitt 11.4 und Kapitel A.

1. Der erste Teil des Gesamtprogramms ist durch das Instanzieren der relevanten Datenobjekte gekennzeichnet. Gesteuert von einem Eingabefile, wird eine Oberflächengeometrie erzeugt, auf die die Magnetfeld- und Temperaturverteilung der Wahl abgebildet wird. Die zu verwendenden Atomdaten werden eingelesen mit den Faktoren C_{stark} (vgl. Gl. 5.9) multipliziert und für alle in diesem Modell auftretenden Magnetfeldstärken interpoliert. Diese Atomdaten sind dann Ausgangspunkt für die Berechnung des globalen Frequenzgitters in der gewünschten Auflösung.

2. Der zweite Teil dient der Steuerung der Berechnung eines Spektrums für jedes einzelne Segment. Die Opazitäten müssen nur dann neu berechnet werden, wenn sich der Betrag der Magnetfeldstärke oder die Effektivtemperatur und somit die Besetzungszahlen geändert haben. Ziel der Steuerung ist eine optimale Sortierung der Reihenfolge der zu berechnenden Segmente. Zugleich wird hier geprüft, ob durch eine einfache Koordinatentransformation die Ergebnisse zweier Segmente ineinander überführt werden können.

3. Die Bereitstellung aller segmentabhängigen Daten, wie z.B. Atmosphärenstruktur und Opazitäten, ist Aufgabe des dritten Teils der Software.

4. Der vierte Teil dient als Schnittstelle für die Berechnung eines Spektrums eines einzelnen Segments mit dem gewünschten Lösungsalgorithmus.

5. Im letzten Teil werden die Einzelspektren vom lokalen in das globale Koordinatensystem transformiert, aufaddiert und dargestellt.

11.5 Umfang des Programmes

Grundlage des Programms PORTRAIT ist eine Objekt-Bibliothek von 30 Objekten. Individuelle Instanzen dieser Objekte werden im Programm selbst miteinander verknüpft und bilden so das gewünschte Computermodell von Neutronensternatmosphären. In diesen Objekten werden insgesamt 22 abstrakte Datentypen, 239 Methoden in Form von 123 Prozeduren und 116 Funktionen sowie 64 überladene Operatoren definiert. Das Programm und die Objekt-Bibliothek umfassen ca. 31 000 Zeilen ($\approx$ 650 Seiten), einschließlich rund 15 000 Zeilen ($\approx$ 320 Seiten) Kommentar.

Eine Kurzdokumentation von PORTRAIT findet sich in Anhang A. Die detaillierte Struktur der entwickelten Software ist in der „PORTRAIT Interface Documentation“ (Deetjen, 2002) nachzulesen, die in ihrer aktuellen Version 151 Seiten umfasst.

11.6 Die Rechenzeit als kritische Randbedingung

11.6.1 Einführung

Die Gesamtrechenzeit ergibt sich in etwa aus dem Produkt der Zahl der sichtbaren Segmente (1 600 bei 20 Bändern; vgl. Abschnitt 11.3.1), für die ein neues Einzelspektrum berechnet wird und der Zahl Frequenzpunkte (typischerweise 5 000 bis 10 000) sowie der für jeden Frequenzpunkt durchschnittlich benötigten Rechenzeit für den polarisierten Strahlungstransport durch 50 bis 100 Tiefenpunkte. Die Zeit für die Berechnung der Opazitäten ist dabei noch nicht eingerechnet. Für die Analyse eines beobachteten Spektrums muss ein ganzer Satz synthetischer Spektren berechnet werden. Werden für T_{eff} , $\log g$, Magnetfeldstärke und Neigungswinkel des Magnetfeldes jeweils drei verschiedene Werte angenommen, ergibt sich eine Gesamtzahl von 81 Simulationen.

Es ist folglich von hoher Relevanz: *erstens* die Zahl der Segmente, für die ein neues Einzelspektrum berechnet werden muss, so gering wie möglich zu halten; *zweitens* die Zahl der benötigten Frequenzpunkte ohne Auswirkung auf das Ergebnis zu reduzieren; *drittens* einen sehr schnellen Algorithmus für den polarisierten Strahlungstransport zu finden und *viertens* alle zeitkritischen Module der Software sehr effizient zu implementieren.

11.6.2 Overhead

Auf Grund dieser Überlegungen war die Rechenzeit von Beginn an eine kritische Randbedingung bei der Entwicklung und Umsetzung des Computermodells. Das nun vorliegende Programm ist klar strukturiert und basiert, wie beschrieben, auf einer Vielzahl individueller, übersichtlicher abstrakter Datentypen. Trotzdem sind, entgegen den Befürchtungen, keine Abstriche im Hinblick auf den effizienten Umgang mit Rechenzeit oder Speicherplatz zu verzeichnen. So werden z.B. für die Abarbeitung des gesamten Overhead, d.h. der gesamten Datenhandhabung und der logischen Programmablaufsteuerung ohne die eigentliche Opazitäts- und Strahlungstransport-Rechnung, nur wenige Sekunden benötigt. Es spricht also nichts dagegen, auch für physikalische Simulationen Programmieransätze zu verwenden, die auf der Theorie der Abstrakten Datentypen basieren.

11.6.3 Die rechenzeit-intensivsten Routinen

Der größte Teil der Rechenzeit wird für die Berechnung der Opazitäten benötigt. Der Aufruf der Voigt-Funktion (vgl. Gl. 5.13) für jede Linie an jedem Frequenzpunkt ist hier der ausschlaggebende Faktor. Es wurde daher viel Zeit darauf verwendet, verschiedenste nummerische Ansätze zur schnellen Berechnung der Voigt-Funktion zu testen und zu verifizieren (vgl. Abschnitt 5.3.3). Die restliche Rechenzeit wird für die Lösung des polarisierten Strahlungstransports an jedem Frequenzpunkt benötigt.

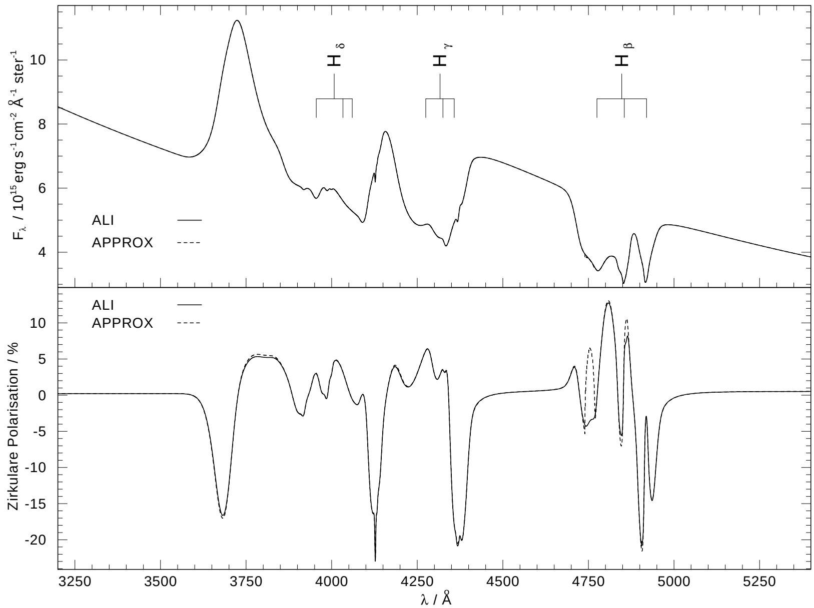


Abbildung 11.6: Vergleich der Ergebnisse für den Fluß F_λ und die zirkulare Polarisation r_c der zwei am stärksten voneinander abweichenden Algorithmen zur Berechnung des polarisierten Strahlungstransports. Modell: $T_{\mathrm{eff}} = 16\,000$ K, log $g = 8{,}0$.

Die ALI-Lösung (vgl. Kapitel 8) erweist sich hier zunächst als wesentlich langsamer als die MATEXP Lösung (vgl. Kapitel 9), dies liegt jedoch im Wesentlichen daran, dass bei dem iterativen ALI-Verfahren erst nach Erreichen einer stabilen Lösung für alle Tiefenpunkte abgebrochen wird.

11.6.4 Ausblick

Die vollständige Berechnung der Struktur der Atmosphäre für jedes Segment, wie in Abschnitt 6.4.2 diskutiert, muss vor dem Hintergrund dieser Überlegungen daher schon aus Rechenzeitgründen momentan vielleicht als machbar aber in praxi zumindestens als sehr aufwändig angesehen werden. Diese Aufgabe kann jedoch durch noch schnellere Computer oder durch paralleles Berechnen der Einzelspektren gelöst werden.

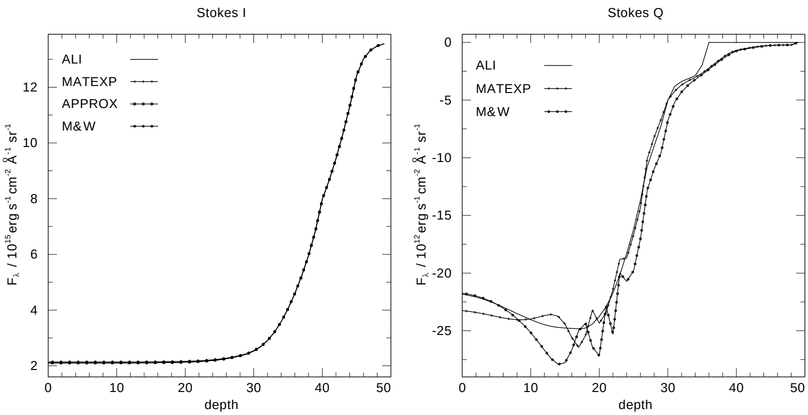


Abbildung 11.7: Tiefenabhängige Unterschiede in den Ergebnissen der verschiedenen Strahlungstransportmethoden. Dargestellt ist ein typisches Resultat in einem Linienkern (r-Komponente von H_β) für alle 50 Tiefenpunkte (x-Achse). Die ALI-Methode erzielt hier stets als einzige einen glatten Verlauf über alle Tiefenpunkte. Eine Einbeziehung des Resultats der APPROX-Methode beim Vergleich von Stokes Q ist nicht sinnvoll, da bei dieser Methode Stokes U stets auf 0 gesetzt wird und Q_{approx} somit mit $\sqrt{Q^2+U^2}$ zu vergleichen wäre.

11.7 Verifikation und Tests

Der zeitaufwändigste Teil bei der Entwicklung einer umfangreichen Software ist in der Regel die Verifikations- und Testphase. Design und Implementierung benötigen dagegen weniger Zeit. Ein die Verifikations- und Testphase mitberücksichtigendes, sorgfältiges Design kann daher zu einer starken Verkürzung der Gesamtentwicklungszeit führen.

11.7.1 SDF-Tools

Um möglichst schnell, effizient und konzentriert die einzelnen Bestandteile des Programms verifizieren und testen zu können, wurde eigens ein neuer Datentyp mit der dazugehörigen Visualisierungssoftware „SDF-Tools“ in IDL entwickelt. Dies hat sich im nachhinein als sehr hilfreich und zeitsparend erwiesen.

11.7.2 Verifikation der Einzelobjekte

Das objektorientierte Design von PORTRAIT ermöglichte schon während der Implementierung der Einzelobjekte, diese einzeln zu testen und zu verifizieren. So konnten z.B. die gesamte Datenstruktur und die darauf operierenden Methoden der in Abschnitt 11.4 aufgeführten Teile eins und zwei einzeln in einer separaten Testumgebung getestet werden. Gemäß der Theorie der Abstrakten Datentypen kann dadurch z.B. gewährleistet werden, dass eine Koordinatentransformation oder die Handhabung der Atomdaten korrekt funktionieren. Bei der Synthese der Einzelobjekte können dadurch weiterhin im Prinzip nur noch Fehler auftreten, die durch eine fehlerhafte Verwendung verursacht werden.

11.7.3 Test der Opazitätsberechnungen

Die Tests der Objekte für die Opazitätsberechnung in Teil drei des Programmes gestalten sich schwieriger, da deren Gesamtergebnis nur schwer verifizierbar oder falsifizierbar ist. Es wurden daher zunächst alle Objekte getestet, die verifizierbare Einzelbausteine für die Opazitätsberechnung darstellen. Hierzu gehören z.B. die Voigt- und die Fehlerfunktion. Die Implementierung der eigentlichen Opazitätsberechnung wurde dann besonders sorgfältig auf seine Korrektheit hin überprüft.

11.7.4 Verifikation der Strahlungstransportroutinen

Die Verifikation der Strahlungstransportroutinen und der damit verbundenen Objekten erfolgte hauptsächlich durch den gegenseitigen Vergleich der mit den völlig voneinander unabhängigen Lösungsmethoden ALI, MATEXP, APPROX und M&W berechneten Spektren. Hinzu kam die Überprüfung einzelner Vektoren und Matrizen in diesen Algorithmen. Die Abbildungen 11.7 und 11.6 zeigen einen frequenz- und einen tiefenabhängigen Vergleich der Resultate der verschiedenen Methoden.

Ein Vergleich meiner Implementierung der ALI- und APPROX-Methode mit denen von Jordan ergab eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse der APPROX-Methode mit meinen Ergebnissen. Die ALI-Implementierung von Jordan stimmte in großen optischen Tiefen mit meinen Ergebnissen überein, versagte jedoch völlig bei kleinen optischen Tiefen.

11.7.5 Vergleich mit Ergebnissen von Jordan

Als Test des gesamten Programms wurden Spektren einzelner Segmente mit Ergebnissen, die Stefan Jordan freundlicherweise zur Verfügung stellte, verglichen. Diese Tests erwiesen sich jedoch als recht schwierig und ineffizient, da sich die Programme in ihrem Design, ihrer Handhabung und vielen methodischen Details, z.B. Behandlung der Kantenopazitäten, unterscheiden. Insgesamt konnte eine gute Übereinstimmung in den Spektren von Stokes I erzielt werden. Die zirkulare Polarisation stimmt in der Größenordnung, jedoch nicht im Detail, überein. Dies liegt sicherlich mit an der sensiblen Reaktion des polarisierten Strahlungstransports schon auf leicht veränderte Eingangsgrößen im Hinblick auf die lineare und zirkulare Polarisation.

KAPITEL 12

Ein exemplarisches Gitter synthetischer Spektren

12.1 Die Wahl des Gitters

Schwerpunkt der nun folgenden Darstellung synthetischer Spektren ist die Studie des von der Gesamtoberfläche emittierten Flusses. Die Erfahrung bei der Analyse von Weißen Zwergen hat gezeigt, dass dies die am genausten berechenbare Größe ist. Der Parameterraum wurde derart gewählt, dass vom kühlen magnetischen Weißen Zwerg bis hin zum heißen Neutronenstern mit sehr hohem Magnetfeld alles exemplarisch abgedeckt wird. Die Verteilung in der T_{eff} -B Ebene zeigt Abb. 12.1.

12.2 Beschreibung der Abbildungen

Die Abbildungen 12.7 bis 12.16 zeigen die Auswirkungen einer Variation der Effektivtemperatur bei zwei Modellen mit unterschiedlichem log g (log g =14,39 und log g =8,0) für sieben verschiedene Magnetfeldstärken (10^7–10^{12} Gauß). Die dargestellten Spektren wurden nicht rotverschoben.

Als modellintrinsische Parameter kommen $\alpha = 0°$, $N_{\mathrm{Bänder}}$ =20 und C_{stark} =0,1 hinzu. Es wurde $\alpha = 0°$ gewählt, d.h. die Magnetfeldachse liegt senkrecht zum Beobachter, da dann etwa vorhandene Linien, aufgrund des schwächeren Feldes am Äquator, noch am besten hervortreten (vgl. Abb. 12.3 und 12.4). Zudem ist es die Position, in der die Beiträge der einzelnen Segmente unterschiedlicher Feldstärke am gleichmäßigsten berücksichtigt werden (vgl. Abb. 12.2).

Die Wahl von 20 Breitenbändern vermeidet das Auftreten von Fehlern, die durch eine zu grobe Diskretisierung der Sternoberfläche verursacht werden (siehe Abschnitt 11.3.2). Diese möglichen Fehler werden in Abb. 12.5 gezeigt.

Der Wahl von C_{stark} =0,1 und $\bar{n}_k = 1,0$ für alle Linien liegt (vgl. Gl. 5.9) natürlich zunächst eine gewisse Willkür zu Grunde; der hier gewählte Wert liegt am unteren Rand des zu erwartenden Wertebereichs. Die Auswirkung unterschiedlicher Faktoren C_{stark} auf die Spektren wird in Abb. 12.6 demonstriert.

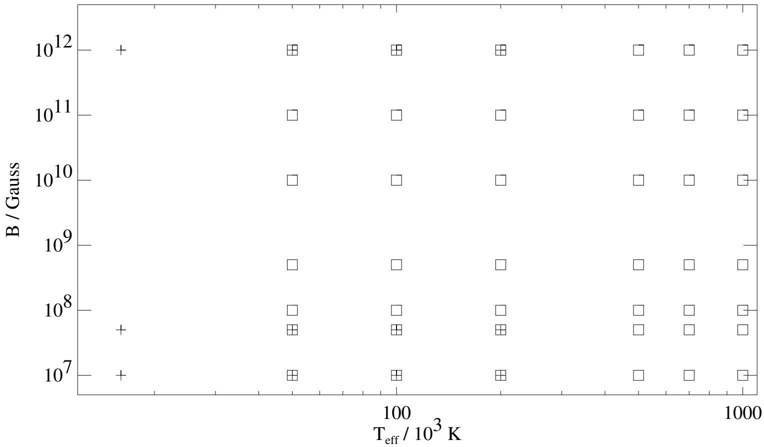


Abbildung 12.1: Gitter der berechneten synthetischen Spektren. Modelle: □: $\log g = 14{,}39$; $+$: $\log g = 8{,}0$; $C_{\rm stark} = 0{,}1$, $\alpha = 0°$, $N_{\rm Bänder} = 20$ (doppeltlogarithmische Skala).

Als genereller Trend kann, wie erwartet, in allen Abbildungen beobachtet werden, dass mit zunehmender Temperatur die Tiefe der Linien immer mehr abnimmt. Dies liegt an der mit der Temperatur zunehmenden Ionisation des neutralen Wasserstoffs in der Atmosphäre (siehe Abb. 6.2). Die Verbreiterung nimmt gleichfalls zu, wenn für eine Temperatur die Magnetfeldstärke erhöht wird. Hinzu kommt in diesem Fall die Verschiebung der Linienposition mit dem Magnetfeld zu kleineren Wellenlängen. Für alle Fälle gilt, dass das Modell mit dem höheren $\log g$ wesentlich stärker verbreiterte Linien zeigt.

Den Abschluß bilden zwei exemplarische Darstellungen des Verlaufs der zirkularen Polarisation bei hohen (Abb. 12.17) und mittleren Feldstärken (Abb. 12.18).

In einigen Abbildungen sind kleine „Emissionspeaks“ zu sehen. Diese rühren sehr wahrscheinlich von nummerischen Problemen her.

12.3 *Schlußfolgerungen*

Wie in Teil I ausgeführt erwartet man für einen typischen alten isolierten Neutronenstern ungefähr folgende stellare Parameter: $T_{\rm eff} \approx 200\,000$ K; $\log g \approx 14{,}39$, was einem Radius von ungefähr 10 km entspricht; und $B_0 \approx 10^{11}$ Gauß.

Betrachtet man die entsprechenden synthetischen Spektren Abb. 12.13, 12.14 und

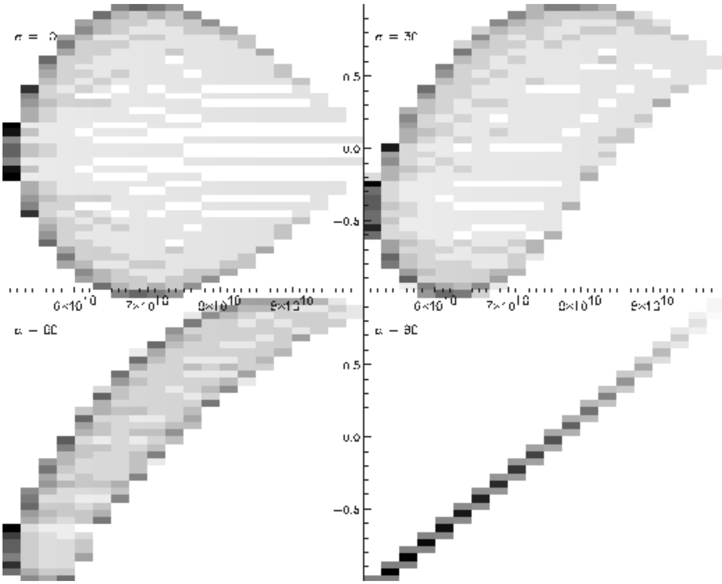


Abbildung 12.2: Sog. ZEBRA-Plot eines typischen Neutronenstern-Dipol-Modells für vier verschiedene Winkel α. Modell: T_{eff} =500 000 K; log $g = 14{,}39$; $B_0 = 10^{11}$ Gauß; $C_{\mathrm{stark}} = 0{,}1$; $N_{\mathrm{Bänder}} = 20$. In einem Zebra-Plot wird für jedes sichtbare Oberflächensegment das Datenpaar $(|B_{seg}|, \cos(\psi_{seg}))$, gewichtet mit seinem Beitrag zur Gesamtfläche (Grauwert), dargestellt. Der Begriff ZEBRA steht für „ZEeman BRoadening Analysis“ und wurde von Donati et al. (1994) eingeführt. Eine ausführliche Anwendung dieser Analysetechnik auf dem Gebiet der Weißen Zwergen findet sich in Euchner et al. (2002).

12.15, so fällt sofort auf, dass die Linien sehr flach und breit sind und fast schon im Kontinuum verschwinden. Dieser Eindruck verschärft sich, wenn die Neutronensternachse zum Beobachter verkippt ist ($\alpha > 0°$) oder die Starkverbreiterung stärker als hier angenommen ist. Für eine zukünftige Analyse kommt erschwerend hinzu, dass nicht nur die Breite der Linien, sondern auch die Variation ihrer Positionen mit der zunächst unbekannten Magnetfeldstärke ein Spektrum mit hohem Signal-zu-Rausch-Verhältnis über einen weiten Bereich von z.B. 10–7000 Å erfordert.

Es steht also zu erwarten, dass sich die praktische Analyse von Spektren von Neutronensternatmosphären als sehr schwierig erweisen wird. Erste mit Chandra gemessene Spektren der isolierten Neutronensterne RX J1856.5-3754 und 1E 1207.4-5209 weisen bereits in diese Richtung (Burwitz et al. 2001; Drake et al. 2002; Sanwal et al. 2002).

12.4 Variation von modellintrinsischen Parametern

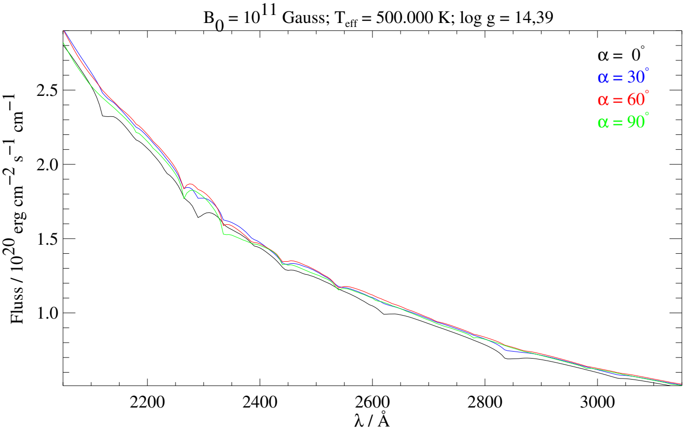


Abbildung 12.3: Vergleich der Auswirkung unterschiedlicher Winkel α auf die Spektren I. Modell: $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; die Spektren wurden bei $x_{\text{norm}} = 10\,000$ Å aufeinander normiert.

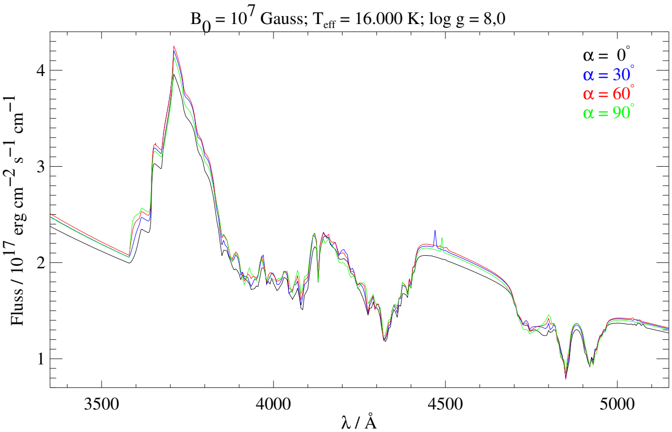


Abbildung 12.4: Vergleich der Auswirkung unterschiedlicher Winkel α auf die Spektren II. Modell: $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $x_{\text{norm}} = 7\,800$ Å. Zu sehen sind die in drei Komponenten aufgespaltene und verbreiterte Balmer-Kante bei 3700 Å, sowie die aufgespaltenen und verschobenen Linien der Balmer Serie ab H_β.

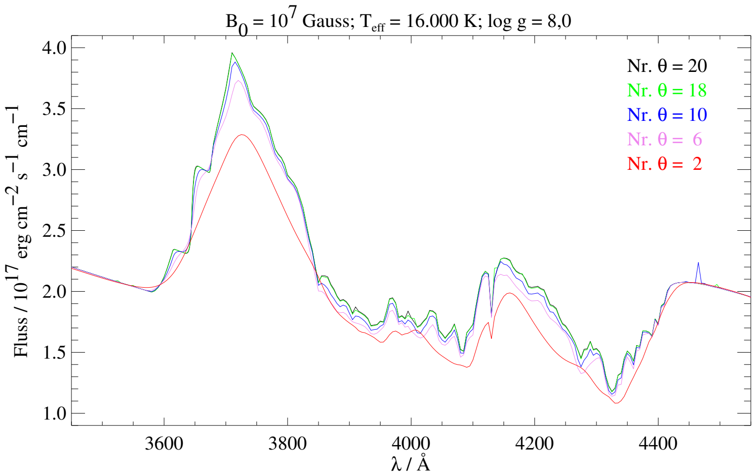


Abbildung 12.5: Vergleich der Auswirkung einer unterschiedlichen Anzahl an Bändern $N_{\text{Bänder}}$ auf die Spektren. Modell: $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $\alpha = 0°$; $x_{\text{norm}} = 6\,000$ Å.

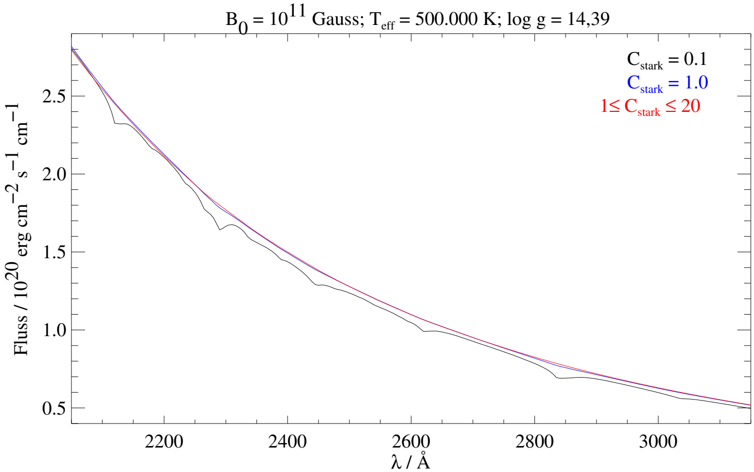


Abbildung 12.6: Vergleich der Auswirkung unterschiedlicher Faktoren für die Starkverbreiterung C_{stark} (vgl. Gl. 5.9) auf die Spektren. Die für das rote Spektrum verwendeten Faktoren C_{stark} entsprechen den von Jordan (priv. Komm.) für Weiße Zwerge verwendeten; Modell: $\alpha = 0°$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $x_{\text{norm}} = 10\,000$ Å.

12.5 Die synthetischen Spektren

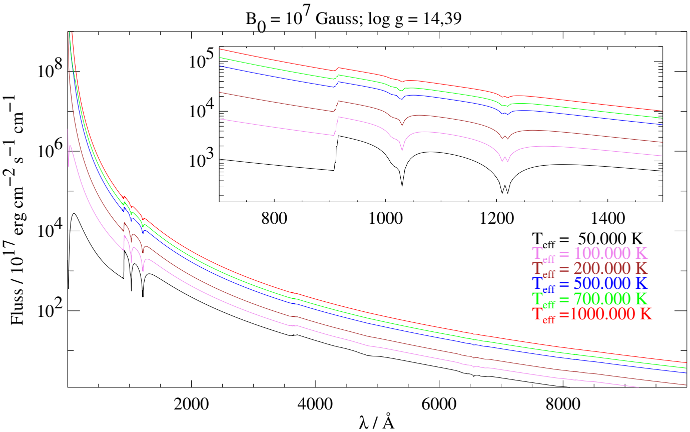


Abbildung 12.7: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^7$. Modell: $\log g = 14{,}39$; $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

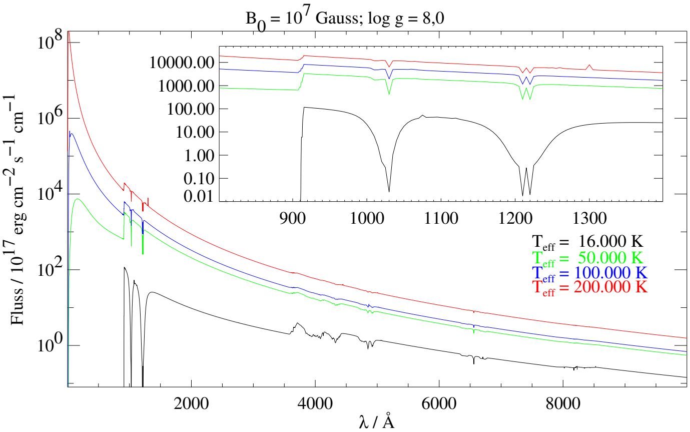


Abbildung 12.8: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^7$. Modell: $\log g = 8{,}0$; $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse). Zu sehen sind die in drei Komponenten aufgespaltene und verbreiterte Lyman- und Balmer-Kante bei 911 und 3700 Å. Im herausvergrößerten Bereich sieht man $Ly\alpha$ und $Ly\beta$. Höhere Mitglieder der Lyman-Serie sind in den Atomdaten nicht enthalten.

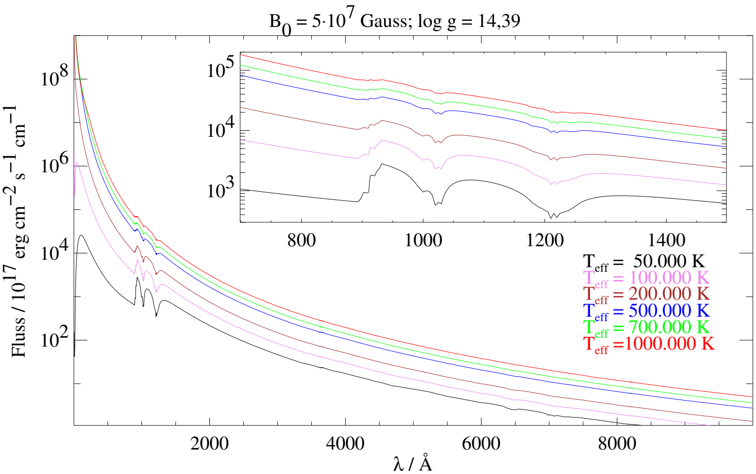


Abbildung 12.9: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 5 \cdot 10^7$. Modell: $\log g = 14{,}39$; $C_{\mathrm{stark}} = 0{,}1$; $N_{\mathrm{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

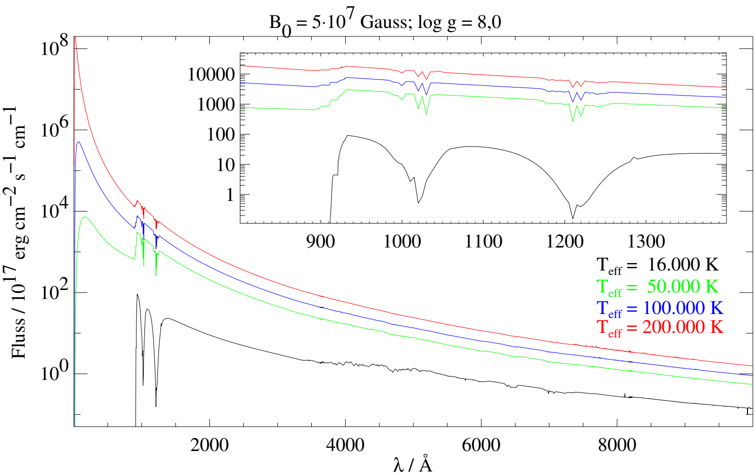


Abbildung 12.10: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 5 \cdot 10^7$. Modell: $\log g = 8{,}0$; $C_{\mathrm{stark}} = 0{,}1$; $N_{\mathrm{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

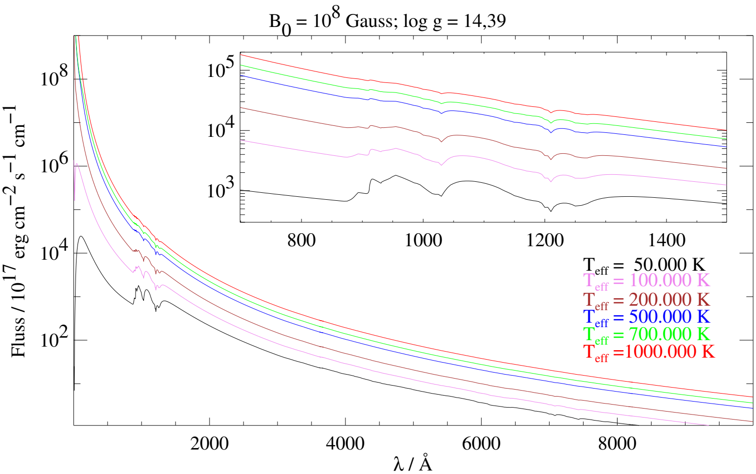


Abbildung 12.11: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^8$. Modell: log $g = 14{,}39$; $C_{stark} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

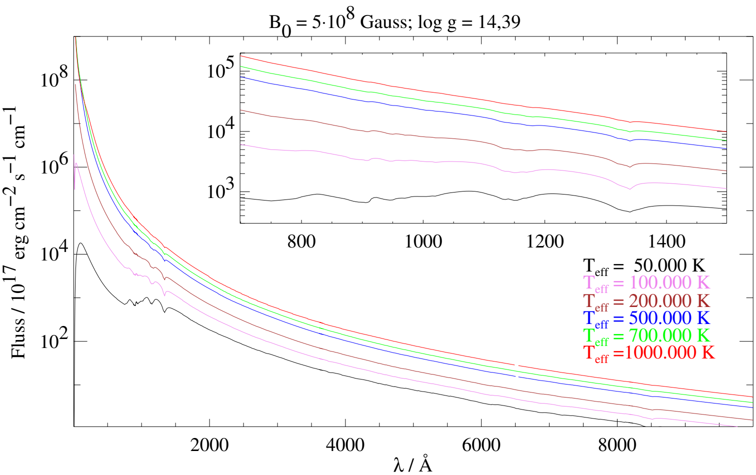


Abbildung 12.12: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 5 \cdot 10^8$. Modell: log $g = 14{,}39$; $C_{stark} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

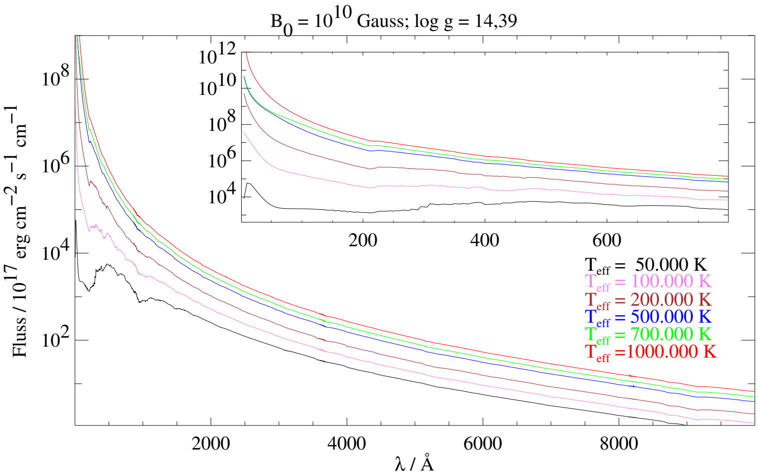


Abbildung 12.13: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^{10}$. Modell: log $g = 14{,}39$; $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

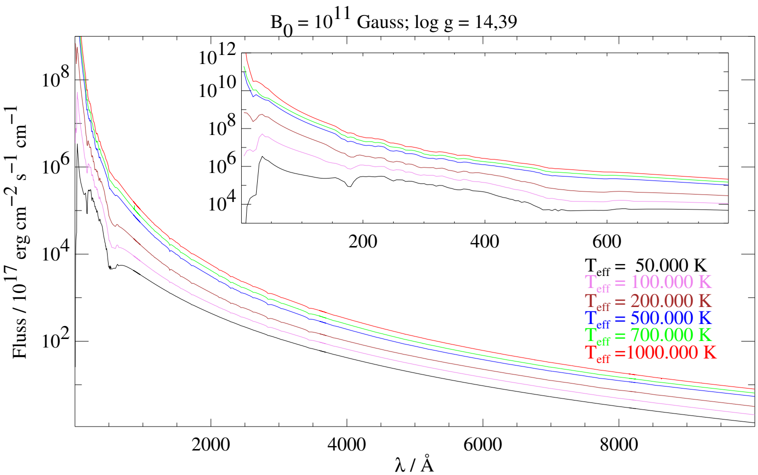


Abbildung 12.14: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^{11}$. Modell: log $g = 14{,}39$; $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; $\alpha = 0°$ (logarithmische y-Achse).

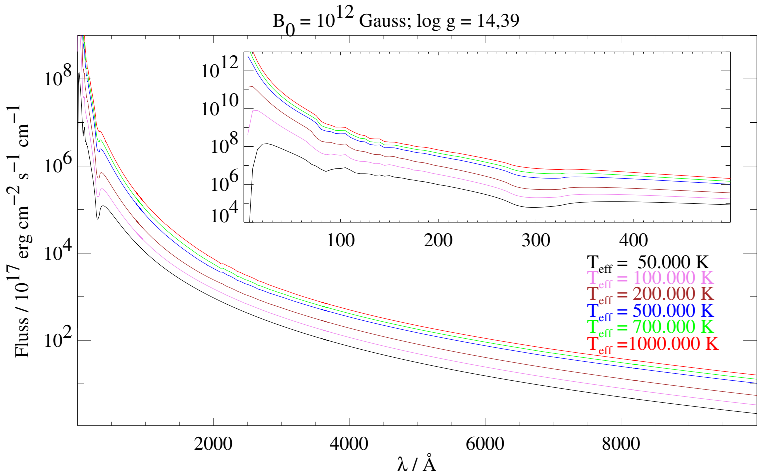


Abbildung 12.15: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^{12}$. Modell: log $g = 14{,}39$; $C_{stark} = 0{,}1$; $N_{Bänder} = 20$; $\alpha = 0^\circ$ (logarithmische y-Achse).

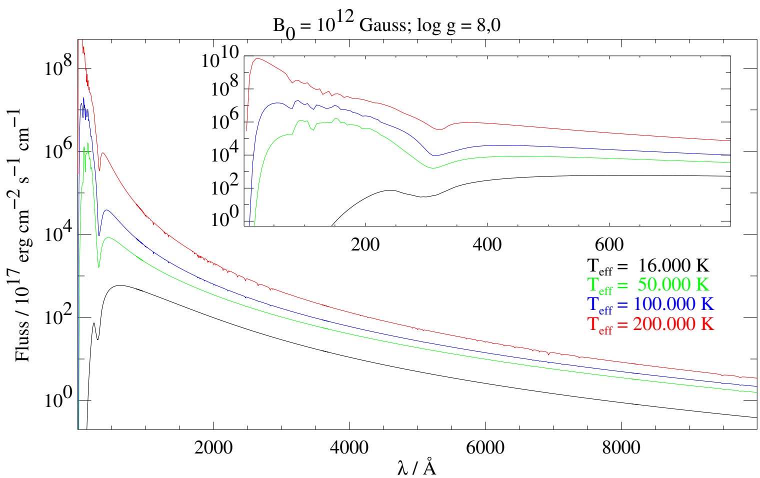


Abbildung 12.16: Auswirkung der Variation von T_{eff} bei einer Magnetfeldstärke von $B_0 = 10^{12}$. Modell: log $g = 8{,}0$; $C_{stark} = 0{,}1$; $N_{Bänder} = 20$; $\alpha = 0^\circ$ (logarithmische y-Achse).

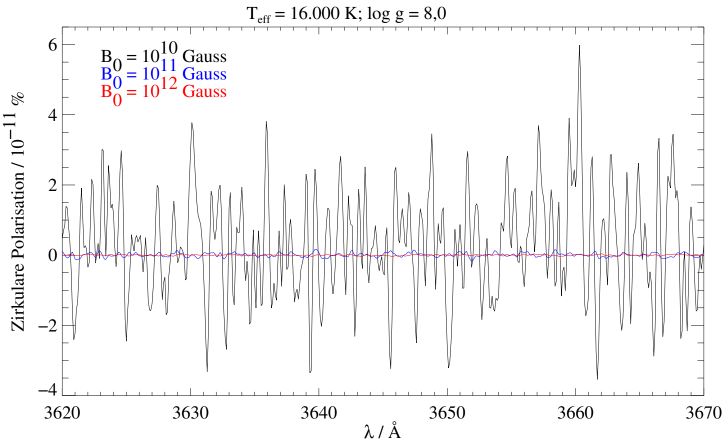


Abbildung 12.17: Detailausschnitt der zirkularen Polarisation bei hohen Feldstärken. Modell: $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $\alpha = 0°$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; Gefaltet mit einem Gaußprofil von FWHM = 0,25 Å. Man beachte die Skalierung der Polarisationsachse (10^{-11}). Angesichts der sehr niedrigen Werte ist es unklar, ob es sich um rein nummerisches Rauschen, oder noch um ein reales Polarisationsspektrum handelt.

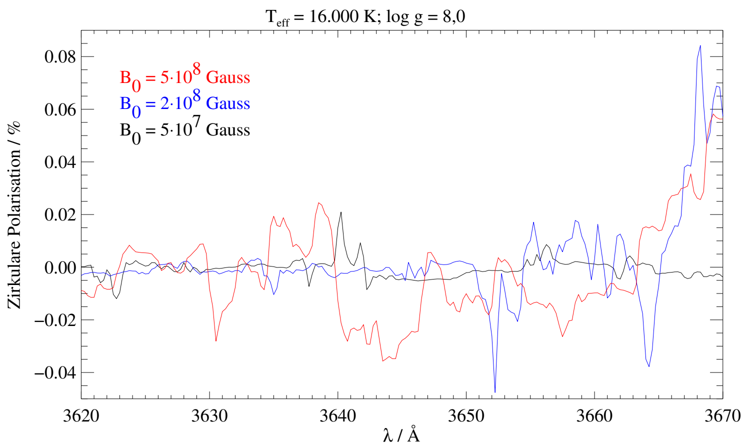


Abbildung 12.18: Detailausschnitt der zirkularen Polarisation bei mittleren Feldstärken. Modell: $C_{\text{stark}} = 0{,}1$; $\alpha = 0°$; $N_{\text{Bänder}} = 20$; Gefaltet mit einem Gaußprofil von FWHM = 0,25 Å.

Literaturverzeichnis

Ambartsumyan V.A., Saakyan G.S., 1960, Soviet. Astr. – AJ 4, 187
Arnett W.D., Schramm D.N., Truran J.W., 1989, ApJL 339, 25
Arons J., Tavani M., 1993, ApJ 403, 249
Auer L.H., Mihalas D., 1969, ApJ 158, 641
Baade W., Zwicky F., 1934a, Phys. Rev. 45, 138
Baade W., Zwicky F., 1934b, Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 254
Balberg S., Lichtenstadt I., Cook G.B., 1999, ApJS 121, 515
Becker W., Trümper J., 1997, A&A 326, 682
Bekefi B., 1966, Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York, London, Sydney
Benvenuto O.G., Lugones G., 1999, MNRAS Let. 305, 25
Bethe H.A., Johnson M., 1974, Nucl. Phys. A 320, 1
Blandford R.D., Applegate J.H., Hernquist L., 1983, MNRAS 204, 1025
Born M., 1972, Optik, Springer, Berlin, 3rd edition
Brainerd W.S., Goldberg C.H., Adams J.C., 1994, Fortran 90, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien
Braun M., 2002a, Phys. Rev. A 65, 033415
Braun M., 2002b, Hydrogen in strong magnetic fields: Energy values and matrix elements, priv. comm.
Burnell S.J.B., 1995, Neutronensterne., in Sauermost (1995), p.55
Burwitz V., Zavlin V.E., Neuhäuser R., et al., 2001, A&A Lett. 379, 35
Campana S., Mereghetti S., Sidoli L., 1997, A&A 320, 783
Cannon C.J., 1973, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 13, 627
Caraveo P.A., 1998, Adv. Space Res. 21, 187
Caraveo P.A., 2000, In: Kramer M., Wex N., Wielebinski N. (eds.) Pulsar Astronomy - 2000 and Beyond, Vol. 202. ASP Conference Series, p. 289
Caraveo P.A., Bignami G.F., Trümper J.E., 1996, A&A Rev. 7, 209
Chadwick J., 1932, Proc. R. Soc. London, Ser. A 136, 692
Charles P.A., 2001, X-ray Binary Stars., in Murdin (2001), p.3553
Davidson K., Ostriker J.P., 1973, ApJ 179, 585
Deetjen J.L., 2002, PoRTrAIT Interface Documentation, Technical report, Institut für Astronomie und Astrophysik, Astronomie Tübingen
Deetjen J.L., Miksa S., 2002, IrOnIc Interface Documentation, Technical report, Institut für Astronomie und Astrophysik, Astronomie Tübingen
Dittmann O., 1995, Dissertation, Universität Heidelberg
Domke H., 1970, Astrofizika 5, 525

Domke H., Staude J., 1973a, Sol. Phys. 31, 279

Domke H., Staude J., 1973b, Sol. Phys. 31, 291

Donati J.F., Achilleos N., Matthews J.M., Wesemael F., 1994, A&A 285, 285

Drake J.J., Marshall H.L., Dreizler S., et al., 2002, ApJ 572, 996

Dreizler S., 1992, Dissertation, Universität Kiel

Ellis T.M.R., Philips I.R., Lahey T.M., 1994, Fortran 90 Programming, Addison-Wesley, Harlow/England, Reading/Massachusetss, Menlo Park/California

Epstein P.S., 1916, Ann. Phys. 50, 489

Euchner F., Jordan S., Beuermann K., et al., 2002, A&A in press, (astro-ph/0205294)

Fischer H., Kaul H., 1990, Mathematik für Physiker 1, Teubner, Stuttgart, 2nd edition

Fischer H., Kaul H., 1998, Mathematik für Physiker 2, Teubner, Stuttgart, 1st edition

Frank J., King A., Raine D., 1992, Accretion Power in Astrophysics, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition

Friedman B., Pandharipande V.P., 1981, Nucl. Phys. A 361, 502

Friedman J.L., Parker L., Ipser J.R., 1984, Nat 312, 255

Friedman J.L., Parker L., Ipser J.R., 1986, ApJ 304, 115

Friedman J.L., Parker L., Ipser J.R., 1989, Phys. Rev. Lett. 62, 3015

Garstang R.H., 1977, Rep. Prog. Phys. 40, 105

Ghosh P., Lamb F.K., 1978, ApJL 223, 83

Ghosh P., Lamb F.K., 1979a, ApJ 232, 259

Ghosh P., Lamb F.K., 1979b, ApJ 234, 296

Goldstein H., 1989, Klassische Mechanik, AULA-Verlag, Wiesbaden, 10th edition

Gray D.F., 1976, The Observation and Analysis of Stellar Photospheres, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1st edition

Haken H., Wolf H.C., 1996, Atom- und Quantenphysik; Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, 6th edition

Halpern J.P., Ruderman M., 1993, ApJ 415, 286

Halpern J.P., Tytler D., 1988, ApJ 330, 201

Hardorp J., Shore S.N., Wittmann A., 1976, In: Weiss W.W., Jenkner H., Wood H.J. (eds.) Physics of Ap stars. IAU Coll. 32, Universitätssternwarte Wien mit FIGL-Observatorium für Astrophysik, Vienna, p.419

Hathaway R.J., 1999, Object FAQ, available at `http://www.cyberdyne-object-sys.com/oofaq2//`

Hauschildt P.H., Starrfield S., Shore S.N., et al., 1995, ApJ 447, 829

Heiselberg H., 2001, Neutron Stars., in Murdin (2001), p.1817

Hellwege K., (ed.) 1965, Landolt-Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik; Astronomie und Astrophysik, Springer, Berlin

Hewish A., 1995, Pulsare., in Sauermost (1995), p.136

Hewish A., Bell S.J., Pilkington J.D.H., et al., 1968, Nat 217, 709

Ho W.C.G., Lai D., 2001, MNRAS 327, 1081

Holtsmark J., 1919, Phys. Z. 20, 162

Holtsmark J., 1924, Phys. Z. 25, 73

Iglesias C.A., Rogers F.J., 1996, ApJ 464, 943

Jackson J.D., 1999, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, 3rd edition
Johnston S., Walker M.A., Bailes M., (eds.) 1996, Pulsars: problems and progress, Vol. 105 of *IAU Coll.*
/, IAU Coll. 160, Astron. Soc. Pacific, Conf. Ser., San Francisco
Jordan S., 1988, Dissertation, Universität Kiel
Jordan S., 1992, A&A 265, 570
Jordan S., O'Connell R.F., Koester D., 1991, A&A 242, 206
Kalkofen W., (ed.) 1987, Numerical Radiative Transfer, Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney
Kaplan D.L., van Kerkwijk M.H., Anderson J., 2002, ApJ 571, 447
Kippenhahn R., Möllenhoff C., 1975, Elementare Plasmaphysik, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich
Kolb E.W., Turner M.S., 1984, ApJ 286, 702
Konenkov D., Geppert U., 2001, MNRAS 325, 426
Kramers H.A., 1923, Phil. Mag. 46, 836
Kretschmar P., 1996, Dissertation, Universität Tübingen
Kroll P., 1995, Dissertation, Universität Tübingen
Kurucz R.L., 1991, In: Crivellari L., Hubeny I., Hummer D.G. (eds.) Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models. NATO ASI Ser. C 341, Kluwer, Dordrecht, p.441
Lai D., 2001, Rev. Mod. Phys. 73, 629
Lai D., Salpeter E.E., 1997, ApJ 491, 270
Lamb F.K., Sutherland P.G., 1974, In: Hansen C.J. (ed.) Physics of dense matter, Vol. 53. IAU Symp. Reidel, Dordrecht, p.265
Landau L.D., 1930, Z. Physik 64, 629
Landau L.D., 1932, Phys. Abh. Sov. Union 1, 285
Landi degl'Innocenti E., 1978, A&A 66, 119
Landi degl'Innocenti E., 1987, in Kalkofen (1987)
Langer S.H., Rappaport S., 1982, ApJ 257, 733
Larson M.B., Link B., 1999, ApJ 521, 271
Lewin H.W.G., van Paradijs J., van den Heuvel E.P.J., (eds.) 1995, X-Ray Binaries, Vol. 26 of *Cambridge Astrophysics Series*, Cambridge Astrophysics Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge
Lieb E.H., Solovej J.P., 1992, Phys. Rev. Lett. 69, 749
Martin B., Wickramasinghe D.T., 1979a, MNRAS 189, 69
Martin B., Wickramasinghe D.T., 1979b, MNRAS 189, 883
Martin B., Wickramasinghe D.T., 1981, MNRAS 196, 23
Martin C., Halpern J.P., Schiminovich D., 1998, ApJL 494, 211
Mayer-Kuckuk T., 1977, Atomphysik, Teubner, Stuttgart
Mereghetti S., Bignami G.F., Caraveo P.A., 1996, ApJ 464, 842
Michel F.C., 1991, Theory of Neutron Star Magnetospheres, Univ. of Chicago Press, Chicago
Mignani R.P., Caraveo P.A., Bignami G.F., 1998a, A&A Lett. 332, 37
Mignani R.P., Mereghetti S., Gouiffes C., Caraveo P.A., 1998b, ESO Messenger 94, 25

Mihalas D., 1978, Stellar Atmospheres, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 2nd edition
Miller M.C., 1992, MNRAS 255, 129
Miller M.C., Neuhauser D., 1991, MNRAS 253, 107
Miralles J.A., Urpin V., Konenkov D., 1998, ApJ 503, 368
Miralles J.A., Urpin V., Riper K.V., 1997, ApJ 480, 358
Montlick T., 1999, What is Object-Oriented Software?, available at `http://www.soft-design.com/softinfo/objects.html`
Mony B., 1991, Dissertation, Universität Tübingen
Mori K., Hailey C.J., 2002, ApJ 564, 914
Murdin P., (ed.) 2001, Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Institue of Physics Publishing; Nature Publishing Group, Bristol, Philadelphia, London, New York, Tokyo
Narayan R., Ostriker J.P., 1990, ApJ 352, 222
Neuhauser D., Langanke K., Koonin S.E., 1986, Phys. Rev. A 33, 2084
Nozawa T., Stergioulas N., Gourgoulhon E., Eriguchi Y., 1998, A&AS 132, 431
O'Connell R.F., Wallace G.L., 1981, Solid State Communications 38, 429
Olson G.L., Auer L.H., Buchler J.R., 1986, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 35, 431
O'Neill A., 1997, Object oriented programming, available at `http://www.geocities.com/SiliconValley/Way/2374/tutorial2.htm`
Oppenheimer J.R., Volkov G.M., 1939, Phys. Rev. 55, 374
Pacini F., 1967, Nat 216, 567
Palik E.D., Furdyna J.K., 1970, Rep. Prog. Phys. 1193
Pandharipande V.R., 1971, Nucl. Phys. A 178, 123
Pandharipande V.R., Smith R.A., 1975, Nucl. Phys. A 237, 507
Pavlov G., 1998, Neutron Star Atmospheres. In: Schmelcher, Schweitzer (eds.) Atoms and Molecules in Strong External Fields. Plenum Press, New York, p.37
Pavlov G.G., Shibanov Y.A., Ventura J., Zavlin V.E., 1994, A&A 289, 837
Pavlov G.G., Shibanov Y.A., Zavlin V.E., Meyer R.D., 1995, Neutron Star Atmospheres. In: Alpar M., Kiziloğlu Ü., van Paradijs J. (eds.) The Lives of the Neutron Stars. NATO ASI Ser. C 450 Kluwer Academic, Dordrecht, Boston, London, p.71
Pavlov G.G., Stringfellow G.S., Córdova F.A., 1996a, ApJ 467, 370
Pavlov G.G., Zavlin V.E., 1997, ApJL 490, 91
Pavlov G.G., Zavlin V.E., Becker W., Trümper J., 1996b, Am. Astron. Soc. Meeting 188, 73.11
Piran T., 1999, Spektrum der Wissenschaft, Digest: Astrophysik 54–61
Pons J.A., Walter F.M., Lattimer J.M., et al., 2002, ApJ 564, 981
Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., 1986, Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney
Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., 1995, Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 2nd edition
Rajagopal M., Romani R.W., 1996, ApJ 461, 327
Rajagopal M., Romani R.W., Miller M.C., 1997, ApJ 479, 347

Rees D.E., 1969, Sol. Phys. 10, 268

Rees D.E., 1987, A gentle introduction to polarized radiative transfer., in Kalkofen (1987), p.213

Reif F., 1987, Statistische Physik und Theorie der Wärme, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 3rd edition

Romani R.W., 1987, ApJ 313, 718

Ruder H., Wunner G., Herold H., Geyer F., 1994, Atoms in Strong Magnetic Fields; Quantum Mechanical Treatment and Applications in Astrophysics and Quantum Chaos, A&A Library, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1st edition

Ruderman M., Zhu T., Chen K., 1998a, ApJ 492, 267

Ruderman M., Zhu T., Chen K., 1998b, ApJ 502, 1027

Rutten R.J., 1997, Radiative Transfer in Stellar Atmospheres, lecture notes, Utrecht Univ. 4th WWW edition available at `http://www.fys.ruu.nl/~rutten/`

Rybicki G.B., Lightman A.P., 1979, Radiative Processes in Astrophysics, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1st edition

Sanwal D., Pavlov G.G., Zavlin V.E., Teter M.A., 2002, ApJL in press; (astro-ph/0206195)

Sauermost R., (ed.) 1995, Lexikon der Astronomie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford

Schaab C., Balberg S., Schaffner-Bielich J., 1998a, ApJL 504, 99

Schaab C., Sedrakian A., Weber F., Weigel M.K., 1999, A&A 346, 465

Schaab C., Weber F., Weigel M.K., 1998b, A&A 335, 596

Scharmer G.B., 1981, ApJ 249, 720

Schmidt H., 1997, Projektbericht, Universität Kiel

Schwarzschild K., 1916, Sitzber. Berliner Akad. 548

Seaton M.J., Yan Y., Mihalas D., Pradhan A.K., 1994, MNRAS 266, 805

Shapiro S.L., Salpeter E.E., 1975, ApJ 198, 671

Shibanov I.A., Zavlin V.E., Pavlov G.G., Ventura J., 1992, A&A 266, 313

Slettebak A., 1988, PASP 100, 770

Spitzer L., 1956, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York

Stokes G.G., 1862, Trans. Cambridge Phil. Soc. 9399, 233

Takeda Y., 1991, PASJ 43, 719

Tatarakis M., Watts I., Beg F.N., et al., 2002, Nat 415, 280

Thorsett S.E., 2001, Pulsars., in Murdin (2001), p.2177

Trümper J., Pietsch W., Reppin C., et al., 1978, ApJL 219, 105

Tsuruta S., 1998, Physics Reports 292, 1

Underhill A.B., Waddell J.H., 1959, NBC Circular 603

University of Michigan 2002, Neutron Star Evolutionary Track, Internet `http://aoss.engin.umich.edu/earth_space/images/HR_supernova.gif`

Unno W., 1956, PASJ 8, 108

Unsöld A., 1968, Physik der Sternatmosphären, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 2nd edition

Unsöld A., Baschek B., 1988, Der neue Kosmos, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 4th edition

Urpin V.A., 1993, ApJL 411, 87
van Kerkwijk M.H., Kulkarni S.R., 2001a, A&A 378, 986
van Kerkwijk M.H., Kulkarni S.R., 2001b, A&A 380, 221
Van Riper K.A., 1991, ApJS 75, 449
Van Riper K.A., Epstein R.I., 1995, ApJ 448, 294
Vasisht G., Kulkarni S.R., Anderson S.B., Kawai T.T.H.N., 1997, ApJL 476, 43
Vasyliunas V.M., 1979, Space Sci. Rev. 24, 609
Walter F.M., Matthews L.D., 1997, Nat 389, 358
Walter F.M., Wolk S.J., Neuhäuser R., 1996, Nat 379, 233
Wang J.C.L., Link B., Van Riper K., et al., 1999, A&A 345, 869
Werner K., 1986, A&A 161, 177
Werner K., 1987a, Dissertation, Universität Kiel
Werner K., 1987b, Stellar Atmospheres in Non-LTE: Model Construction and Line Formation Calculations using approximate Lambda Operators., in Kalkofen (1987), p.67
Werner K., 1988, A&A 204, 159
Werner K., Deetjen J., 2000, In: Kramer M., Wex N., Wielebinski R. (eds.) Pulsar Astronomy – 2000 and Beyond, Vol. 202. IAU Coll. 177, Astron. Soc. Pacific, Conf. Ser., San Francisco, p. 623
Werner K., Dreizler S., 1999, J. Comp. Appl. Math. 109, 65
Werner K., Husfeld D., 1985, A&A 148, 417
Werner K., Rauch T., Dreizler S., 1998, A Users's Guide to the Tübingen NLTE Model Atmosphere Package, Institut für Astronomie und Astrophysik, Astronomie, Tübingen available at `http://astro.uni-tuebingen.de/~rauch/`
Wittmann A., 1974, Sol. Phys. 35, 11
Zavlin V.E., Pavlov G.G., 1998, A&A 329, 583
Zavlin V.E., Pavlov G.G., Shibanov Y.A., 1996, A&A 315, 141
Zavlin V.E., Pavlov G.G., Shibanov Y.A., Ventura J., 1995, A&A 297, 441
Zavlin V.E., Pavlov G.G., Trümper J., 1998, A&A 331, 821

ANHANG A

PORTRAIT Kurzdokumentation

Die wichtigsten Objekte von PORTRAIT werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels kurz vorgestellt. Ziel ist es dabei, die Ausführungen des Hauptteils mit den einzelnen Komponenten des Programms zu verknüpfen.

Die „PORTRAIT Interface Documentation“ von Deetjen (2002) gibt an, über welche Daten die einzelnen Objekte verfügen und welche Methoden auf diesen Daten operieren. Zusätzlich wird das Interface und teilweise der Zweck jeder Methode kurz beschrieben.

A.1 Die wichtigsten Komponenten des Programms

A.1.1 Input

- Ein zentrales Inputfile. Dieses enthält im Wesentlichen Angaben zu $T_{\rm eff}$, $\log g$, B_0, dem zu erzeugenden Frequenzgitter, der Geometrie, den zu verwendenden Atomdaten, die zu berechnenden Opazitäten und der Wahl der Lösungsmethode für den polarisierten Strahlungstransport.

- Alle Inputwerte werden in einer Datenstruktur, d.h. einer Variablen zusammengefaßt.

- Flexible Erweiterung durch Eintrag in einem einzigen Modul möglich.

A.1.2 Frequenzgitter

- Von SETF2 für PRO2 erzeugte Frequenzgitter können eingelesen werden. Nähere Informationen zu diesen Programmen findet sich in Werner et al. (1998).

- Erzeugung optimierter Gitter unter besonderer Berücksichtigung der Linien und Ionisationskanten möglich (vgl. Abschnitt 11.3.5).

A.1.3 Atmosphärenstruktur

- Bereitstellung aller in einem PRO2 Modell gespeicherten Daten sowie weiterer eng damit verbundenen physikalischen Größen (vgl. Abschnitt 6.4.2).

A.1.4 Geometrie

- Beschreibung der Koordinaten der Neutronensternoberfläche in den drei benötigten Koordinatensystemen (polar, kartesisch sternbezogen, kartesisch beobachterbezogen; vgl. Abschnitt 11.3.1 und Abb. 11.2).
- Bereitstellung aller Koordinatentransformationen, Selektionsroutinen und Routinen zur Berechnung von projizierter Fläche, Winkeln, Oberflächennormalen und Sichtbarkeit (vgl. Abb. 11.3).
- Es stehen zwei Methoden zur Anordnung der Flächenelemente zur Verfügung (Dipolverteilung, gleichmäßige Verteilung von Dreiecken; vgl. Abb. 11.4). Darüber hinaus können problemlos weitere hinzugefügt werden.

A.1.5 Skalarfeld – Oberflächentemperatur

- Eine Realisierung jeder beliebigen Temperaturverteilung ist möglich.
- Momentan wird eine einheitliche Temperatur verwendet; vgl. Abschnitt 3.2.5.

A.1.6 Vektorfeld – Magnetfeld

- Eine Realisierung jeder beliebigen Magnetfeldverteilung ist möglich.
- Momentan wird eine Dipolverteilung verwendet; vgl. Abschnitt 11.3.3.
- Bereitstellung aller relevanten Winkel, Normen usw.; vgl. Abb. 11.3.

A.1.7 Atomdaten

- Bereitstellung der Atomdaten von Ruder et al. (1994) und Braun (2002b); vgl. Abschnitt 4.5.
- Anbringen frei wählbarer Faktoren für die Starkverbreiterung C_{stark}; vgl. Abschnitt **??**.
- Kontrolle der Konsistenz der Daten.
- Interpolation der Atomdaten für die tatsächlich benötigten Magnetfeldstärken; vgl. Abschnitt 4.5.1.

- Extraktion der Energieniveaus und Levelbezeichnungen bei einer bestimmten Magnetfeldstärke für die Berechnung der Linienopazitäten; vgl. Abschnitt 5.3 und Abschnitt 5.7.

A.1.8 Opazitäten

- LTE-mäßige Aufspaltung der PRO2 Besetzungszahlen; vgl. Abschnitt 5.2.
- Berechnung von reinen LTE-Besetzungszahlen ohne Berücksichtigung der PRO2-Besetzungszahlen; vgl. Abschnitt 5.2.
- Berechnung der Linienopazitäten; vgl. Abschnitt 5.3.
- Berechnung der Kontinuumsopazitäten; vgl. Abschnitt 5.4.
- Berechnung der Beiträge der Linien zu den magneto-optischen Parametern; vgl. Abschnitt 5.7, Abschnitt 5.7.1.
- Berechnung der kontinuierlichen magneto-optischen Parameter; vgl. Abschnitt 5.7, Abschnitt 5.7.2.
- Berechnung der Zyklotronabsorption; vgl. Abschnitt 5.5.
- Umrechnung in die Stokesopazitäten; vgl. Abschnitt 5.6.

A.1.9 Stokesvektor

- Dieser Datentyp erleichtert den fehlerfreien Umgang mit den Stokesvektoren verschiedener Oberflächenelemente und der Lösung unterschiedlicher Strahlungstransportroutinen.
- Rotation des Lösungsvektors eines Segments in das globale Koordinatensystem; vgl. Satz 7.2.

A.1.10 Strahlungstransport

- Implementierung der Accelerated Lambda Iteration; vgl. Kapitel 8.
- Implementierung des Algorithmus von Martin und Wickramasinghe; vgl. Satz 7.4.
- Implementierung der APPROX-Methode; vgl. Abschnitt 7.5.
- Implementierung der MATEXP-Methode; vgl. Abschnitt 9.
- Implementierung eines direkten DGL Lösers; Runge-Kutta-Merson Algorithmus aus der GENLIB des CERN; vgl. Abschnitt 7.5.

A.1.11 Service Routinen

- Module zur Laufzeitberechnung; ein wichtiges Instrument zur Kontrolle der Effizienz der Implementierung.
- Module zur Interpolation und Extrapolation; benötigt z.B. in Abschnitt 4.5.1.
- Bereitstellung von Sortieralgorithmen, die an vielen Stellen benötigt werden.
- Berechnung der Voigt-Funktion auf drei verschiedene Arten; benötigt für Abschnitt 5.3.3.
- Berechnung der Ableitung der Voigt-Funktion auf drei verschiedene Arten; vgl. Abschnitt 5.7.1.
- Berechnung der Fehlerfunktion, die für die Berechnung der Kontinuumsopazitäten benötigt wird; vgl. Abschnitt 5.4.
- Modul zur Erleichterung schneller Tests und effizienter Verifikation der Software. Dies beinhaltet eine Datenanbindung an die in IDL geschriebene Visualisierungssoftware.

A.1.12 Verknüpfung der einzelnen Bestandteile zu einem Programm

- Das Hauptprogramm erlaubt die Steuerung des gesamten Ablaufs. Hierbei wurde von vornherein Wert auf Flexibilität und Erweiterbarkeit gelegt.
- Einlesen des Inputfiles, Definition der Flächenelemente, der Temperaturverteilung, des Magnetfeldes; Einlesen der Atomdaten und Resampling auf den benötigten Magnetfeldstärken; Generierung des Frequenzgitters.
- Berechnung des Strahlungstransports für jedes sichtbare Oberflächenelement sortiert nach der lokalen Oberflächentemperatur und dem lokalen Magnetfeld.

Danksagung

Viele Menschen haben direkt oder indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ihnen allen danke ich für ihre Geduld und Hilfe. An erster Stelle möchte ich mich bei Klaus Werner für seine stets hilfreiche und freundliche Betreuung meiner Promotion bedanken. Ohne sein Engagement wäre diese Promotion und ihre Finanzierung nicht möglich gewesen.

- Gute Forschung steht und fällt mit dem Team, in dem man arbeitet. Das Team in dem ich mitarbeiten durfte, ist meine Arbeitsgruppe, bestehend aus Stefan Dreizler, Stefan Jordan, Thorsten Nagel, Thomas Rauch, Sonja Landenberger-Schuh und Klaus Werner.

- Insbesondere gilt mein Dank Stefan Jordan, von dem ich viel über den polarisierten Strahlungstransport und dessen Tücken lernen konnte.

- Höhepunkte während meiner Promotion waren stets die Beobachtungskampagnen auf dem Calar Alto. Stefan Dreizler ermöglichte mir den Einstieg in dieses faszinierende Gebiet und Klaus Werner gab mir den dazu nötigen Freiraum neben meiner Promotion.

- Thomas Rauch hat mit unermüdlicher Geduld alle meine Fragen, insbesondere zum Umgang mit PRO2, beantwortet und war ein kritischer Kollege bei der Entwicklung meiner Software IrOnIc.

- Ohne die von Klaus Werner, Stefan Dreizler und Thomas Rauch entwickelte Software hätte ich keine Inputatmosphären berechnen können und wäre diese Arbeit nicht zustandegekommen.

- Aus dem Projektbericht von Holger Schmidt (Universität Kiel) habe ich vieles über den polarisierten Strahlungstransport lernen können; dafür bin ich ihm zu Dank verpflichtet.

- Was wäre diese Arbeit ohne Atomdaten? Moritz Braun verdanke ich viele Einsichten in die komplizierte Materie der Berechnung von Atomdaten in Magnetfeldern und nicht zuletzt einen Teil der Atomdaten selbst. Der Gastaufenthalt an der UNISA, den Moritz Braun mir ermöglicht hat, war ein prägendes Ereignis dieser Promotion.

- Ebenso möchte ich mich bei meinen Institutskolleginnen und -kollegen für das entspannte Arbeitsklima und ihre stete Diskussions- und Hilfsbereitschaft bedanken. Insbesondere bei all den großen und kleinen Problemen im Umgang mit den Computern wurde mir oft und viel geholfen.

- Die Espresso-Runde im IAAT hat wesentlich dazu beigetragen, dass ich mich hier stets rundum wohl fühlte.

- Die Durchsicht dieser Dissertation auf syntaktische, grammatikalische und inhaltliche Fehler verdanke ich Stefan Dreizler, Kolja Giedke, Eckart Göhler, Stefan Jordan, Christian Wallraven, Alexander Würz-Wessel, meiner Mutter und meinem Vater. Ihnen allen danke ich für diesen Freundschaftsdienst und ihre vielfältigen Anregungen und Kommentare.

- Eckart Göhler verdanke ich die Software AITDOC, die er extra für mich geschrieben hat.

- Ein besonderer Dank geht an die Systemadministratoren des AIT. Ihrem unermüdlichen Einsatz verdanke ich die hervorragende Rechner-Infrastruktur, von der ich sehr profitiert habe.

- Ganz herzlich danke ich Jörn Wilms. Er hat mir unzählige Fragen beantwortet und ich konnte vieles von ihm lernen. Auch danke ich ihm sehr dafür, dass er mir seinen LaTeX-Stil für Dissertationen zur Verfügung stellte.

- Oft wird vergessen, dass Forschung sehr teuer ist. Ich danke daher den deutschen Steuerzahlern, die diese Forschungsarbeit durch die DLR und die DFG finanziert haben. Meine Konferenzbesuche wurden durch Reisestipendien der EU, der NATO und der NSF ermöglicht. Der University of South Africa danke ich recht herzlich für die Finanzierung meines dortigen Gastaufenthaltes.

- Zu guter Letzt danke ich meiner Familie von Herzen für allen Rückhalt und Unterstützung.

Curriculum vitae

	15.07.1973	geboren in Reutlingen Familienstand: ledig
Schule	1979 – 1983	Grundschule in Münster / Westfalen
	1983	Grundschule in Rosenfeld-Leidringen
	1983 – 1992	Albertus-Magnus-Gymnasium in Rottweil
	1992	Abitur
Zivildienst	07.1992 – 09.1993	Gesamtkirchenpflege Tübingen
Studium	10.1993 – 02.1999	Stud. phys. an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen
	10.1995	Abschluss des Vordiploms; Wahlfach: Informatik
	12.1997 – 02.1999	Diplomarbeit am Institut für Astronomie und Astrophysik, Abt. Astronomie der Eberhard-Karls-Universität Tübingen (IAAT) betreut von Prof. K. Werner über das Thema „Die Eisenhäufigkeit in Wasserstoffreichen Zentralsternen Planetarischer Nebel“
	02.1999	Diplom in Physik; Wahlfach: Daten und Informationsverarbeitung in der Physik
	03.1999 – 2002	Anfertigung einer Dissertation am IAAT betreut von Prof. K. Werner über das Thema „Atmosphären und synthetische Spektren von Neutronensternen“
Beruf	10.1996 – 06.1997	Wissenschaftliche Hilfskraft, Wilhelm Schickard Institut, Universität Tübingen
	11.1997 – 02.1999	Wissenschaftliche Hilfskraft, IAAT
	seit 03.1999	Wissenschaftlicher Angestellter am IAAT (DLR)
	seit 07.2000	Wissenschaftlicher Angestellter am IAAT (DFG)

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren und Dozenten Dres.

Angewandte Physik: K.-H. Gaukler, E. Plies, R. Schief

Astronomie und Astrophysik: M. Bässgen, S. Dreizler, H. Mauder, H. Riffert, H. Ruder, R. Staubert, K. Werner, J. Wilms

Experimentalphysik: M. Baumann, H. Clement, P. Grabmayr, W.-D. Hartmann, R. Hübener, O. Lutz, G. Mertens, W. Nakel, A. Schwenk, G. Staudt, G. Wagner

Informatik: E. Kanellopoulos, M. Kaufmann, R. Rau, W. Straßer

Mathematik: H. Fischer, G. Huisken, H. Kaul, B. Kümmerer, M. Wolff

Theoretische Physik: K. Bräuer, A. Fäßler, T. Gutsche, H. Müther, E. Schmid, H. Stumpf

Diese Dissertation wurde in LaTeX von J.L. Deetjen in Adobe Times, Adobe Helvetica, Adobe Symbol, American Mathematical Society Fonts, American Mathematical Society Symbol und Computer Modern Typewriter, unter Verwendung des LaTeX-Stils für Dissertationen von J. Wilms, gesetzt.