Kürzeste konfinale Ketten im Untergruppenverband unendlicher Permutationsgruppen

DISSERTATION
der Mathematischen Fakultät der
Eberhard–Karls–Universität Tübingen
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

Vorgelegt von
TORSTEN INGO SCHATZ
aus Tuttlingen

2002

Tag der mündlichen Qualifikation:	23. Mai 2002
Dekan:	Prof. Dr. Wolfgang Knapp
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. Ulrich Felgner
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. Peter Hauck

Für Heike

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Permutationsgruppen waren historisch gesehen die ersten Gruppen, die in der Algebra betrachtet wurden und bis heute zeigt sich ihre grundlegende Bedeutung für viele Gebiete der Mathematik, weit über die Gruppentheorie hinaus.
Die Beschäftigung mit Permutationsgruppen begann vor über 200 Jahren. Doch lange Zeit studierte man ausschließlich endliche Permutationsgruppen. Erste Resultate über unendliche Permutationsgruppen wurden in den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts bewiesen, ihre systematische Untersuchung begann erst nach 1960. Der Grund ist, dass man dafür das Instrumentarium der Mengenlehre und der infinitären Kombinatorik benötigt. Mit diesen Mitteln wurde in den letzten Jahrzehnten eine Reihe von interessanten und zum Teil erstaunlichen Resultaten über unendliche Permutationsgruppen erzielt. Eine gute bersicht geben [13] und [27].
Der Begriff der Konfinalität einer Gruppe ist relativ neu, er wurde 1990 von H. D. Macpherson und Peter Neumann eingeführt (vgl. [18]). Der Hintergrund ist, dass eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe G als Union einer aufsteigend–geordneten Kette von echten Untergruppen dargestellt werden kann. Die Konfinalität von G, welche wir mit $\operatorname{konf}(G)$ bezeichnen, ist nun die kleinste Kardinalzahl μ, mit der Eigenschaft, dass man G als Union einer aufsteigend–geordneten Kette von μ vielen echten Untergruppen schreiben kann.
Durch die Beschäftigung mit solchen Ketten erhält man wichtige Einblicke in die Struktur des Untergruppenverbandes und die Konfinalität ist eine Invariante, die für gruppentheoretische Untersuchungen sehr hilfreich sein kann.
Macpherson und Neumann haben in [18] bewiesen, dass für eine unendliche Kardinalzahl κ die Konfinalität der symmetrischen Gruppe auf κ echt größer als κ ist. Offenbar ist die Mächtigkeit einer Gruppe eine obere Schranke für ihre Konfinalität. Damit stellt sich nun die Frage nach der exakten Bestimmung von $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big)$. Dieses Problem führt jedoch über das Axiomensystem ZSF + AC hinaus, denn James Sharp und Simon Thomas bewiesen 1994, dass es konsistent mit ZSF + AC ist, dass $2^{\aleph_0}$ und

konf $\bigl(\mathrm{Sym}(\omega)\bigr)$ zwei beliebig vorgegebene reguläre überabzählbare Kardinalzahlen sind, wobei nur die Bedingung konf $\bigl(\mathrm{Sym}(\omega)\bigr) \leq 2^{\aleph_0}$ erfüllt sein muss (vgl. [22]). Ein analoges Resultat für die Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, wenn κ überabzählbar und regulär ist, publizierten Sharp und Thomas im Jahr darauf (vgl. [23]).
Ausgehend von diesen Ergebnissen entstand eine ganze Reihe von Arbeiten zu verschiedenen Aspekten des Konfinalitätsbegriffs. Eine Richtung, die von eher mengentheoretischem Interesse getragen ist, nahm die Tatsache, dass die Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\omega)$ eine überabzählbare Kardinalzahl, aber höchstens gleich der Mächtigkeit der reellen Zahlen ist, zum Anlass, den Zusammenhang zwischen konf $\bigl(\mathrm{Sym}(\omega)\bigr)$ und den sogenannten Invarianten des Kontinuums zu untersuchen (vgl. [24], [30] und [19]).
Eine andere Richtung wandte sich eher algebraischen und modelltheoretischen Fragestellungen zu, wie der nach der Konfinalität der Automorphismengruppen bestimmter Strukturen (vgl. [28] und [31]).

Aus der Klasse der Permutationsgruppen wurden bislang ausschließlich die unendlichen symmetrischen Gruppen betrachtet. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns nun mit der Konfinalität wichtiger Untergruppen. Es werden die Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ (für eine unendliche Kardinalzahl κ) und verschiedene Stabilisatoren von Teilmengen von κ untersucht. Außerdem berechnen wir die Konfinalität der homomorphen Bilder der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und die der homomorphen Bilder ihrer Normalteiler.
Für eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe G nennen wir eine aufsteigend–geordnete Kette von echten Untergruppen von G, deren Union gleich G ist, eine konfinale Kette in G. Falls die Länge dieser Kette gleich konf (G) ist, heißt sie eine kürzeste konfinale Kette in G.
Neben der Bestimmung der Konfinalitäten beschäftigen wir uns an verschiedenen Stellen in dieser Arbeit auch damit, welche allgemeinen Aussagen sich über die Gestalt konfinaler Ketten in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ sowie in den anderen betrachteten Gruppen machen lassen, welche Zusammenhänge zwischen verschiedenen konfinalen Ketten bestehen und welchen Bedingungen die in diesen Ketten auftretenden Untergruppen genügen müssen.

Das erste Kapitel führt in die Thematik ein, es werden die grundlegenden Begriffe definiert und einige einfache Eigenschaften gezeigt. Außerdem zitieren wir die oben erwähnten Resultate von Macpherson, Neumann, Sharp und Thomas.
Gemäß diesen kann die Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ in $\mathrm{ZSF} + \mathrm{AC}$ nicht genau bestimmt werden. Allerdings erfüllen, wie im zweiten Kapitel dieser Arbeit gezeigt wird, die in einer konfinalen Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ auftretenden Untergruppen stets bestimmte

Eigenschaften, so ist ihr Index gleich 2^κ, unabhängig davon, welche Länge die Kette hat.

Viele wichtige Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, wie ihre echten Normalteiler oder bestimmte Stabilisatoren von Teilmengen von κ, haben den Index 2^κ. Deshalb untersuchen wir die Frage, ob diese als Glieder in konfinalen Ketten auftreten können. Es zeigt sich, dass man zu einem vorgegebenen Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ immer eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ findet, deren erstes Glied dieser Normalteiler ist. Die Frage, ob es umgekehrt auch konfinale Ketten in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ gibt, deren sämtliche Glieder einen vorgegebenen Normalteiler nicht als Untergruppe enthalten, führt über $\mathrm{ZSF} + \mathrm{AC}$ hinaus in den Bereich der Konsistenzaussagen. hnliches gilt für gewisse Stabilisatoren von Teilmengen von κ.

In Kapitel 3 berechnen wir die Konfinalität der nicht–trivialen Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, das sind die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(\kappa)$ sowie die beschränkten symmetrischen Gruppen $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ für eine unendliche Kardinalzahl λ mit $\lambda \leq \kappa$. Es wird gezeigt, dass die $\mathrm{Alt}(\kappa)$ abzählbare Konfinalität hat und die Konfinalität der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ gleich $\mathrm{cf}(\lambda)$, also gleich der Konfinalität der Kardinalzahl λ, ist. Die Situation ist damit wesentlich anders als im Fall der $\mathrm{Sym}(\kappa)$.

Mit diesen Resultaten können wir (in $\mathrm{ZSF} + \mathrm{AC}$) ein Beispiel für eine Gruppe G und eine Untergruppe U von G angeben, für die $\mathrm{konf}\,(U) > \mathrm{konf}\,(G)$ gilt. Außerdem folgt, dass zu jeder regulären unendlichen Kardinalzahl μ eine Gruppe der Konfinalität μ existiert. Wie man leicht sieht, kann die Konfinalität einer Gruppe niemals singulär sein.

Mit der Konfinalität der nicht–trivialen Faktorgruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und der ihrer Normalteiler beschäftigt sich das vierte Kapitel. Wir zeigen, dass die Konfinalität jedes homomorphen Bildes der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ gleich der der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst ist. Ebenso ist die Konfinalität eines homomorphen Bildes der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ (für eine unendliche Kardinalzahl λ mit $\lambda \leq \kappa$) gleich $\mathrm{cf}(\lambda)$, d. h. gleich $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big)$. Am Beispiel der freien Gruppen wird dargelegt, dass dies keineswegs immer so ist, sondern dass es Gruppen gibt, bei denen zwischen ihrer Konfinalität und der ihrer Faktorgruppen beliebig große Sprünge auftreten.

Mit Hilfe der genannten Resultate geben wir schließlich eine Teilantwort auf eine Frage von William Scott nach der Isomorphie der in der Reihe der Normalteiler von unendlichen symmetrischen Gruppen auftretenden Faktoren.

In den letzten beiden Kapiteln der vorliegenden Arbeit untersuchen wir konfinale Ketten in bestimmten Stabilisatoren von Teilmengen. Was den punktweisen Stabilisator einer Menge Δ betrifft, also die Gruppe der Permutationen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, die jedes Element von Δ festlassen, so ist dieser isomorph zur $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$. Folglich ist die Frage nach der Konfinalität der punktweisen Stabilisatoren die gleiche wie die nach der Konfinalität der symmetrischen Gruppen selbst.

Aus diesem Grund beschäftigen wir uns zunächst mit den blockweisen Stabilisatoren. Diese bestehen aus den Permutationen, welche eine gegebene Teilmenge von κ en bloc festlassen. Die blockweisen Stabilisatoren endlicher Teilmengen sind nicht zuletzt deshalb interessant, weil sie maximale Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ sind. Es gilt sogar, dass jede intransitive maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ blockweiser Stabilisator einer endlichen Teilmenge von κ ist. Wir zeigen, dass diese immer dieselbe Konfinalität wie die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ haben.

Falls die Menge Δ weder endlich noch koendlich ist, so ist die Konfinalität des blockweisen Stabilisators von Δ das Minimum aus der Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und der der $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$. Dabei kann in ZSF + AC nicht entschieden werden, welcher dieser Werte der kleinere ist.

Allerdings zeigt sich, dass ein enger Zusammenhang zwischen den konfinalen Ketten im blockweisen Stabilisator einer Menge Δ und denen in der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ sowie in der $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ besteht.

Man sieht relativ leicht, dass die Konfinalität einer maximalen Untergruppe einer nicht endlich–erzeugbaren Gruppe G stets höchstens so groß ist wie die Konfinalität von G. Nach dem oben genannten Resultat über die intransitiven maximalen Untergruppen stellt sich nun die Frage, ob jede maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ dieselbe Konfinalität wie die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst hat.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit zeigen wir, dass dem nicht so ist. Wir berechnen dort die Konfinalität des sogenannten Faststabilisators einer unendlichen Teilmenge Δ von κ. Dieser besteht aus den Permutationen π, für die die Kardinalität der symmetrischen Differenz aus der Menge Δ und ihrem Bild $\pi(\Delta)$ echt kleiner als die Kardinalität von Δ ist.

Es werden drei Fälle unterschieden, je nachdem ob die Mächtigkeit von Δ eine Nachfolgerkardinalzahl, eine Limeskardinalzahl oder $\aleph_0$ ist. Für die Untersuchung des letzten Falls definieren wir eine weitere Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, den gleichgewichtigen Faststabilisator einer abzählbaren Menge.

Wir beweisen, dass die Konfinalität des Faststabilisators von Δ der des blockweisen Stabilisators entspricht, sofern Δ abzählbar oder die Mächtigkeit von Δ eine Nachfolgerkardinalzahl ist. Wenn die Mächtigkeit von Δ eine Limeskardinalzahl ist, dann ist

die Konfinalität des Faststabilisators gleich $\mathrm{cf}(|\Delta|)$.
Für eine unendliche Teilmenge Δ von κ, deren Kardinalität echt kleiner als κ ist, ist der Faststabilisator von Δ eine maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$. Wir werden sehen, dass man damit (in ZSF + AC) Beispiele für maximale Untergruppen angeben kann, deren Konfinalität echt kleiner als die der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst ist. Unter der Annahme von GCH gilt dies sogar für jede maximale Untergruppe, die Faststabilisator einer unendlichen Teilmenge ist.
Schließlich untersuchen wir noch die Gestalt kürzester konfinaler Ketten in den Faststabilisatoren.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Ulrich Felgner bedanken für die Betreuung dieser Arbeit, für die zahlreichen Gespräche und für seine wundervolle Art, Mathematik zu betreiben und zu lehren. Außerdem danke ich Dr. Benedikt Löwe (Bonn), der mich in den letzten Jahren begleitet und mir vielfältige Anregungen gegeben hat. Während meines Studiums und des ersten Jahres als Doktorand erhielt ich ein Stipendium der Friedrich–Ebert–Stiftung, ich danke ihr für die Förderung.

Kapitel 1

Grundlagen

Die zugrundeliegende Theorie für die gesamte Arbeit ist das Axiomensystem von Zermelo–Skolem–Fraenkel (ZSF, in der Literatur auch mit ZF bezeichnet) zusammen mit dem Auswahlaxiom (AC). Werden zusätzliche Annahmen wie die generalisierte Kontinuums–Hypothese (GCH) benützt, so wird dies an der betreffenden Stelle angegeben.
Wir verwenden die mengentheoretischen Standardbegriffe und –notationen, wie sie sich bei Felgner [12] oder Jech [15] finden.

Für eine (endliche oder unendliche) Kardinalzahl κ mit $\kappa \geq 1$ bezeichne $\mathrm{Sym}(\kappa)$ die symmetrische Gruppe auf κ und $\mathrm{Alt}(\kappa)$ die alternierende Gruppe auf κ. Dabei ist κ wie üblich die Menge aller Ordinalzahlen α mit $\alpha < \kappa$.
Für eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa)$ sei $\mathrm{supp}(\pi) = \{\alpha \in \kappa;\ \pi(\alpha) \neq \alpha\}$ der *Träger* (oder Support) *von* π und $\mathrm{fix}(\pi) = \{\alpha \in \kappa;\ \pi(\alpha) = \alpha\} = \kappa - \mathrm{supp}(\pi)$ die *Fixpunktmenge von* π.
Wenn κ und λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$ sind, dann sei

$$\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \{\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa);\ |\mathrm{supp}(\pi)| < \lambda\}.$$

Wie man leicht sieht, ist dies ein Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$. Damit haben wir

$$1 \lhd \mathrm{Alt}(\kappa) \lhd \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) \lhd \mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\kappa) \lhd \ldots \lhd \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) \lhd \mathrm{Sym}(\kappa).$$

Reinhold Baer [2] bewies 1934, dass in obiger Reihe sämtliche Normalteiler (und sämtliche Subnormalteiler) der symmetrischen Gruppe auf κ stehen. Wichtige Vorarbeiten für diesen Satz hatten zuvor bereits Jan Schreier und Stanisław Ulam [20] geleistet.

Im Folgenden sei G eine Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ.

Dann bezeichnen wir mit

$$G_{(\Delta)} = \{\pi \in G;\ \forall x \in \Delta : \pi(x) = x\}$$

den *punktweisen Stabilisator von* Δ *in* G und mit

$$G_{\{\Delta\}} = \{\pi \in G;\ \pi(\Delta) = \Delta\} = \{\pi \in G;\ \forall x \in \Delta :\ \pi(x) \in \Delta\ \&\ \pi^{-1}(x) \in \Delta\}$$

den *blockweisen Stabilisator von* Δ *in* G.
Wenn Δ unendlich ist, so sei

$$G_{[\Delta]} = \{\pi \in G;\ |\Delta \mathbin{\triangle} \pi(\Delta)| < |\Delta|\}$$

der *Faststabilisator von* Δ *in* G. Dabei ist $X \mathbin{\triangle} Y = (X-Y) \cup (Y-X)$ die symmetrische Differenz der Mengen X und Y.
$G_{(\Delta)}, G_{\{\Delta\}}$ und $G_{[\Delta]}$ sind Untergruppen von G, wobei offensichtlich $G_{(\Delta)} \leq G_{\{\Delta\}} \leq G_{[\Delta]}$ gilt. Wenn Δ endlich ist, so bildet die Menge $\{\pi \in G;\ |\Delta \mathbin{\triangle} \pi(\Delta)| < |\Delta|\}$ im Allgemeinen keine Gruppe.

$G\restriction\Delta = \{\pi\restriction\Delta;\ \pi \in G_{\{\Delta\}}\}$ sei die von G auf Δ induzierte Permutationsgruppe. Dabei bezeichnen wir mit $\pi\restriction\Delta$ die Restriktion der Abbildung π auf die Menge Δ.
$G\restriction\Delta$ ist ein homomorphes Bild, aber im Allgemeinen keine Untergruppe von G.

Wir identifizieren die $\mathrm{Sym}(\Delta)$ mit dem punktweisen Stabilisator $\mathrm{Sym}(\kappa)_{(\kappa-\Delta)}$ von $\kappa-\Delta$ und fassen sie damit als Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ auf.

Eine Teilmenge Δ von κ mit $|\Delta| = |\kappa - \Delta| = \kappa$ nennen wir *mittelmäßig.*

Die folgende Proposition führt uns zu einem der zentralen Begriffe dieser Arbeit, nämlich zur Konfinalität einer Gruppe (vgl. H. D. Macpherson und Peter Neumann [18, Note 3]).

Proposition 1.1 (Macpherson, Neumann)
Sei G eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe.
Dann ist G die Union einer aufsteigend–geordneten Kette von echten Untergruppen.

Beweis: Sei $\mu = |G|$ und $G = \{g_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine beliebige Aufzählung der Elemente von G. Für jedes $\nu \in \mu$ sei $H_\nu = \langle g_\xi;\ \xi < \nu\rangle$ die von den ersten ν Elementen erzeugte Untergruppe von G.

Offensichtlich ist $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen von G, wobei $G = \bigcup_{\nu\in\mu} H_\nu$ gilt.

Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist H_ν eine echte Untergruppe von G.
Beweis: Falls G abzählbar ist, d. h. $\mu = \aleph_0$, so ist H_ν für jedes $\nu \in \mu$ endlich–erzeugt und somit gilt $H_\nu \neq G$ nach Voraussetzung.
Falls $\aleph_1 \leq |G| = \mu$ ist, dann gilt $|H_\nu| \leq \aleph_0 + |\nu| < \mu$ für jedes $\nu \in \mu$, also $H_\nu < G$.
Damit ist die Proposition bewiesen. □

Definition 1.2 (Macpherson, Neumann, 1990)
Sei G eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe.
Die kleinste Kardinalzahl μ mit der Eigenschaft, dass G als Union einer aufsteigend–geordneten Kette von μ vielen echten Untergruppen geschrieben werden kann, heißt die *Konfinalität von* G und wird mit $\mathrm{konf}\,(G)$ bezeichnet.

Da wir in dieser Arbeit sehr häufig Ketten mit diesen Eigenschaften betrachten, führen wir die folgenden Begriffe ein:

Definition 1.3 Sei G eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe und μ eine Kardinalzahl. Eine aufsteigend–geordnete Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ von echten Untergruppen von G mit der Eigenschaft, dass $G = \bigcup_{\nu\in\mu} H_\nu$ gilt, heißt *konfinale Kette in* G *(der Länge* μ*)*.
Falls $\mu = \mathrm{konf}\,(G)$ gilt, so nennen wir $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine *kürzeste konfinale Kette in* G.

Bemerkung: Wenn G endlich–erzeugbar ist, so kann G offensichtlich nicht als Union einer aufsteigend–geordneten Kette von echten Untergruppen dargestellt werden.

Proposition 1.4 *Sei* G *eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe.*
Dann gilt:

(i) $\mathrm{konf}\,(G)$ *ist eine reguläre Kardinalzahl,*

(ii) $\aleph_0 \leq \mathrm{konf}\,(G) \leq \mathrm{cf}(|G|)$.

Beweis: (i) Sei $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ für eine Kardinalzahl μ eine konfinale Kette in G, $\theta = \mathrm{cf}(\mu)$ und $\langle \alpha_\xi;\ \xi \in \theta\rangle$ eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen, wobei $\mu = \bigcup_{\xi\in\theta} \alpha_\xi$ gilt. Dann ist offensichtlich auch $\{H_{\alpha_\xi};\ \xi \in \theta\}$ eine konfinale Kette in G.

Folglich kann konf (G) nicht singulär sein.

(ii) Weil die Union einer aufsteigend–geordneten Kette von endlich vielen echten Untergruppen gleich ihrem letzten Glied ist, muss eine konfinale Kette eine unendliche Länge haben. Also ist $\aleph_0 \leq \operatorname{konf}(G)$.
In Proposition 1.1 haben wir eine konfinale Kette in G der Länge $|G|$ konstruiert. Wie in Teil (i) erhält man daraus eine konfinale Kette der Länge $\operatorname{cf}(|G|)$. □

In Kapitel 3 zeigen wir, dass man umgekehrt auch zu jeder regulären unendlichen Kardinalzahl κ eine Gruppe G mit $\operatorname{konf}(G) = \kappa$ angeben kann.

Ausgangspunkt für die Untersuchung der Konfinalitäten von Gruppen war das folgende Resultat von Macpherson und Neumann [18, Theorem 1.1]:

Satz 1.5 (Macpherson, Neumann, 1990)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl.
Dann gilt $\kappa < \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big) \leq \operatorname{cf}(2^\kappa)$.

Der Beweis beruht wesentlich auf folgendem Resultat [18, Lemma 2.4], welches wir an späterer Stelle zitieren werden.

Proposition 1.6 (Macpherson, Neumann)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und G eine Untergruppe der $\operatorname{Sym}(\kappa)$.
Wenn eine mittelmäßige Teilmenge Δ von κ mit $G\{\Delta\} = \operatorname{Sym}(\Delta)$ existiert, dann gibt es eine Permutation $\pi \in \operatorname{Sym}(\kappa)$ mit $\operatorname{Sym}(\kappa) = \big\langle G, \pi \big\rangle$.

Aus dem Satz folgt, dass unter der Annahme von GCH die Konfinalität der $\operatorname{Sym}(\kappa)$ gleich κ^+ und damit eindeutig bestimmt ist. James Sharp und Simon Thomas haben gezeigt, dass dies in ZSF + AC allein nicht der Fall ist. Denn nach dem folgendem Resultat ist es für eine reguläre Kardinalzahl κ konsistent (relativ zu ZSF + AC), dass $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big)$ und 2^κ zwei beliebig vorgegebene reguläre Kardinalzahlen sind, wobei nur die Bedingung $\kappa < \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big) \leq 2^\kappa$ eingehalten werden muss.
Für singuläres κ konnte die entsprechende Frage bislang nicht beantwortet werden.

Satz 1.7 (Sharp, Thomas, 1994/95)
Sei $\mathfrak{M}$ ein abzählbares Standard–Modell der Mengenlehre ZSF + AC + GCH *und seien κ, θ, λ reguläre unendliche Kardinalzahlen in $\mathfrak{M}$, wobei $\kappa < \theta \leq \lambda$ gilt.*

Dann existiert eine Forcing–Halbordnung, die Konfinalitäten und Kardinalitäten bewahrt, so dass in der generischen Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ *gilt*

$$\kappa < \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big) = \theta \leq \lambda = 2^{\kappa}.$$

Beweis: Für $\kappa = \aleph_0$ wird dies in [22, Korollar 2.2] gezeigt und für überabzählbares κ in [23, Theorem 1.1]. Dort findet sich sogar eine leichte Verallgemeinerung obiger Aussage. □

Von Sharp und Thomas stammt auch folgendes erstaunliches Resultat (vgl. [23, Theorem 1.4]).

Satz 1.8 (Sharp, Thomas, 1995)
Sei $\mathfrak{M}$ *ein abzählbares Standard–Modell der Mengenlehre* ZSF + AC + GCH *und seien* κ *und* λ *reguläre Kardinalzahlen in* $\mathfrak{M}$ *mit* $\kappa < \lambda$.
Dann existiert eine Forcing–Halbordnung, die Konfinalitäten und Kardinalitäten bewahrt, so dass in der generischen Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ *gilt*

$$\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big) > \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\lambda)\big).$$

Folglich ist es konsistent (relativ zu ZSF + AC), dass eine Gruppe G und eine Untergruppe U von G mit $\operatorname{konf}(U) > \operatorname{konf}(G)$ existiert.
In Kapitel 3 zeigen wir, dass man bereits in ZSF + AC solche Beispiele findet.

Dagegen hat eine maximale Untergruppe einer nicht endlich–erzeugbaren Gruppe immer höchstens die Konfinalität dieser Gruppe, es gilt sogar:

Proposition 1.9 *Sei* G *eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe und* U *eine Untergruppe von* G. *Sei* X *eine Teilmenge von* G *mit* $|X| < \operatorname{konf}(G)$ *und* $G = \langle U, X \rangle$.
Dann gilt $\operatorname{konf}(U) \leq \operatorname{konf}(G)$.

Beweis: Sei $\mu = \operatorname{konf}(G)$ und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in G.
Sei $X = \{x_\xi;\ \xi \in \theta\}$ für eine Kardinalzahl θ mit $\theta < \mu$.
Offensichtlich ist $\{H_\nu \cap U;\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen von U mit $U = G \cap U = \bigcup_{\nu \in \mu} (H_\nu \cap U)$.
Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist $H_\nu \cap U$ eine echte Untergruppe von U.

Beweis: Angenommen für ein $\nu \in \mu$ gilt $H_\nu \cap U = U$ und damit $U \leq H_\nu$. $(\star)$
Da $X \subseteq G$ ist, existiert nach der Voraussetzung für alle $\xi \in \theta$ ein $\nu_\xi \in \mu$ mit $x_\xi \in H_{\nu_\xi}$. Da $\theta < \mu = \mathrm{cf}(\mu)$ wegen Proposition 1.4 gilt, ist $\zeta = \bigcup_{\xi \in \theta} \nu_\xi \in \mu$. Also folgt $X \subseteq H_\zeta$ und mit $(\star)$ daraus $G = \big\langle U, X \big\rangle \leq \big\langle H_\nu, H_\zeta \big\rangle = H_{\max\{\nu,\zeta\}}$ im Widerspruch dazu, dass dies eine echte Untergruppe von G ist.

Somit ist die Behauptung bewiesen und $\big\{H_\nu \cap U;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in U, d. h. $\mathrm{konf}\,(U) \leq \mu = \mathrm{konf}\,(G)$. □

Es stellt sich nun die Frage, ob eine maximale Untergruppe einer Gruppe immer dieselbe Konfinalität wie die Gruppe hat. Wir zeigen in Kapitel 6, dass dies nicht der Fall ist. Allerdings hat eine maximale Untergruppe M einer überabzählbaren Gruppe G dieselbe Kardinalität wie G. Denn für ein $g \in G - M$ ist $|G| = |\langle M, g\rangle| \leq |M| + \aleph_0$.

Wir werden in dieser Arbeit die Konfinalität einer Reihe von Gruppen bestimmen. Deshalb beenden wir das Kapitel mit der Feststellung, dass man jeweils relativ einfach sehen kann, dass diese Gruppen nicht endlich–erzeugbar und damit ihre Konfinalitäten definiert sind.

Kapitel 2

Ketten in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$

Nach Satz 1.7 kann die Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ für eine reguläre Kardinalzahl κ in ZSF + AC nicht berechnet werden. Insbesondere kann man somit keine konkrete Kette von Untergruppen angeben, die eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ bildet.
Allerdings zeigen wir in diesem Kapitel, dass es bestimmte Eigenschaften gibt, welche die Glieder einer konfinalen Kette immer erfüllen. So muss beispielsweise ihr Index in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ gleich 2^κ sein, unabhängig davon, welche Länge die Kette hat.
Wichtige Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, wie ihre Normalteiler oder die Stabilisatoren bestimmter Teilmengen von κ, haben den Index 2^κ. Wir beschäftigen uns mit der Frage, ob man zu diesen Untergruppen immer eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ findet, die diese Gruppen als Glieder enthält.

Aussagen darüber, welche Untergruppen als Glieder in konfinalen Ketten auftreten können, sind auch aufgrund der folgenden Proposition interessant.

Proposition 2.1 *Sei G eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe und U eine echte Untergruppe von G.*
Wenn es für keine Kardinalzahl μ eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ in G mit $H_0 = U$ gibt, dann gilt:

(i) U ist nicht endlich–erzeugbar,

(ii) $\mathrm{konf}\,(U) \leq \mathrm{konf}\,(G)$,

(iii) U ist in einer maximalen Untergruppe von G enthalten.

Beweis: (i) und (ii): Sei $\mu = \mathrm{konf}\,(G)$ und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in G.

Offensichtlich ist $\{H_\nu \cap U;\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen von U, wobei $U = G \cap U = \bigcup_{\nu \in \mu} (H_\nu \cap U)$ gilt.
Angenommen es existiert ein $\nu \in \mu$, für das $H_\nu \cap U$ keine echte Untergruppe von U ist, d. h. es gilt $H_\nu \cap U = U$ und somit $U \leq H_\nu$.
Dann ist $\{U\} \cup \{H_\xi;\ \nu < \xi \in \mu\}$ eine konfinale Kette in G, deren erstes Glied U ist. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist $\{H_\nu \cap U;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in U und damit gelten (i) und (ii).

(iii): Angenommen die Behauptung wäre falsch. Dann existiert zu jeder echten Untergruppe H von G mit $U \leq H$ eine Gruppe K mit $H < K < G$.

Sei $\mu = |G|$. Wir definieren eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen.
Es sei $H_0 = U$.
Sei $\nu \leq \mu$ und $H_\xi < G$ für $\xi < \nu$ bereits definiert.

<u>1. Fall:</u> ν ist eine Nachfolgerordinalzahl, d. h. $\nu = \gamma + 1$ für eine Ordinalzahl γ.
Dann wählen wir eine Untergruppe $K < G$ mit $H_\gamma < K$ und setzen $H_\nu = K$.

<u>2. Fall:</u> ν ist eine Limesordinalzahl.
Da die H_ξ (für $\xi < \nu$) aufsteigend–geordnet sind, ist $\bigcup_{\xi<\nu} H_\xi$ eine Untergruppe von G. Falls $\bigcup_{\xi<\nu} H_\xi < G$ gilt, so setzen wir $H_\nu = \bigcup_{\xi<\nu} H_\xi$. Ansonsten beenden wir die Konstruktion.

Nach spätestens μ Schritten gilt für eine Limesordinalzahl $\zeta \leq \mu$ im zweiten Fall $G = \bigcup_{\xi<\zeta} H_\xi$. Für $\theta = \mathrm{cf}(\zeta)$ wählen wir eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen $\langle \alpha_\eta;\ \eta \in \theta \rangle$ mit $\zeta = \bigcup_{\eta \in \theta} \alpha_\eta$. Dann ist θ eine Kardinalzahl und $\{H_{\alpha_\eta};\ \eta \in \theta\}$ eine konfinale Kette in G, deren erstes Glied U ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Bemerkung: Wie man dem Beweis entnimmt, genügt für die Gültigkeit der Behauptungen (i) und (ii) die Voraussetzung, dass für eine beliebige Kardinalzahl μ eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ in G der Länge μ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $\nu \in \mu$ gilt $U \not\leq H_\nu$.

Dass die Glieder einer konfinalen Kette in der Sym(κ) immer den Index 2^κ haben müssen, folgt mit Hilfe eines Resultats von John Dixon, Peter Neumann und Simon Thomas [11, Lemma zu Theorem 2].

Hilfssatz 2.2 (J. Dixon, P. Neumann, S. Thomas, 1986)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und G eine Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$*.*
Wenn $[\,\mathrm{Sym}(\kappa) : G\,] < 2^\kappa$ *gilt, so existiert eine mittelmäßige Teilmenge Δ von κ mit* $\mathrm{Sym}(\Delta) \leq G$*.*

Proposition 2.3 *Seien κ, μ unendliche Kardinalzahlen und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)$*.*
Dann gilt für alle $\nu \in \mu$: $[\,\mathrm{Sym}(\kappa) : H_\nu\,] = 2^\kappa$*.*

Beweis: Angenommen es existiert ein $\nu \in \mu$ mit $[\,\mathrm{Sym}(\kappa) : H_\nu\,] < 2^\kappa$.
Dann gibt es nach obigem Hilfssatz 2.2 eine mittelmäßige Teilmenge Δ von κ für die $\mathrm{Sym}(\Delta) \leq H_\nu$ gilt. Daraus folgt insbesondere $H_\nu \restriction \Delta = \mathrm{Sym}(\Delta)$.
Somit existiert nach Proposition 1.6 ein $\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa)$ mit $\mathrm{Sym}(\kappa) = \langle H_\nu, \pi \rangle$.
Da $\mathrm{Sym}(\kappa) = \bigcup_{\nu \in \mu} H_\nu$ ist, gibt es ein $\xi \in \mu$ mit $\pi \in H_\xi$.
Damit folgt $\mathrm{Sym}(\kappa) = \langle H_\nu, \pi \rangle \leq \langle H_\nu, H_\xi \rangle = H_{\max\{\nu,\xi\}}$ im Widerspruch dazu, dass dies eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist. $\square$

2.1 Normalteiler in konfinalen Ketten

Sämtliche echten Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ haben den Index 2^κ (vgl. Felgner [13, Korollar 2.3]). Es stellt sich nun die Frage, ob man zu einem vorgegebenen Normalteiler immer eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ findet, deren erstes Glied dieser Normalteiler ist.

Wir zeigen im Folgenden, dass dies in der Tat der Fall ist. Dazu benutzen wir eine Aussage, deren Beweis sich bei H. D. Macpherson und Peter Neumann findet. Diese geben in [18, Theorem 1.2] eine Charakterisierung der Supplemente der beschränkten symmetrischen Gruppen $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ (für unendliche Kardinalzahlen $\lambda \leq \kappa$) in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ an.

Allerdings hat Stephen Bigelow [6] nachgewiesen, dass der Beweis einen Fehler enthält und dass der Satz falsch ist, wenn man keine über ZSF + AC hinausgehenden kardinalzahlarithmetischen Annahmen macht.

Die folgende Proposition lässt sich allerdings mit Hilfe eines korrekten Teils der Argumentation von Macpherson und Neumann aus [18, Theorem 1.2] zeigen, welchen wir hier wiedergeben.

Proposition 2.4 (H. D. Macpherson, P. Neumann, 1990)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und G eine Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, wobei $\mathrm{Sym}(\kappa) = G \cdot \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ gilt.
Dann existiert eine mittelmäßige Teilmenge $\Delta \subseteq \kappa$ mit $G \upharpoonright \Delta = \mathrm{Sym}(\Delta)$.

Beweis: Sei $\kappa = \bigcup_{\nu\in\kappa} \Sigma_\nu$ eine Zerlegung von κ in κ viele paarweise disjunkte, κ-mächtige Teilmengen.
Angenommen die Behauptung wäre falsch. Dann wäre für alle $\nu \in \kappa$ die Gruppe $G \upharpoonright \Sigma_\nu \neq \mathrm{Sym}(\Sigma_\nu)$.
Wir wählen nun für jedes $\nu \in \kappa$ ein $\pi_\nu \in \mathrm{Sym}(\Sigma_\nu) - G \upharpoonright \Sigma_\nu$. Da diese Permutationen disjunkte Träger haben, ist $\pi = \prod_{\nu\in\kappa} \pi_\nu = \bigcup_{\nu\in\kappa} \pi_\nu \in \mathrm{Sym}(\kappa)$.
Weil nach Voraussetzung $\mathrm{Sym}(\kappa) = G \cdot \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) = \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) \cdot G$ gilt, existieren $\sigma \in G$ und $\rho \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ mit $\pi = \sigma \cdot \rho$.
Dann folgt aber, dass ein $\xi \in \kappa$ mit $\Sigma_\xi \subseteq \mathrm{fix}(\rho)$ existiert. Denn sonst wäre für alle $\nu \in \kappa$ der Schnitt $\Sigma_\nu \cap \mathrm{supp}(\rho) \neq \varnothing$. Da die Σ_ν paarweise disjunkt sind, wäre dann $|\mathrm{supp}(\rho)| \geq \kappa$ im Widerspruch dazu, dass $\rho \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ ist.
Damit gilt $\pi_\xi = \pi \upharpoonright \Sigma_\xi = (\sigma \cdot \rho) \upharpoonright \Sigma_\xi = \sigma \upharpoonright \Sigma_\xi \in G \upharpoonright \Sigma_\xi$, im Widerspruch zur Wahl von π_ξ. □

Damit lässt sich nun zeigen: Wenn es zu einer Kardinalzahl μ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ der Länge μ gibt, so existiert auch eine konfinale Kette der Länge μ, deren erstes Glied die Gruppe $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ ist.

Proposition 2.5 *Seien κ, λ, μ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Wenn $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist, dann ist auch $\{H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$.

Beweis: Da $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ein Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist, bildet $\{H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ mit

$$\mathrm{Sym}(\kappa) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big).$$

Angenommen es existiert ein $\nu \in \mu$, für das $H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ keine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist. Dann gilt $H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und nach obiger Proposition 2.4 existiert eine mittelmäßige Teilmenge $\Delta \subseteq \kappa$ mit $H_\nu \upharpoonright \Delta = \mathrm{Sym}(\Delta)$. Somit existiert gemäß Proposition 1.6 ein $\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa)$ mit $\mathrm{Sym}(\kappa) = \langle H_\nu, \pi \rangle$ und wie im Beweis von

Proposition 2.3 ergibt sich daraus ein Widerspruch. □

Es stellt sich nun die Frage, ob sogar jede konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ein Glied enthält, welches die $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ als Untergruppe hat.
Wir sehen im Folgenden, dass diese Frage in ZSF + AC weder bejaht noch verneint werden kann. Für reguläres und überabzählbares κ sind beide Antworten konsistent (relativ zu ZSF + AC).

Zunächst zeigen wir, dass unter der Annahme von GCH in jeder konfinalen Kette ein Glied existiert, das die $\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\kappa)$ enthält.
Dies folgt aus der folgenden allgemeineren Aussage.

Proposition 2.6 *Sei G eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe, μ eine Kardinalzahl und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in G.*
Wenn U eine Untergruppe von G mit $|U| < \mathrm{cf}(\mu)$ ist, so existiert ein $\nu \in \mu$ mit $U \leq H_\nu$.

Beweis: Da $G = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} H_\nu$ ist, können wir für jedes $u \in U$ ein $\nu_u \in \mu$ mit $u \in H_{\nu_u}$ wählen. Wegen $|U| < \mathrm{cf}(\mu)$ existiert ein $\xi \in \mu$, so dass für alle $u \in U$ gilt $\nu_u \leq \xi$, d. h. $u \in H_{\nu_u} \leq H_\xi$. Damit ist U eine Untergruppe von H_ξ. □

Korollar 2.7 (GCH) *Seien κ, μ unendliche Kardinalzahlen und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)$.
Dann existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\kappa) \leq H_\nu$.

Beweis: O. B. d. A. sei μ regulär. Sonst kann man für $\theta = \mathrm{cf}(\mu)$ eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \theta\rangle$ mit $\mu = \bigcup\limits_{\nu\in\theta} \alpha_\nu$ wählen.
Dann ist θ regulär und $\{H_{\alpha_\nu};\ \nu \in \theta\}$ ebenfalls eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und wir können mit θ statt μ weiterarbeiten.

Es gilt $|\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\kappa)| = \kappa^{<\mathrm{cf}(\kappa)}$ (vgl. Felgner [13, Satz 2.1]). Da wir GCH voraussetzen, ist $\kappa^{<\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa$ und gemäß Satz 1.5 gilt $\kappa < \mu = \mathrm{cf}(\mu)$.
Damit folgt die Behauptung aus Proposition 2.6. □

Somit ist für reguläre Kardinalzahlen κ konsistent, dass in jeder konfinalen Kette ein Glied existiert, welches sämtliche Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ als Untergruppen enthält.

Für singuläres κ gilt dagegen, dass die Glieder einer konfinalen Kette keine größeren Normalteiler als die $\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\kappa)$ enthalten müssen:

Proposition 2.8 (GCH) *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl.*
Dann existiert eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, *so dass für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt* $\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)^+}(\kappa) \nleq H_\nu$.

Beweis: Wegen GCH ist $|\mathrm{Sym}(\kappa)| = \kappa^+ = \mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big)$.
Sei $\mathrm{Sym}(\kappa) = \{\pi_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ eine Aufzählung der Elemente der $\mathrm{Sym}(\kappa)$.
Für $\nu \in \kappa^+$ sei $H_\nu = \langle \pi_\xi;\ \xi < \nu\rangle$. Wie in 1.1 folgt dann, dass $\{H_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist.
Dabei ist für alle $\nu \in \kappa^+$ die Mächtigkeit $|H_\nu| \leq \aleph_0 + |\nu| \leq \kappa$.
Also folgt die Behauptung aus $|\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)^+}(\kappa)| = \kappa^{<\mathrm{cf}(\kappa)^+} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$. □

A. Mekler und S. Thomas haben unabhängig voneinander gezeigt, dass man mit Cohen–Forcing ein Modell der Mengenlehre erhält, in dem $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\omega)\big) = \aleph_1$ gilt (vgl. [22, Theorem 1.2]).
Durch eine Modifikation dieser Konstruktion erhalten wir für jede Kardinalzahl κ ein Modell, in dem eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ existiert, für die gilt, dass keines ihrer Glieder die Gruppe $\mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\kappa)$ enthält.
Die im Folgenden benutzten Eigenschaften des Cohen–Forcings finden sich beispielsweise bei Kunen [16, Kapitel VII und VIII], an dessen Notation wir uns halten.

Proposition 2.9 *Sei $\mathfrak{M}$ ein abzählbares Standard–Modell der Mengenlehre* ZSF + AC.
In $\mathfrak{M}$ seien κ und μ unendliche Kardinalzahlen mit $\kappa < \mu$.
Sei $\mathbb{P} = \langle \mathrm{Fn}(\mu \times \omega, 2, \aleph_0), \supseteq, \varnothing\rangle$ die Forcing–Halbordnung aller endlichen partiellen Funktionen aus $\mu \times \omega$ nach 2.
Dann bewahrt $\mathbb{P}$ Konfinalitäten und Kardinalitäten und Cohen–Forcing liefert ein ZSF + AC*–Modell in dem gilt:*

(i) $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big) = \kappa^+$.

(ii) Es existiert eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ *mit der Eigenschaft, dass für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt* $\mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\kappa) \nleq H_\nu$.

Beweis: Wir wählen im Grundmodell $\mathfrak{M}$ eine aufsteigende Kette $\{X_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ von Teilmengen von μ mit $\mu = \bigcup_{\nu \in \kappa^+} X_\nu$, wobei für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt $|X_{\nu+1} - X_\nu| = \mu$.

Sei G ein $\mathbb{P}$–generischer Filter über $\mathfrak{M}$.
Forcing mit $\mathbb{P}$ bewahrt Konfinalitäten und Kardinalitäten und in der generischen Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ ist $f = \bigcup G$ eine Funktion von $\mu \times \omega$ auf 2.

Wir setzen für alle $\nu \in \kappa^+$:

$$\mathbb{P}_\nu = \big\langle \mathrm{Fn}(X_\nu \times \omega, 2, \aleph_0), \supseteq, \varnothing \big\rangle \text{ und}$$

$$G_\nu = G \cap \mathrm{Fn}(X_\nu \times \omega, 2, \aleph_0).$$

1. Behauptung: Für alle $\nu \in \kappa^+$ ist G_ν ein $\mathbb{P}_\nu$–generischer Filter über $\mathfrak{M}$.
Beweis: Sei $\nu \in \kappa^+$. Dass G_ν ein Filter auf $\mathbb{P}_\nu$ ist, folgt direkt daraus, dass G ein Filter auf $\mathbb{P}$ ist.
Sei $D_\nu \subseteq \mathrm{Fn}(X_\nu \times \omega, 2, \aleph_0)$ mit D_ν ist dicht in $\mathbb{P}_\nu$.
Setze $D = \{p \in \mathrm{Fn}(\mu \times \omega, 2, \aleph_0);\ p \upharpoonright (X_\nu \times \omega) \in D_\nu\}$. Dann ist D dicht in $\mathbb{P}$. Denn sei $q \in \mathrm{Fn}(\mu \times \omega, 2, \aleph_0)$, also $q \upharpoonright (X_\nu \times \omega) \in \mathrm{Fn}(X_\nu \times \omega, 2, \aleph_0)$. Da D_ν dicht in $\mathbb{P}_\nu$ ist, gibt es ein $d \in D_\nu$ mit $d \supseteq q \upharpoonright X_\nu \times \omega$. Dann ist $d \cup q \in \mathrm{Fn}(\mu \times \omega, 2, \aleph_0)$ und $(d \cup q) \upharpoonright (X_\nu \times \omega) = d \in D_\nu$, d. h. $d \cup q \in D$ und $d \cup q \supseteq q$.
Da D dicht in $\mathbb{P}$ ist, existiert ein $p \in D \cap G$. Dann gilt $p \supseteq p \upharpoonright (X_\nu \times \omega)$, also ist auch $p \upharpoonright (X_\nu \times \omega) \in G$ und somit $p \upharpoonright (X_\nu \times \omega) \in D_\nu \cap G_\nu$.
Damit ist G_ν ein $\mathbb{P}_\nu$–generischer Filter über $\mathfrak{M}$.

2. Behauptung: Für alle $\nu, \xi \in \kappa^+$ gilt $\nu \leq \xi \implies \mathfrak{M}[G_\nu] \subseteq \mathfrak{M}[G_\xi]$.
Beweis: Es ist $G_\nu = \{p \in G_\xi;\ \mathrm{Dom}(p) \subseteq X_\nu \times \omega\}$. Da $X_\nu \in \mathfrak{M}$ und $\mathrm{Dom}(p)$ endlich ist, folgt, dass G_ν im Modell $\mathfrak{M}[G_\xi]$ liegt.
Wegen der Minimalität der generischen Erweiterung ist dann $\mathfrak{M}[G_\nu] \subseteq \mathfrak{M}[G_\xi]$.
Damit ist die 2. Behauptung bewiesen.

Analog folgt $\mathfrak{M}[G_\nu] \subseteq \mathfrak{M}[G]$ für alle $\nu \in \kappa^+$.
Den Rest des Beweises führen wir in der generischen Erweiterug $\mathfrak{M}[G]$ durch.
Für $\nu \in \kappa^+$ sei

$$H_\nu = \big\{\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa);\ \pi \in \mathfrak{M}[G_\nu]\big\}.$$

3. Behauptung: Für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt $\mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\kappa) \not\leq H_\nu$.
Beweis: Sei $\nu \in \kappa^+$. Dann existiert nach dem Produktlemma für Cohen–Forcing (in $\mathfrak{M}[G]$) eine Menge $T \subseteq \omega$, die nicht im Modell $\mathfrak{M}[G_\nu]$ enthalten ist (vgl. [16, Kapitel VIII, Theorem 2.1]).
Sei $\pi \in \mathrm{Sym}(\omega)$ eine Permutation mit $\mathrm{supp}(\pi) = T$. Dann ist $\pi \notin \mathfrak{M}[G_\nu]$, denn sonst wäre $T \in \mathfrak{M}[G_\nu]$. Somit gilt $\pi \notin H_\nu$, doch $\pi \in \mathrm{Sym}(\omega) \leq \mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\kappa)$.

4. Behauptung: $\{H_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ ist eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$.
Beweis: Offensichtlich ist $\{H_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen und aus Behauptung 3 folgt, dass es sich dabei um echte Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ handelt.
Sei nun $\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa)$. Dann existiert zu jedem $\alpha \in \kappa$ ein $p_\alpha \in G$ mit $p_\alpha \Vdash \pi(\alpha) = \beta$ für ein $\beta \in \kappa$. Wegen $G = G \cap \mathrm{Fn}(\mu \times \omega, 2, \aleph_0) = G \cap \bigcup_{\nu \in \kappa^+} \mathrm{Fn}(X_\nu \times \omega, 2, \aleph_0) = \bigcup_{\nu \in \kappa^+} G_\nu$ existiert zu jedem $\alpha \in \kappa$ ein $\nu_\alpha \in \kappa^+$ mit $p_\alpha \in G_{\nu_\alpha}$. Da $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$ ist, existiert ein $\xi \in \kappa^+$, so dass für alle $\alpha \in \kappa$ gilt $\nu_\alpha \le \xi$, d. h. $p_\alpha \in G_{\nu_\alpha} \le G_\xi$.
Somit ist $\pi \in \mathfrak{M}[G_\xi]$ und daraus folgt $\pi \in H_\xi$.
Damit ist die 4. Behauptung bewiesen.

Sie impliziert zusammen mit Satz 1.5, dass $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big) = \kappa^+$ gilt. □

Die $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ muss immer in einem der Glieder einer konfinalen Kette enhalten sein:

Korollar 2.10 *Seien κ, μ unendliche Kardinalzahlen und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)$.
Dann existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) \le H_\nu$.

Beweis: Es gilt $|\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)| = \kappa$ und damit folgt die Behauptung wie im Beweis von Korollar 2.7. □

2.2 Stabilisatoren in konfinalen Ketten

Wir wenden uns nun verschiedenen Stabilisatoren von Teilmengen von κ zu und fragen, ob diese als Glieder in konfinalen Ketten in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ auftreten können.
Es folgt relativ leicht, dass für blockweise Stabilisatoren, für Faststabilisatoren sowie für punktweise Stabilisatoren von Teilmengen, deren Komplement κ-mächtig ist, die Antwort „Nein“ lautet:

Proposition 2.11 *Seien κ und μ unendliche Kardinalzahlen, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in S.*

(i) Wenn G eine Untergruppe von S ist und eine mittelmäßige Teilmenge $\Delta \subseteq \kappa$ mit $G \restriction \Delta = \mathrm{Sym}(\Delta)$ existiert, so gilt für alle $\nu \in \mu$: $G \not\le H_\nu$.

(ii) Wenn $\Delta \subseteq \kappa$ mit $|\kappa - \Delta| = \kappa$ ist, so gilt für alle $\nu \in \mu$: $S_{(\Delta)} \nleq H_\nu$.

(iii) Wenn $\Delta \subseteq \kappa$ ist, so gilt für alle $\nu \in \mu$: $S_{\{\Delta\}} \nleq H_\nu$ und $S_{[\Delta]} \nleq H_\nu$.

Beweis: (i) Angenommen es existiert ein $\nu \in \mu$ mit $G \leq H_\nu$.
Dann gibt es nach Proposition 1.6 ein $\pi \in S$ mit $S = \langle G, \pi \rangle \leq \langle H_\nu, \pi \rangle$. Wie im Beweis von Proposition 2.3 folgt daraus ein Widerspruch.

(ii) Weil $|\kappa - \Delta| = \kappa$ ist, können wir eine mittelmäßige Teilmenge $\Gamma \subseteq \kappa$ mit $\Delta \subseteq \Gamma$ wählen.
Dann gilt $\mathrm{Sym}(\kappa - \Gamma) \leq \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) = S_{(\Delta)}$ und damit ist $S_{(\Delta)} \upharpoonright (\kappa - \Gamma) = \mathrm{Sym}(\kappa - \Gamma)$. Weil $\kappa - \Gamma$ ebenfalls eine mittelmäßige Menge ist, folgt die Behauptung aus (i).

(iii) Es gilt $S_{(\Delta)} \leq S_{\{\Delta\}}$ und $S_{(\kappa-\Delta)} \leq S_{\{\Delta\}}$. Dabei ist $|\Delta| = \kappa$ oder $|\kappa - \Delta| = \kappa$. Also impliziert (ii), dass für alle $\nu \in \mu$ gilt $S_{\{\Delta\}} \nleq H_\nu$. Wegen $S_{\{\Delta\}} \leq S_{[\Delta]}$ folgt daraus die Behauptung. □

Es bleibt die Frage, welche Aussagen man für den punktweisen Stabilisator einer Teilmenge Δ von κ mit $|\kappa - \Delta| < \kappa$ treffen kann. Proposition 2.3 hilft uns hier nicht weiter, da für den Index einer solchen Gruppe gilt $[\,\mathrm{Sym}(\kappa) : S_{(\Delta)}\,] = \kappa^{|\Delta|} = \kappa^\kappa = 2^\kappa$ (vgl. Felgner [13, Lemma 3.7]).
Wie wir im Folgenden zeigen werden, ist die Situation hier vergleichbar mit der bei den Normalteilern der $\mathrm{Sym}(\kappa)$.
Zunächst gilt, dass immer eine konfinale Kette existiert, die einen solchen punktweisen Stabilisator als erstes Glied enthält:

Korollar 2.12 *Seien κ, μ unendliche Kardinalzahlen, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ mit $|\kappa - \Delta| < \kappa$.*
Wenn eine konfinale Kette der Länge μ in S existiert, dann existiert auch eine konfinale Kette der Länge μ, deren erstes Glied $S_{(\Delta)}$ ist.

Beweis: Gemäß Proposition 2.5 existiert eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ in S mit $H_0 = \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$. Weil $|\kappa - \Delta| < \kappa$ ist, gilt $S_{(\Delta)} \leq \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Die Aussage, dass es zu einer Teilmenge Δ von κ mit $\aleph_0 \leq |\kappa - \Delta| < \kappa$ auch konfinale Ketten gibt, deren sämtliche Glieder $S_{(\Delta)}$ nicht enthalten, ist unabhängig von ZSF + AC.

Wenn man GCH annimmt, existieren solche Ketten nicht:

Korollar 2.13 (GCH) *Seien κ, μ unendliche Kardinalzahlen, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$, Δ eine Teilmenge von κ mit $\aleph_0 \leq |\kappa - \Delta| < \kappa$ und $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in S. Dann existiert ein $\nu \in \mu$ mit $S_{(\Delta)} \leq H_\nu$.*

Beweis: Weil wir GCH annehmen, gilt $|S_{(\Delta)}| = |\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)| = 2^{|\kappa-\Delta|} = |\kappa - \Delta|^+ \leq \kappa$. Damit folgt die Behauptung wie im Beweis von Korollar 2.7. $\square$

Bemerkung: Wenn $\kappa - \Delta$ endlich ist, dann ist der punktweise Stabilisator $S_{(\Delta)}$ eine endliche Gruppe. Somit ist offensichtlich bereits in ZSF + AC beweisbar, dass in jeder konfinalen Kette in der Sym(κ) ein Glied existiert, welches $S_{(\Delta)}$ enthält.

Dagegen werden wir nun mit Hilfe der Forcing–Konstruktion aus Proposition 2.9 für eine Teilmenge Δ von κ mit $\aleph_0 \leq |\kappa - \Delta| < \kappa$ ein Modell der Mengenlehre angeben, in dem eine kürzeste konfinale Kette in der Sym(κ) existiert, welche die Eigenschaft hat, dass keines ihrer Glieder $S_{(\Delta)}$ enthält.
Wir beweisen zuvor einen Hilfssatz, der ein Kriterium dafür angibt, wann man eine Permutation findet, welche eine gegebene Bijektion fortsetzt. Er wird in dieser Arbeit mehrfach benutzt werden.

Hilfssatz 2.14 *Sei λ eine unendliche Kardinalzahl und A, B, M seien Mengen mit $A \cup B \subseteq M$. Dann gilt für eine Bijektion $\varphi : A \longrightarrow B$ mit $|\mathrm{supp}(\varphi)| < \lambda$*

$$(\exists\, \pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(M) :\ \varphi \subseteq \pi) \iff |M - A| = |M - B|.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Es gilt $\pi \restriction A = \varphi$ ist eine Bijektion von A auf B und $\pi \restriction (M - A)$ ist eine Bijektion von $M - A$ auf $M - B$. Also ist $|M - A| = |M - B|$.

„$\Leftarrow$“: O. B. d. A. sei $|B - A| \leq |A - B|$. (Sonst betrachte die Bijektion $\varphi^{-1} : B \longrightarrow A$ und vertausche die Rolle von A und B.)
Es ist $A - B \subseteq \mathrm{supp}(\varphi)$, denn für ein $x \in A - B$ ist $\varphi(x) \in B$, d. h. $x \neq \varphi(x)$.

<u>1. Fall:</u> $|B - A| = |A - B|$.
Wir wählen eine Bijektion $\psi : B - A \longrightarrow A - B$.
Dann ist $\pi = \varphi \cup \psi \in \mathrm{Sym}(A \cup B)$. In diesem Fall gilt $|B - A| = |A - B| \leq |\mathrm{supp}(\varphi)| < \lambda$.
Damit ist $|\mathrm{supp}(\pi)| = |\mathrm{supp}(\varphi)| + |\mathrm{supp}(\psi)| = |\mathrm{supp}(\varphi)| + |B - A| < \lambda + \lambda = \lambda$.
Also ist $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(A \cup B) \leq \mathrm{Sym}_\lambda(M)$.

<u>2. Fall:</u> $|B - A| < |A - B|$.
Dann gilt:

(i) $M - A$ ist unendlich.
Denn es ist $M - A = (M - (A \cup B)) \cup (B - A)$, wobei $(M - (A \cup B)) \cap (B - A) = \varnothing$, und $M - B = (M - (A \cup B)) \cup (A - B)$, wobei $(M - (A \cup B)) \cap (A - B) = \varnothing$. Falls $M - A$ endlich wäre, so wäre wegen $|B - A| < |A - B|$ auch $|M - A| < |M - B|$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(ii) $\operatorname{supp}(\varphi)$ ist unendlich.
Behauptung: Es existiert ein $x \in A - B$, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $\varphi^n(x) \in A \cap B$.
Beweis: Angenommen für alle $x \in A - B$ existiert eine natürliche Zahl $n_x \geq 1$ mit $\varphi^{n_x} \notin A \cap B$. Dann ist $\varphi^{n_x} \in B - A$.
Für $x, y \in A - B$ mit $x \neq y$ gilt $\varphi^{n_x}(x) \neq \varphi^{n_y}(y)$. Denn falls $\varphi^{n_x}(x) = \varphi^{n_y}(y)$ ist, so folgt aus der Bijektivität von φ zunächst $n_x \neq n_y$. O. B. d. A. sei $n_x < n_y$. Dann ist $x = \varphi^{n_y - n_x}(y)$. Da $n_y - n_x \geq 1$ ist, muss $\varphi^{n_y - n_x}(y) \in B$ gelten, doch dies steht im Widerspruch dazu, dass $x \in A - B$ ist.
Damit folgt $|B - A| \geq |A - B|$, im Widerspruch zur Voraussetzung dieses Falles.
Also ist die Behauptung bewiesen. Es gilt dabei: Wenn k und l natürliche Zahlen mit $1 \leq k < l$ sind, so ist $\varphi^k(x) \neq \varphi^l(x)$. Denn sonst wäre $x = \varphi^{l-k}(x)$ mit $l - k \geq 1$ und wieder würde sich derselbe Widerspruch wie oben ergeben.
Insbesondere ist für alle $n \in \omega$ somit $\varphi^n(x) \in \operatorname{supp}(\varphi)$.
Folglich ist $\operatorname{supp}(\varphi)$ unendlich.

Wir wählen eine Menge C mit $B - A \subseteq C \subseteq M - A$ und $|C| = |A - B| + \aleph_0$. Dies ist möglich, da $|B - A| < |A - B| \leq |M - B| = |M - A|$ und $|M - A| \geq \aleph_0$.
Es gilt $(A \cup C) - B = (A - B) \cup (C - B)$.
Wir unterscheiden die folgenden Fälle.

(i) $A - B$ ist unendlich.
Da $A \cap C = \varnothing$ und $|C - B| \leq |C| = |A - B|$ ist, gilt $|(A - B) \cup (C - B)| = |A - B| + |C - B| = |A - B| = |C|$.

(ii) $A - B$ ist endlich.
Dann ist unserer Voraussetzung nach auch $B - A$ endlich und wegen $C \cap A = \varnothing$ ist somit $C = (C - B) \cup (B - A)$ und damit $|C| = |C - B|$. Insbesondere ist $C - B$ unendlich und es folgt $|(A - B) \cup (C - B)| = |C - B| = |C|$.

In beiden Fällen ist $|(A \cup C) - B| = |(A - B) \cup (C - B)| = |C|$.

Sei $\rho : C \longrightarrow (A \cup C) - B$ eine Bijektion.

Setze $\pi = \varphi \cup \rho$. Dann ist π eine Abbildung mit $\mathrm{Dom}(\pi) = A \cup C$, wobei $A \cap C = \varnothing$, und $\mathrm{Im}(\pi) = B \cup \big((A \cup C) - B\big) = A \cup C$, da $B = (B - A) \cup (B \cap A) \subseteq C \cup A$ ist.
Da φ und ρ bijektiv sind, gilt dies offensichtlich auch für π. Also ist $\pi \in \mathrm{Sym}(A \cup C)$.
Da $A - B \subseteq \mathrm{supp}(\varphi)$ ist, gilt $|A - B| < \lambda$.
Außerdem ist $|\mathrm{supp}(\rho)| \leq |C| = |A - B| + \aleph_0 < \lambda$. Denn $\lambda \geq \aleph_1$, da nach (ii) $\mathrm{supp}(\varphi)$ unendlich ist.
Es folgt $|\mathrm{supp}(\pi)| = |\mathrm{supp}(\varphi)| + |\mathrm{supp}(\rho)| < \lambda$.
Also ist $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(A \cup C) \leq \mathrm{Sym}_\lambda(M)$. □

Proposition 2.15 *Sei $\mathfrak{M}$ ein abzählbares Standard–Modell von* ZSF + AC.
In $\mathfrak{M}$ seien κ und μ unendliche Kardinalzahlen mit $\kappa < \mu$ und Δ eine Teilmenge von κ mit $\aleph_0 \leq \lambda = |\kappa - \Delta| < \kappa$.
Sei $\mathbb{P} = \big\langle \mathrm{Fn}(\mu \times \lambda, 2, \aleph_0), \supseteq, \varnothing \big\rangle$ die Forcing–Halbordnung aller endlichen partiellen Funktionen aus $\mu \times \lambda$ nach 2.
Dann bewahrt $\mathbb{P}$ Konfinalitäten und Kardinalitäten und Cohen–Forcing liefert ein ZSF + AC*–Modell in dem gilt:*

- *(i)* $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big) = \kappa^+$.
- *(ii) Es existiert eine konfinale Kette $\{U_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)$ *mit der Eigenschaft, dass für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt* $\mathrm{Sym}(\kappa)_{(\Delta)} \not\leq U_\nu$.

Beweis: Wie in Proposition 2.9 wählen wir im Grundmodell $\mathfrak{M}$ eine aufsteigende Kette $\{X_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ von Teilmengen von μ mit $\mu = \bigcup_{\nu \in \kappa^+} X_\nu$, wobei für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt $|X_{\nu+1} - X_\nu| = \mu$.

Sei G ein $\mathbb{P}$–generischer Filter über $\mathfrak{M}$.
Forcing mit $\mathbb{P}$ bewahrt Konfinalitäten und Kardinalitäten und in der generischen Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ ist $f = \bigcup G$ eine Funktion von $\mu \times \lambda$ auf 2.
Wir setzen wieder für alle $\nu \in \kappa^+$:

$$\mathbb{P}_\nu = \big\langle \mathrm{Fn}(X_\nu \times \lambda, 2, \aleph_0), \supseteq, \varnothing \big\rangle,$$

$$G_\nu = G \cap \mathrm{Fn}(X_\nu \times \lambda, 2, \aleph_0) \quad \text{und}$$

$$H_\nu = \big\{\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa);\ \pi \in \mathfrak{M}[G_\nu]\big\}.$$

Wie in Proposition 2.9 folgt, dass für alle $\nu \in \kappa^+$ die Menge G_ν ein $\mathbb{P}_\nu$–generischer Filter über $\mathfrak{M}$ ist und für $\nu \leq \xi \in \kappa^+$ gilt $\mathfrak{M}[G_\nu] \subseteq \mathfrak{M}[G_\xi] \subseteq \mathfrak{M}[G]$.

Den Rest des Beweises führen wir in der generischen Erweiterung $\mathfrak{M}[G]$ durch.
Sei $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$.

Behauptung: Für alle $\nu \in \kappa^+$ gilt $S_{(\kappa-\lambda)} \nleq H_\nu$.
Beweis: Sei $\nu \in \kappa^+$. Dann existiert nach dem Produktlemma für Cohen–Forcing eine Menge $T \subseteq \lambda$, die nicht im Modell $\mathfrak{M}[G_\nu]$ enthalten ist. Sei $\pi \in S$ eine Permutation mit $\mathrm{supp}(\pi) = T$.
Folglich ist $\pi \in \mathrm{Sym}(\lambda) = S_{(\kappa-\lambda)}$. Doch weil $\pi \notin \mathfrak{M}[G_\nu]$ ist, gilt $\pi \notin H_\nu$.

Wie im Beweis von Proposition 2.9 folgt, dass $\{H_\nu;\ \nu \in \kappa^+\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ bildet und daraus, dass $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big) = \kappa^+$ ist.

Da $\mathbb{P}$ Kardinalitäten bewahrt, gilt $|\kappa - \Delta| = \lambda < \kappa$ auch in $\mathfrak{M}[G]$.
Weil $|\kappa - \lambda| = \kappa = |\Delta|$ und $|\kappa - (\kappa - \lambda)| = \lambda = |\kappa - \Delta|$ ist, existiert nach Hilfssatz 2.14 eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa)$ mit $\pi(\kappa - \lambda) = \Delta$.

Wir betrachten den inneren Automorphismus

$$\varphi : \mathrm{Sym}(\kappa) \longrightarrow \mathrm{Sym}(\kappa),\ \sigma \mapsto \pi \cdot \sigma \cdot \pi^{-1}.$$

Dann ist $\{\varphi(H_\nu);\ \nu \in \kappa^+\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und außerdem gilt $\varphi\big(S_{(\kappa-\lambda)}\big) = \pi \cdot S_{(\kappa-\lambda)} \cdot \pi^{-1} = S_{(\pi(\kappa-\lambda))} = S_{(\Delta)}$.
Mit obiger Behauptung folgt daraus für alle $\nu \in \kappa^+ :\ S_{(\Delta)} = \varphi\big(S_{(\kappa-\lambda)}\big) \nleq \varphi\big(H_\nu\big)$.
Somit ist die Proposition bewiesen. □

Aus den bewiesenen Resultaten, dass bestimmte Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ niemals als Glieder konfinaler Ketten auftreten, ziehen wir zum Abschluss dieses Kapitels noch eine Folgerung.

Korollar 2.16 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und G eine Untergruppe von S.*
Wenn G eine der folgenden Eigenschaften hat:

(1) $[\,S : G\,] < 2^\kappa$,

(2) Es existiert eine mittelmäßige Teilmenge Δ von κ mit $G \restriction \Delta = \mathrm{Sym}(\Delta)$,

(3) $S_{(\Delta)} \leq G$ *für eine Teilmenge Δ von κ mit $|\kappa - \Delta| = \kappa$,*

(4) $S_{\{\Delta\}} \leq G$ *für eine Teilmenge Δ von κ,*

dann gilt:

(i) $\mathrm{konf}\,(G) \leq \mathrm{konf}\,(S)$,

(ii) G ist in einer maximalen Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ *enthalten.*

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus den Propositionen 2.3 und 2.11 in Verbindung mit Proposition 2.1. $\square$

Kapitel 3

Ketten in den Normalteilern der $\mathrm{Sym}(\kappa)$

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit konfinalen Ketten in den nicht–trivialen Normalteilern der $\mathrm{Sym}(\kappa)$. Dies sind die Gruppen $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ für eine unendliche Kardinalzahl λ mit $\lambda \leq \kappa$ sowie die alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(\kappa)$.
Wir werden zeigen, dass die Konfinalität der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ (für $\lambda \leq \kappa$) gleich der Konfinalität der Kardinalzahl λ und die Konfinalität der $\mathrm{Alt}(\kappa)$ gleich $\aleph_0$ ist. Die Situation ist also eine wesentlich andere als im Fall der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, mit der wir uns in den ersten beiden Kapiteln beschäftigt haben.

3.1 Die Konfinalität der Normalteiler

Wir geben in diesem Abschnitt konfinale Ketten der Länge $\mathrm{cf}(\lambda)$ in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ an, zunächst für reguläres λ und dann für singuläres λ. Danach zeigen wir, dass es keine konfinalen Ketten kürzerer Länge geben kann.

Satz 3.1 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Wenn λ regulär ist, dann gilt $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \leq \lambda$.

Beweis: In der Ordinalzahlarithmetik gilt der Satz über die Division mit Rest, d. h. zu jeder Ordinalzahl α existieren eindeutig bestimmte Ordinalzahlen β und γ mit $\alpha = \lambda \cdot \beta + \gamma$ und $\gamma < \lambda$ (vgl. Felgner [12, Proposition 12.8]).
Die Abbildung $\varphi : \kappa \longrightarrow \lambda$ sei definiert durch $\alpha \mapsto \gamma$, wobei $\alpha = \lambda \cdot \beta + \gamma$ mit $\beta \in \kappa$.

Für $\nu \in \lambda$ setzen wir

$$H_\nu = \{\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \subseteq \nu\}.$$

Diese Gruppen kann man auch auf die folgende Weise beschreiben:
Für $\nu \in \lambda$ sei $M_\nu = \{\lambda \cdot \beta + \gamma;\ \beta \in \kappa \text{ und } \gamma \in \nu\}$. Dann ist $\kappa = \bigcup_{\nu\in\lambda} M_\nu$ und es gilt $H_\nu = \{\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \mathrm{supp}(\pi) \subseteq M_\nu\} = \mathrm{Sym}_\lambda(M_\nu)$.

1. Behauptung: Für alle $\nu \in \lambda$ ist H_ν eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Beweis: Sei $\nu \in \lambda$ und $\pi, \sigma \in H_\nu$. Dann ist $\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi \cdot \sigma^{-1})\big) \subseteq \varphi\big(\mathrm{supp}(\pi) \cup \mathrm{supp}(\sigma)\big) = \varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \cup \varphi\big(\mathrm{supp}(\sigma)\big) \subseteq \nu$, d. h. $\pi \cdot \sigma^{-1} \in H_\nu$.
Also ist H_ν eine Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Setze $\pi = (\nu, \nu+1)$. Dann ist $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) - H_\nu$, denn es gilt $\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) = \{\nu, \nu+1\}$, da $\nu, \nu+1 < \lambda$.
Damit ist die 1.Behauptung bewiesen.

Offensichtlich gilt für $\nu, \xi \in \lambda:\ \big(\nu \leq \xi \in \lambda \implies H_\nu \leq H_\xi\big)$.

2. Behauptung: $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \bigcup_{\nu\in\lambda} H_\nu$
Beweis: Sei $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. Dann ist $|\mathrm{supp}(\pi)| < \lambda$. Daraus folgt $\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \subseteq \lambda$ mit $\big|\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big)\big| < \lambda$. Da λ regulär ist, kann $\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big)$ nicht konfinal in λ liegen. Somit existiert ein $\gamma \in \lambda$ mit $\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \subseteq \gamma$.
Also ist $\pi \in H_\gamma$.

Insgesamt folgt, dass $\big\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ist. $\square$

Bemerkung: Für beliebige unendliche Kardinalzahlen κ, λ, μ mit $\lambda \leq \kappa$, $\mu \leq \kappa$ und $\lambda \leq \mathrm{cf}(\mu)$ liefert obige Konstruktion eine Darstellung der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ als Union einer aufsteigenden Kette von μ vielen echten Untergruppen.

Wenn λ eine singuläre Kardinalzahl ist, dann bilden die Normalteiler der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ eine konfinale Kette in dieser Gruppe:

Proposition 3.2 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Wenn λ singulär ist, dann gilt $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \leq \mathrm{cf}(\lambda)$.

Beweis: Wenn λ singulär ist, so ist $\lambda = \aleph_\zeta$ für eine Limesordinalzahl ζ.

Sei $\mu = \mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\zeta)$ und $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \mu \rangle$ eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen mit $\zeta = \bigcup_{\nu \in \mu} \alpha_\nu$.
Dann existiert für jedes $\pi \in \mathrm{Sym}_{\aleph_\zeta}(\kappa)$ ein $\nu \in \mu$ mit $|\mathrm{supp}(\pi)| < \aleph_{\alpha_\nu}$.
Also ist $\{\mathrm{Sym}_{\aleph_{\alpha_\nu}}(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_{\aleph_\zeta}(\kappa)$. □

Aus den obigen beiden Resultaten folgt nun:

Korollar 3.3 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \leq \mathrm{cf}(\lambda)$.

Die umgekehrte Ungleichung zeigen wir zunächst für die $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$, wenn κ eine reguläre Kardinalzahl ist.

Proposition 3.4 *Sei κ eine reguläre unendliche Kardinalzahl.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)\big) \geq \kappa$.

Beweis: O. B. d. A. sei $\kappa \geq \aleph_1$, da sonst die Behauptung offensichtlich ist.
Angenommen es existiert eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ in der $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$, wobei μ eine Kardinalzahl mit $\aleph_0 \leq \mu < \kappa$ ist.

Behauptung: Es existiert eine Ordinalzahl $\beta \in \kappa$, so dass für alle $\nu \in \mu$ gilt
$\mathrm{Sym}(\beta) = \{\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa);\ \mathrm{supp}(\pi) \subseteq \beta\} \not\leq H_\nu$.
Beweis: Angenommen für jedes $\beta \in \kappa$ existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}(\beta) \leq H_\nu$.
Da $\mu < \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ ist, folgt mit dem Schubfachprinzip, dass ein $\alpha \in \mu$ existiert, für das $|\{\beta \in \kappa;\ \mathrm{Sym}(\beta) \leq H_\alpha\}| = \kappa$ ist.
Sei $X = \{\beta \in \kappa;\ \mathrm{Sym}(\beta) \leq H_\alpha\}$. Da $X \subseteq \kappa$ und $|X| = \kappa$, ist X konfinal in κ.

Sei $\pi \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$. Dann ist $\mathrm{supp}(\pi)$ eine Teilmenge von κ mit einer Mächtigkeit echt kleiner als κ. Da κ regulär ist, kann $\mathrm{supp}(\pi)$ nicht konfinal in κ sein. Also existiert ein $\gamma \in \kappa$ mit $\mathrm{supp}(\pi) \subseteq \gamma$, d. h. $\pi \in \mathrm{Sym}(\gamma)$.
Wähle $\beta \in X$ mit $\gamma \leq \beta$. Dann ist $\pi \in \mathrm{Sym}(\beta) \leq H_\alpha$.

Da $\pi \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ beliebig war, folgt $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) \leq H_\alpha$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass H_α eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ ist.
Somit ist die Behauptung bewiesen.

Sei nun $\beta \in \kappa$, so dass für alle $\nu \in \mu$ gilt $\mathrm{Sym}(\beta) \not\leq H_\nu$.

Wir können o. B. d. A. $\mu \leq \beta$ annehmen. Denn falls $\beta < \mu$ ist, so folgt aus obiger Behauptung, dass für alle $\nu \in \mu$ auch $\mathrm{Sym}(\mu) \not\leq H_\nu$ ist und wir können mit μ statt mit β weiterarbeiten.
Für alle $\nu \in \mu$ ist also $H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\beta)$ eine echte Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\beta)$.
Da $\beta \in \kappa$ ist, gilt $\mathrm{Sym}(\beta) = \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) \cap \mathrm{Sym}(\beta) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\beta)\big)$.
Damit ist $\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\beta);\ \ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\beta)$, d. h. $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\beta)\big) \leq \mu$.
Doch dies steht im Widerspruch zu Satz 1.5 gemäß dem $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\beta)\big) > |\beta| \geq \mu$ gilt.
□

Nun zeigen wir, dass für beliebige $\lambda \leq \kappa$ die Konfinalität der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ mindestens $\mathrm{cf}(\lambda)$ sein muss. Die Strategie des Beweises ist in gewisser Weise vergleichbar zu der, mit der Macpherson und Neumann gezeigt haben, dass $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big) > \kappa$ gilt. Allerdings ist die Argumentation hier eine andere.

Proposition 3.5 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Wenn Δ und Γ Teilmengen von κ mit $|\kappa - \Delta| < \lambda$ und $|\Delta \triangle \Gamma| < \lambda$ sind, dann gilt

$$\mathrm{Sym}_\lambda(\Delta \cup \Gamma) = \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \,\cup\, \mathrm{Sym}_\lambda(\Gamma)\big\rangle$$

Beweis: Es ist $\mathrm{Sym}_\lambda(\Delta \cup \Gamma) \leq \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cup \mathrm{Sym}_\lambda(\Gamma)\big\rangle$ zu zeigen.
Sei also $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta \cup \Gamma)$.
Wegen $|\kappa - \Delta| < \lambda \leq \kappa$ ist $|\Delta| = \kappa$. Daraus folgt $|\Delta \cap \Gamma| = \kappa$, denn $\Delta = (\Delta - \Gamma) \cup (\Delta \cap \Gamma)$ und $|\Delta - \Gamma| \leq |\Delta \triangle \Gamma| < \lambda \leq \kappa$. Damit ist auch $|\Gamma| = \kappa$.
Es ist $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta \cup \Gamma)$ und damit $\pi(\Delta \cap \Gamma) \subseteq \Delta \cup \Gamma = (\Delta \triangle \Gamma) \cup (\Delta \cap \Gamma)$. Also gilt $\pi(\Delta\cap\Gamma) = \pi(\Delta\cap\Gamma)\cap\big((\Delta \triangle \Gamma)\cup(\Delta\cap\Gamma)\big) = \big(\pi(\Delta\cap\Gamma)\cap(\Delta \triangle \Gamma)\big)\cup\big(\pi(\Delta\cap\Gamma)\cap(\Delta\cap\Gamma)\big)$.
Da nach Voraussetzung $|\Delta \triangle \Gamma| < \lambda \leq \kappa$ ist, folgt daraus:
$\kappa = |\Delta \cap \Gamma| = |\pi(\Delta \cap \Gamma)| = |\pi(\Delta \cap \Gamma) \cap (\Delta \cap \Gamma)|$
Damit gilt $\kappa = |\pi(\Delta \cap \Gamma) \cap \Delta \cap \Gamma| \leq |\pi(\Delta \cap \Gamma) \cap \Delta| \leq \kappa$, d. h. $|\pi(\Delta \cap \Gamma) \cap \Delta| = \kappa$.

Sei A eine mittelmäßige Teilmenge von $\Delta \cap \pi(\Delta \cap \Gamma)$, d. h. $|A| = |\Delta \cap \pi(\Delta \cap \Gamma)| = \big|\big(\Delta \cap \pi(\Delta \cap \Gamma)\big) - A\big| = \kappa$.
Sei $B = \pi^{-1}(A)$.
Dann ist $B \subseteq \pi^{-1}\big(\Delta \cap \pi(\Delta \cap \Gamma)\big) = \pi^{-1}(\Delta) \cap (\Delta \cap \Gamma) \subseteq \Delta \cap \Gamma \subseteq \Delta$. $(\star)$
Ebenso ist $A \subseteq \Delta$ und $\pi^{-1} \upharpoonright A$ eine Bijektion von A auf B mit $|\mathrm{supp}(\pi^{-1} \upharpoonright A)| \leq |\mathrm{supp}(\pi)| < \lambda$.

Es gilt $|\Delta - A| = |\Delta - B| = \kappa$.
Denn $\kappa = |\big(\Delta \cap \pi(\Delta \cap \Gamma)\big) - A| \leq |\Delta - A| \leq \kappa$ und $\kappa = |\big(\Delta \cap \pi(\Delta \cap \Gamma)\big) - A| \leq |\pi(\Delta \cap \Gamma) - A| = |\pi(\Delta \cap \Gamma) - \pi(B)| = |\pi\big((\Delta \cap \Gamma) - B\big)| = |(\Delta \cap \Gamma) - B| \leq |\Delta - B| \leq \kappa$.

Also gibt es nach Hilfssatz 2.14 eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta)$ mit $\pi^{-1} \restriction A \subseteq \sigma$. $\quad (\dagger)$

Wir wählen nun $C \subseteq B$ mit $|C| = |\Delta - \Gamma|$. Dies ist möglich, da $|B| = \kappa$.
Dann ist $(\Delta - \Gamma) \cup C \subseteq \Delta$ mit $(\Delta - \Gamma) \cap C = \varnothing$, weil nach $(\star)$ $C \subseteq B \subseteq \Delta \cap \Gamma$ gilt.
Nun wählen wir eine Permutation $\rho \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, die $\Delta - \Gamma$ und C vertauscht und sonst auf Δ die Identität ist.
Da $|C| = |\Delta - \Gamma| \leq |\Delta \triangle \Gamma| < \lambda$ ist $|\mathrm{supp}(\rho)| = |\Delta - \Gamma| + |C| < \lambda$, d. h. $\rho \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta)$.

Weil $A = \pi(B)$ ist, folgt für jedes $x \in B$ aus $(\dagger)$: $\sigma\big(\pi(x)\big) = \pi^{-1}\big(\pi(x)\big) = x$.
Setze nun $\tau = \rho \cdot \sigma \cdot \pi \cdot \rho^{-1} \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta \cup \Gamma)$.
Sei $y \in \Delta - \Gamma$. Nach Definition von ρ ist dann $\rho^{-1}(y) \in C \subseteq B$ und somit $\tau(y) = \rho \cdot \sigma \cdot \pi\big(\rho^{-1}(y)\big) = \rho\big(\rho^{-1}(y)\big) = y$.
Deshalb ist $\tau \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Gamma)$.

Insgesamt folgt $\pi = \sigma^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \tau \cdot \rho \in \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cup \mathrm{Sym}_\lambda(\Gamma) \big\rangle$. $\square$

Proposition 3.6 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$ und $\Delta \subseteq \kappa$ mit $|\kappa - \Delta| < \lambda$.*
Dann existiert ein $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$, so dass $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta), \pi \big\rangle$ ist.

Beweis: Sei $\Gamma \subseteq \kappa$ so gewählt, dass $\kappa - \Delta \subseteq \Gamma$ und $|\kappa - \Gamma| = |\kappa - \Delta| < \lambda$. Dann ist $\kappa = \Delta \cup \Gamma$ und somit $(\kappa - \Delta) \cap (\kappa - \Gamma) = \varnothing$.
Wir wählen nun ein $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$, welches $\kappa - \Delta$ und $\kappa - \Gamma$ vertauscht und auf $\kappa - \big((\kappa - \Delta) \cup (\kappa - \Gamma)\big) = \Delta \cap \Gamma$ die Identität ist.
Da $\kappa - \Delta \subseteq \Gamma$ ist, folgt $\pi(\Delta) = \pi\big((\Delta \cap \Gamma) \cup (\Delta - \Gamma)\big) = \pi\big((\Delta \cap \Gamma) \cup (\kappa - \Gamma)\big) = (\Delta \cap \Gamma) \cup (\kappa - \Delta) = (\Delta \cap \Gamma) \cup (\Gamma - \Delta) = \Gamma$.
Also ist $\mathrm{Sym}_\lambda(\Gamma) = \mathrm{Sym}_\lambda\big(\pi(\Delta)\big) = \pi \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cdot \pi^{-1}$.
Da $|\Delta \triangle \Gamma| = |\Delta - \Gamma| + |\Gamma - \Delta| \leq |\kappa - \Gamma| + |\kappa - \Delta| < \lambda$ ist, folgt mit Proposition 3.5
$\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta \cup \Gamma) = \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta), \mathrm{Sym}_\lambda(\Gamma) \big\rangle = \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta), \pi \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cdot \pi^{-1} \big\rangle \leq \big\langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta), \pi \big\rangle \leq \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. $\square$

Satz 3.7 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \geq \mathrm{cf}(\lambda)$.

Beweis: Angenommen es existiert eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$, wobei μ eine Kardinalzahl mit $\aleph_0 \leq \mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ ist.

Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ gilt: Wenn $\Delta \subseteq \kappa$ mit $|\kappa - \Delta| < \lambda$, so ist $\mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \nleq H_\nu$.
Beweis: Angenommen $\mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \leq H_\nu$ für ein $\nu \in \mu$ und eine Menge $\Delta \subseteq \kappa$ mit $|\kappa - \Delta| < \lambda$. Dann existiert nach Proposition 3.6 eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$, so dass $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \langle \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta), \pi \rangle \leq \langle H_\nu, \pi \rangle$ ist.
Da $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \bigcup_{\nu \in \mu} H_\nu$ gilt, existiert eine Ordinalzahl $\xi \in \mu$ mit $\pi \in H_\xi$ und somit ist $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \langle H_\nu, \pi \rangle \leq \langle H_\nu, H_\xi \rangle = H_{\max\{\nu,\xi\}}$ im Widerspruch dazu, dass $H_{\max\{\nu,\xi\}}$ eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ist.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wähle $\sigma_0 \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) - H_0$ beliebig.
Setze $\Delta_1 = \kappa - \mathrm{supp}(\sigma_0)$. Dann ist $|\kappa - \Delta_1| = |\mathrm{supp}(\sigma_0)| < \lambda$.
Also existiert nach obiger Behauptung ein $\sigma_1 \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta_1) - H_1$.

Sei $\alpha \in \mu$ und für alle $\nu < \alpha$ sei σ_ν gewählt mit $\sigma_\nu \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta_\nu) - H_\nu$, wobei $\Delta_\nu = \kappa - \bigcup_{\xi < \nu} \mathrm{supp}(\sigma_\xi)$.
Setze $\Delta_\alpha = \kappa - \bigcup_{\xi<\alpha} \mathrm{supp}(\sigma_\xi)$. Dann ist $|\kappa - \Delta_\alpha| = \big|\bigcup_{\xi<\alpha} \mathrm{supp}(\sigma_\xi)\big| \leq \sum_{\xi<\alpha} |\mathrm{supp}(\sigma_\xi)| < \lambda$, da $\alpha \in \mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ und $|\mathrm{supp}(\sigma_\xi)| < \lambda$ für alle $\xi < \alpha$.
Also existiert nach obiger Behauptung ein $\sigma_\alpha \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta_\alpha) - H_\alpha$.

Damit ist für alle $\alpha \in \mu$ ein $\sigma_\alpha \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ gewählt.
Diese haben disjunkte Träger. Somit kann man $\sigma = \prod_{\alpha\in\mu} \sigma_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\mu} \sigma_\alpha$ setzen.
Dabei gilt $|\mathrm{supp}(\sigma)| = \big|\bigcup_{\alpha\in\mu} \mathrm{supp}(\sigma_\alpha)\big| \leq \sum_{\alpha\in\mu} |\mathrm{supp}(\sigma_\alpha)| < \lambda$, da $\mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ und $|\mathrm{supp}(\sigma_\alpha)| < \lambda$ für alle $\alpha \in \mu$.
Also ist $\sigma \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.

<u>1. Fall:</u> λ ist regulär.
Sei $X \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{supp}(\sigma) \subseteq X$ und $|X| = \lambda \leq \kappa$.
Behauptung: Es existiert ein $\alpha \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_\lambda(X) \leq H_\alpha$.
Beweis: Angenommen für alle $\nu \in \mu$ ist $\mathrm{Sym}_\lambda(X) \nleq H_\nu$, d. h. $\mathrm{Sym}_\lambda(X) \cap H_\nu$ ist eine echte Untergruppe von $\mathrm{Sym}_\lambda(X)$.
Nun gilt $\mathrm{Sym}_\lambda(X) = \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \cap \mathrm{Sym}_\lambda(X) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}_\lambda(X)\big)$.
Also ist $\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}_\lambda(X);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(X)$ und somit $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(X)\big) \leq \mu < \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$.

Doch da $|X| = \lambda$ und λ regulär ist, steht dies im Widerspruch zu Proposition 3.4, nach der $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(X)\big) \geq \lambda$ gilt.
Damit ist die Behauptung bewiesen und wir wählen uns ein solches $\alpha \in \mu$.

Doch $\mathrm{supp}(\sigma_\alpha) \subseteq \mathrm{supp}(\sigma) \subseteq X$, also gilt $\sigma_\alpha \in \mathrm{Sym}_\lambda(X)$ und es folgt $\sigma_\alpha \in H_\alpha$ im Widerspruch zur Wahl von σ_α.

2. Fall: λ ist singulär.
Sei $X \subseteq \kappa$ mit $\mathrm{supp}(\sigma) \subseteq X$ und $\mathrm{cf}(\lambda) \leq |X| < \lambda$.
Behauptung: Es existiert ein $\alpha \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}(X) \leq H_\alpha$.
Beweis: Angenommen für alle $\nu \in \mu$ ist $\mathrm{Sym}(X) \not\leq H_\nu$. Da $|X| < \lambda$ gilt, ist $\mathrm{Sym}(X) \leq \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. Also folgt analog zum ersten Fall, dass $\big\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(X);\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(X)$ bildet.
Damit ist $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}(X)\big) \leq \mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ im Widerspruch zu Satz 1.5 von Macpherson und Neumann, wonach $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}(X)\big) > |X| \geq \mathrm{cf}(\lambda)$ gilt.
Also ist die Behauptung bewiesen und wir wählen uns ein solches $\alpha \in \mu$.
Wiederum folgt $\sigma_\alpha \in \mathrm{Sym}(X)$ und damit $\sigma_\alpha \in H_\alpha$ im Widerspruch zur Wahl von σ_α.
□

Aus Korollar 3.3 und Satz 3.7 ergibt sich nun das zentrale Resultat dieses Kapitels.

Satz 3.8 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*
Dann gilt $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) = \mathrm{cf}(\lambda)$.

Bemerkung 3.9 Insbesondere hängt die Konfinalität der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ nur von λ und nicht von κ ab.
Sie hängt, zumindest für reguläres λ, auch nicht vom Wert von $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}(\lambda)\big)$ ab. Denn es ist $\operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) = \mathrm{cf}(\lambda)$ und die Forcing–Konstruktion aus Satz 1.7 mit der Sharp und Thomas bewiesen haben, dass es konsistent (relativ zu ZSF + AC) ist, dass für eine reguläre unendliche Kardinalzahl θ die Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\theta)$ und 2^θ zwei beliebig vorgegebene reguläre unendliche Kardinalzahlen sind, wobei nur die Bedingung $\theta < \operatorname{konf}\big(\mathrm{Sym}(\theta)\big) \leq 2^\theta$ eingehalten werden muss, bewahrt Konfinalitäten.

Bemerkung 3.10 Aus Satz 1.8 von Sharp und Thomas folgt, dass in ZSF + AC nicht beweisbar ist, dass die Konfinalität einer Untergruppe einer Gruppe G nach oben durch die Konfinalität von G beschränkt ist.
Obiger Satz zeigt, dass man bereits in ZSF + AC Gegenbeispiele angeben kann. So ist

die $\mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\aleph_\omega)$ eine Untergruppe, sogar ein Normalteiler, der $\mathrm{Sym}_{\aleph_\omega}(\aleph_\omega)$, welche die Eigenschaft hat, dass $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\aleph_\omega)\big) = \aleph_1 > \aleph_0 = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_{\aleph_\omega}(\aleph_\omega)\big)$ ist.

Bemerkung 3.11 Die Konfinalität einer nicht endlich–erzeugbaren Gruppe ist immer eine reguläre unendliche Kardinalzahl (vgl. Proposition 1.4).
Satz 3.8 zeigt, dass man umgekehrt zu jeder regulären unendlichen Kardinalzahl κ eine Gruppe G findet, welche die Konfinalität κ hat, nämlich die $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$.
Man erhält G zudem als Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$.

Zum Schluss wenden wir uns der alternierenden Gruppe zu. Hier greift diesselbe Konstruktion, die auch bei der $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ zum Ziel führt.

Satz 3.12 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Alt}(\kappa)\big) = \aleph_0$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung $\varphi : \kappa \longrightarrow \omega$ wie im Beweis von Satz 3.1, d. h. für ein $\alpha \in \kappa$ ist $\varphi(\alpha) = n$, falls ein $\beta \in \kappa$ mit $\alpha = \omega \cdot \beta + n$ existiert.
Wenn man für $n \in \omega$

$$H_n = \{\pi \in \mathrm{Alt}(\kappa);\ \varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \subseteq n\}$$

setzt, so folgt wie in Satz 3.1, dass die $\big\{H_n;\ n \in \omega\big\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Alt}(\kappa)$ bilden. $\square$

Bemerkung: Wenn N ein nicht–trivialer Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist, gilt folglich $\mathrm{konf}\,(N) < \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big)$.

3.2 Konfinale Ketten in den Normalteilern der Sym(κ)

In Satz 3.1 und in Proposition 3.2 haben wir zwei konfinale Ketten in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ konstruiert, die eine für reguläres λ und die andere für eine Limeskardinalzahl λ.
Es stellt sich die Frage, ob jede kürzeste konfinale Kette in den beiden Fällen von der obigen Bauart ist, oder ob es Ketten gibt, die eine wesentlich andere Gestalt haben.
Was damit gemeint ist, wird im Folgenden präzisiert und wir werden sehen, dass die Antwort auf diese Frage davon abhängt, ob λ regulär oder singulär ist.

Wir behandeln zunächst den Fall regulärer Kardinalzahlen λ.
Wenn außerdem λ überabzählbar und $\lambda < \kappa$ ist, kann man eine kürzeste konfinale Kette $\{U_\nu; \nu \in \lambda\}$ in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ konstruieren, welche die Eigenschaft hat, dass sie und die Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\}$ aus Satz 3.1 wechselseitig nicht ineinander einbettbar sind. Dies ist in folgendem Sinn gemeint: Für jedes Glied der einen Kette gilt, dass es in keinem Glied der anderen Kette als Untergruppe enthalten ist.

Zur Definition der Kette $\{U_\nu;\ \nu \in \lambda\}$ benutzen wir sogenannte Hauptzahlen der Multiplikation.

Definition 3.13 (E. Jacobsthal, 1908)
Eine Ordinalzahl δ mit $\delta \geq 2$ heißt *Hauptzahl der Multiplikation*, falls gilt:
$\forall \alpha\, (0 < \alpha < \delta \implies \alpha \cdot \delta = \delta)$.

Wir benötigen folgende grundlegende Eigenschaften dieser Ordinalzahlen (vgl. Bachmann [1, Kapitel III, § 15, Seite 68]).

Proposition 3.14 *Für eine Ordinalzahl $\delta \geq 2$ sind äquivalent:*

(i) δ ist Hauptzahl der Multiplikation,

(ii) $\forall \alpha, \beta\ \ (\alpha, \beta < \delta \implies \alpha \cdot \beta < \delta)$,

(iii) $\delta = \omega^{\omega^\xi}$ für eine Ordinalzahl ξ.

Wenn M eine wohlgeordnete Menge ist, so bezeichnen wir mit $\mathrm{ot}(M)$ den Ordnungstyp von M.

Hilfssatz 3.15 *Sei δ eine Hauptzahl der Multiplikation und seien A, B Mengen von Ordinalzahlen mit* $\mathrm{ot}(A) < \delta$ *und* $\mathrm{ot}(B) < \delta$.
Dann ist auch $\mathrm{ot}(A \cup B) < \delta$.

Beweis: Wir zerlegen A und B wie folgt:
Es sei $A = \bigcup\limits_{\nu<\alpha} A_\nu$, wobei α eine Ordinalzahl ist. Dabei gelte für $\nu < \xi < \alpha$, dass $A_\nu \neq \varnothing$ ist, und für $\eta \in A_\nu$ und $\zeta \in A_\xi$ sei $\eta < \zeta$.
Außerdem gelte: Wenn $\eta, \zeta \in A_\nu$ und γ eine Ordinalzahl mit $\eta \leq \gamma \leq \zeta$ ist, dann ist auch $\gamma \in A_\nu$.
Analog sei $B = \bigcup\limits_{\nu<\beta} B_\nu$ für eine Ordinalzahl β, wobei für $\nu < \xi < \beta$ gilt, dass $B_\nu \neq \varnothing$ ist, und für $\eta \in B_\nu$ und $\zeta \in B_\xi$ sei $\eta < \zeta$. Wenn $\eta, \zeta \in B_\nu$ und γ eine Ordinalzahl mit $\eta \leq \gamma \leq \zeta$ ist, dann sei auch $\gamma \in B_\nu$.

Da $\mathrm{ot}(A), \mathrm{ot}(B) < \delta$ gilt, ist $\alpha, \beta < \delta$ und somit auch $\alpha + \beta < \delta$.
Ebenso folgt $\sup\{\mathrm{ot}(A_\nu);\ \nu < \alpha\} < \delta$ und $\sup\{\mathrm{ot}(B_\nu);\ \nu < \beta\} < \delta$ und damit auch $\sup\big(\{\mathrm{ot}(A_\nu);\ \nu < \alpha\} \cup \{\mathrm{ot}(B_\nu);\ \nu < \beta\}\big) < \delta$.
Es ist $A \cup B = \bigcup_{\nu<\alpha} A_\nu \cup \bigcup_{\nu<\beta} B_\nu$ und weil δ eine Hauptzahl der Multiplikation ist, folgt daraus $\mathrm{ot}(A \cup B) \leq \sup\big(\{\mathrm{ot}(A_\nu);\ \nu < \alpha\} \cup \{\mathrm{ot}(B_\nu);\ \nu < \beta\}\big) \cdot \big(\alpha + \beta\big) < \delta$. □

Bemerkung: Die Aussage des obigen Hilfssatzes gilt offensichtlich nicht für beliebige Ordinalzahlen. Für zwei wohlgeordnete Mengen ist der Ordungstyp ihrer Union im Allgemeinen auch nicht durch die Summe ihrer Ordungstypen beschränkt.
Wir betrachten das folgende Gegenbeispiel:
Es sei $A = \omega_1 \cup \{\omega_1 + \omega, \omega_1 + \omega + 1\}$ und $B = (\omega_1 + \omega) - \omega_1 = \{\alpha;\ \omega_1 \leq \alpha < \omega_1 + \omega\}$.
Dann ist $\mathrm{ot}(A) = \omega_1 + 2$ und $\mathrm{ot}(B) = \omega$. Doch $A \cup B = \omega_1 + \omega + 2$. Also ist natürlich $\mathrm{ot}(A \cup B) = \omega_1 + \omega + 2$ und damit $\mathrm{ot}(A \cup B) > \omega_1 + \omega = \omega_1 + 2 + \omega = \mathrm{ot}(A) + \mathrm{ot}(B)$ und $\mathrm{ot}(A \cup B) > \omega_1 + 2 = \omega + \omega_1 + 2 = \mathrm{ot}(B) + \mathrm{ot}(A)$.

Wir definieren nun wie angekündigt eine weitere konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.

Satz 3.16 *Seien κ, λ Kardinalzahlen mit $\aleph_1 \leq \lambda \leq \kappa$.*
Sei $\mu = \mathrm{cf}(\lambda)$ und $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \mu\rangle$ eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen mit $\lambda = \bigcup_{\nu\in\mu} \alpha_\nu$.
Für eine Ordinalzahl ν sei $\delta_\nu = \omega^{\omega^\nu}$, d. h. δ_ν ist die ν-te Hauptzahl der Multiplikation. Wenn man für $\nu \in \mu$

$$U_\nu = \{\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) < \delta_{\alpha_\nu}\}$$

setzt, so ist $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.

Beweis:
1. Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist U_ν eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Beweis: Es seien $\pi, \sigma \in U_\nu$. Dann ist $\mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) < \delta_{\alpha_\nu}$ und $\mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\sigma)\big) < \delta_{\alpha_\nu}$.
Da δ_{α_ν} eine Hauptzahl der Multiplikation ist, folgt daraus mit Hilfssatz 3.15:
$\mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi \cdot \sigma^{-1})\big) \leq \mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi) \cup \mathrm{supp}(\sigma)\big) < \delta_{\alpha_\nu}$.
Also ist U_ν eine Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Aus der Definition der Ordinalzahlexponentiation folgt $|\delta_{\alpha_\nu}| = |\omega^{\omega^{\alpha_\nu}}| = \max\{\aleph_0, |\alpha_\nu|\}$ (vgl. Levy [17, Kapitel IV, Theorem 2.11]). Da $\aleph_1 \leq \lambda$ und $\alpha_\nu \in \lambda$ ist, gilt $|\delta_{\alpha_\nu}| < \lambda$.

Wir wählen eine Permutation $\rho \in \mathrm{Sym}(\kappa)$ mit $\mathrm{supp}(\rho) = \delta_{\alpha_\nu}$.
Dann ist $\rho \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) - U_\nu$.
Damit ist die 1. Behauptung bewiesen.

Wegen der Monotonie der Ordinalzahlexponentiation gilt für Ordinalzahlen ξ, η :
$\xi \leq \eta \implies U_\xi \leq U_\eta$.

2. Behauptung: $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \bigcup\limits_{\nu \in \mu} U_\nu$

Beweis: Sei $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ mit $\beta = \mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi)\big)$. Dann ist $\beta < \lambda$. Damit existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\beta < \alpha_\nu \leq \omega^{\omega^{\alpha_\nu}} = \delta_{\alpha_\nu}$. Also ist $\pi \in U_\nu$.

Somit ist $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. Mit Satz 3.8 folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Wie obiger Satz zeigt, ist die Kette $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mathrm{cf}(\lambda)\big\}$ für alle überabzählbaren Kardinalzahlen λ definierbar und bildet dann eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Da ω die kleinste Hauptzahl der Multiplikation ist, liefert die Konstruktion keine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.

Wenn λ überabzählbar und regulär ist, sind folglich sowohl $\big\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ als auch $\big\{U_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ kürzeste konfinale Ketten in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. Für die Definition der letzteren nehmen wir hier als in λ konfinale Folge natürlich die Elemente von λ selbst.
Wir zeigen nun, dass wenn $\lambda < \kappa$ ist, sich keine der beiden Ketten in die andere einbetten lässt.

Proposition 3.17 *Seien κ, λ Kardinalzahlen mit $\aleph_1 \leq \lambda \leq \kappa$, wobei λ regulär ist. Die Ketten $\big\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ und $\big\{U_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ seien wie in Satz 3.1 und Satz 3.16 definiert. Dann gilt:*

(i) *Für alle $\nu \in \lambda$ ist $U_0 \not\leq H_\nu$.*

(ii) *Falls $\lambda < \kappa$ ist, gilt für alle $\nu \in \lambda$: $H_1 \not\leq U_\nu$.*

Beweis: (i) Sei $\nu \in \lambda$. Setze $\pi = (\nu, \nu+1)$.
Dann ist $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) = 2 < \omega = \delta_0$. Damit ist $\pi \in U_0$.
Doch $\pi \notin H_\nu$, da $\varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) = \{\nu, \nu+1\} \not\subseteq \nu$, wobei die Abbildung φ gemäß Satz 3.1 definiert ist.

(ii) Sei $\nu \in \lambda$. Wir setzen $X = \{\lambda \cdot \beta;\ \beta \in \delta_\nu\}$.
Da $\lambda < \kappa$ ist, ist $X \subseteq \kappa$ und $|X| = |\delta_\nu| \leq \delta_\nu < \lambda$.
Also können wir ein $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ mit $\mathrm{supp}(\pi) = X$ wählen.
Da $\varphi(X) = \{0\}$ gilt, folgt $\pi \in H_1$. Doch $\mathrm{ot}(X) = \delta_\nu$ und somit ist $\pi \notin U_\nu$. $\square$

Bemerkung: Die Aussage (ii) aus obiger Proposition ist falsch, wenn $\lambda = \kappa$ gilt.
In diesem Fall ist $H_\nu \leq U_{\nu+1}$ für alle $\nu \in \kappa$.

Denn wegen $\lambda = \kappa$ ist die Abbildung φ die Identität auf κ.
Also ist für ein $\nu \in \kappa$ die Untergruppe $H_\nu = \{\pi \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa);\ \mathrm{supp}(\pi) \subseteq \nu\}$.
Für $\pi \in H_\nu$ gilt damit $\mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \leq \nu < \nu + 1 \leq \omega^{\omega^{\nu+1}} = \delta_{\nu+1}$, d. h. $\pi \in U_{\nu+1}$.

Die Ketten $\big\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ und $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mathrm{cf}(\lambda)\big\}$ unterscheiden sich, wie die nächste Proposition zeigt, auch durch die folgende Eigenschaft: Keine der Untergruppen H_ν enthält einen nicht–trivialen Normalteiler der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. Dagegen ist jeder echte Normalteiler der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ in einem U_ν enthalten.

Proposition 3.18 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.*

(i) *Sei λ regulär und die Kette $\big\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\big\}$ wie in Satz 3.1 definiert.*

Dann gilt für alle $\nu \in \lambda$: $\mathrm{Alt}(\kappa) \nleq H_\nu$.

(ii) *Sei λ überabzählbar, $\mu = \mathrm{cf}(\lambda)$ und θ eine unendliche Kardinalzahl mit $\theta < \lambda$. Die Kette $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ sei wie in Satz 3.16 definiert.*

Dann existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa) \leq U_\nu$.

Beweis: (i) Sei $\nu \in \lambda$. Dann ist $\sigma = (\nu, \nu + 1, \nu + 2) \in \mathrm{Alt}(\kappa)$.
Doch $\sigma \notin H_\nu$, da $\varphi\big(\mathrm{supp}(\sigma)\big) \nsubseteq \nu$.

(ii) Sei $\nu \in \mu$ so gewählt, dass $\theta < \alpha_\nu \leq \omega^{\omega^{\alpha_\nu}} = \delta_{\alpha_\nu} < \lambda$ gilt, wobei $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \mu\rangle$ die zur Definition der Kette $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ verwandte in λ konfinale Folge ist.
Für ein $\pi \in \mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$ ist $|\mathrm{supp}(\pi)| < \theta$. Da θ eine Kardinalzahl ist, gilt dann auch $\mathrm{ot}\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) < \theta < \delta_{\alpha_\nu}$, d. h. $\pi \in U_\nu$. $\square$

Nun betrachten wir den Fall, dass λ eine singuläre Kardinalzahl ist.
Dann ist $\lambda = \aleph_\zeta$ für eine Limesordinalzahl ζ. Sei $\mu = \mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\zeta)$.
Die Kette $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ aus Satz 3.16 ist eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
In Proposition 3.2 haben wir gezeigt, dass für eine strikt–aufsteigende Folge $\langle \beta_\nu;\ \nu \in \mu\rangle$ von Ordinalzahlen mit $\zeta = \bigcup_{\nu\in\mu} \beta_\nu$ auch $\{\mathrm{Sym}_{\aleph_{\beta_\nu}}(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ist.
Aus der obigen Proposition folgt, dass sich diese Kette in die Kette $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ einbetten lässt.

Es gilt sogar, dass sich $\{\mathrm{Sym}_{\aleph_{\beta_\nu}}(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ in jede kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ einbetten lässt:

Proposition 3.19 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und λ eine singuläre Kardinalzahl mit $\lambda \leq \kappa$.*
Sei $\mu = \mathrm{cf}(\lambda)$ und $\{V_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine kürzeste konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Dann existiert zu jeder unendlichen Kardinalzahl $\theta < \lambda$ eine Ordinalzahl $\nu \in \mu$, so dass $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa) \leq V_\nu$ gilt.

Beweis: Sei θ eine unendliche Kardinalzahl mit $\theta < \lambda$.
Angenommen für alle $\nu \in \mu$ ist $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa) \not\leq V_\nu$.
Da $\mu = \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ ist, können wir eine reguläre Kardinalzahl τ mit $\mu < \tau < \lambda$ und $\theta \leq \tau$ wählen.
Dann ist für alle $\nu \in \mu$ auch $\mathrm{Sym}_\tau(\kappa) \not\leq V_\nu$, d. h. $V_\nu \cap \mathrm{Sym}_\tau(\kappa)$ ist eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\tau(\kappa)$.
Außerdem gilt $\mathrm{Sym}_\tau(\kappa) = \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \cap \mathrm{Sym}_\tau(\kappa) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(V_\nu \cap \mathrm{Sym}_\tau(\kappa)\big)$.
Also ist $\{V_\nu \cap \mathrm{Sym}_\tau(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\tau(\kappa)$ und damit gilt $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_\tau(\kappa)\big) \leq \mu < \tau = \mathrm{cf}(\tau)$ im Widerspruch zu Satz 3.8. $\square$

Kapitel 4

Ketten in den Faktorgruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und ihrer Normalteiler

In diesem Kapitel betrachten wir konfinale Ketten in den Faktorgruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ sowie der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ für eine unendliche Kardinalzahl λ mit $\lambda \leq \kappa$.
Es zeigt sich, dass die Konfinalität sämtlicher homomorpher Bilder der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ gleich der der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst ist. Für die homomorphen Bilder der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ (für $\lambda \leq \kappa$) gilt eine analoge Aussage. Dass dies keineswegs bei allen Gruppen so ist, wird am Beispiel der freien Gruppen und deren Faktorgruppen gezeigt.
Schließlich wenden wir die gewonnenen Resultate auf eine Frage von William R. Scott aus dem Jahre 1964 an.
Mit „homomorphen Bildern" sind in diesem Kapitel grundsätzlich nicht–triviale homomorphe Bilder gemeint.

4.1 Die Faktorgruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$

Wir stellen zunächst fest, dass die Konfinalität eines homomorphen Bildes einer Gruppe mindestens so groß ist wie die Konfinalität der Gruppe selbst.

Proposition 4.1 *Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und μ eine Kardinalzahl. Es sei G/N nicht endlich–erzeugbar.*
Wenn $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in G/N ist, so ist $\{\bigcup U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in G.
Insbesondere ist $\mathrm{konf}\,(G) \leq \mathrm{konf}\,(G/N)$.

Beweis: $\bigcup U_\nu$ (für $\nu \in \mu$) ist das volle Urbild von U_ν unter dem kanonischen Epimorphismus von G auf G/N.
Also ist $\{\bigcup U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette echter Untergruppen von G.
Da $G/N = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} U_\nu$ ist, folgt $G = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \big(\bigcup U_\nu\big)$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Für die symmetrische Gruppe auf κ gilt auch die Umkehrung obiger Aussage:

Proposition 4.2 *Seien κ, λ, μ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.
Wenn $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)$ *ist, dann ist
$\{(H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa))/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ *und
$\{(H_\nu \cdot \mathrm{Alt}(\kappa))/\mathrm{Alt}(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der* $\mathrm{Sym}(\kappa)/\mathrm{Alt}(\kappa)$.

Insbesondere gilt $\mathrm{konf}\,(\mathrm{Sym}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)) \leq \mathrm{konf}\,(\mathrm{Sym}(\kappa))$
sowie $\mathrm{konf}\,(\mathrm{Sym}(\kappa)/\mathrm{Alt}(\kappa)) \leq \mathrm{konf}\,(\mathrm{Sym}(\kappa))$.

Beweis: Mit Proposition 2.5 folgt, dass $\{H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist. Damit ist auch $\{H_\nu \cdot \mathrm{Alt}(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\kappa)$. Wegen der Eigenschaften des kanonischen Epimorphismus folgt daraus die Behauptung. □

Mit obigen Propositionen haben wir die Konfinalität aller homomorphen Bilder der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ bestimmt:

Satz 4.3 *Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$.
Dann gilt* $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa)/\mathrm{Alt}(\kappa)\big) = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa)\big)$.

Es gilt jedoch keineswegs für alle Gruppen, dass die Konfinalität jedes homomorphen Bildes gleich der Konfinalität der Gruppe selbst ist. Wir wenden uns nun einem Beispiel zu, bei dem die Situation eine gänzlich andere ist.

Satz 4.4 *Sei F eine freie Gruppe, die von der unendlichen Teilmenge B frei–erzeugt wird.
Dann gilt* $\mathrm{konf}\,(F) = \aleph_0$.

Beweis: Wir wählen eine abzählbar–unendliche Teilmenge $X = \{x_n;\ n \in \omega\} \subseteq B$ und setzen $B_0 = B - X,\ B_1 = B - \{x_m;\ 1 \leq m \in \omega\}$ usw.

Allgemein sei also für ein $n \in \omega$

$$B_n = B - \{x_m;\ n \leq m \in \omega\}$$

und $F_n = \langle B_n \rangle$ die von der Teilmenge B_n erzeugte Untergruppe von F.

Offensichtlich gilt dann für $n, m \in \omega :\ n \leq m \implies F_n \leq F_m$.

1. Behauptung: Für alle $n \in \omega$ ist F_n eine echte Untergruppe von F.
Beweis: Sei $n \in \omega$. Dann ist $x_n \in X \subseteq B \subseteq F$. Doch $x_n \notin B_n$ und damit gilt auch $x_n \notin F_n$. Denn sonst wäre x_n auf zwei verschiedene Arten aus den Elementen von B darstellbar und damit wäre B kein freies Erzeugendensystem.

2. Behauptung: $F = \bigcup\limits_{n \in \omega} F_n$.
Beweis: Sei $g \in F$. O. B. d. A. sei $g \neq 1$. Dann existieren $k \in \omega$ und $b_0, \ldots b_k \in B$, so dass g eindeutig darstellbar ist in der Form

$$g = b_0^{n_0} \cdot b_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot b_k^{n_k},$$

wobei $0 \neq n_j \in \mathbb{Z}$ für $0 \leq j \leq k$ und $b_i \neq b_{i+1}$ für $0 \leq i < k$ gilt.
Falls $X \cap \{b_0, \ldots, b_k\} = \varnothing$ ist, so ist $g \in \langle B_0 \rangle = F_0$.
Sonst sei $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}\} = X \cap \{b_0, \ldots, b_k\}$ für ein $r \leq k$. Wenn $m = \max\{i_1, \ldots, i_r\}$ ist, so gilt $\{b_0, \ldots, b_k\} \subseteq B_{m+1}$. Daraus folgt $g \in \langle B_{m+1} \rangle = F_{m+1}$.
Damit ist auch die 2. Behauptung bewiesen.

Insgesamt folgt, dass $\big\{F_n;\ n \in \omega\big\}$ eine konfinale Kette in F ist. □

Da jede Gruppe homomorphes Bild einer freien Gruppe ist, existieren Faktorgruppen freier Gruppen mit beliebig großer Konfinalität.

Korollar 4.5 *Sei κ eine reguläre unendliche Kardinalzahl.*
Dann existiert eine freie Gruppe F und ein Normalteiler N von F, so dass gilt:

(i) $\mathrm{konf}\,(F) = \aleph_0$,

(ii) $\mathrm{konf}\,(F/N) = \kappa$.

Beweis: Nach Satz 3.8 ist $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)\big) = \kappa$. Die $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ ist homomorphes Bild der von der Menge $\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ erzeugten freien Gruppe. Mit Satz 4.4 folgt die Behauptung. □

Eine Verallgemeinerung dieses Korollars beweisen wir in 5.2.

N. G. De Bruijn [8] hat Ende der 50er Jahre gezeigt, dass die freie Gruppe F_{2^κ} vom Rang 2^κ in die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ einbettbar ist. Saharon Shelah [25] hat 1973 vollständig bewiesen, welche freien Gruppen in die $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ (für $\lambda \leq \kappa^+$) einbettbar sind, indem er eine zur Existenz einer Einbettung äquivalente kardinalzahlarithmetische Aussage angegeben hat.
Mit diesen Resultaten können wir nun folgern, dass die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ und ihre Normalteiler der Mächtigkeit nach große Untergruppen haben, deren Konfinalität jedoch $\aleph_0$, also die kleinste mögliche, ist.

Korollar 4.6 *Seien κ, λ, μ unendliche Kardinalzahlen mit $\mu \leq 2^\kappa$ und $\lambda \leq \kappa^+$.*
Dann gilt:

(i) Die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ *besitzt eine Untergruppe der Kardinalität μ und der Konfinalität $\aleph_0$.*

(ii) Wenn eine Kardinalzahl $\theta < \lambda$ mit $\mu \leq 2^\theta$ existiert, so besitzt die $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ *eine Untergruppe der Kardinalität μ und der Konfinalität $\aleph_0$.*

Beweis: (i) Nach dem oben zitierten Satz von De Bruijn ist die freie Gruppe F_{2^κ} vom Rang 2^κ in die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ einbettbar.
Da $\mu \leq 2^\kappa$ ist, folgt daraus, dass die freie Gruppe F_μ vom Rang μ in die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ einbettbar ist. Wegen $|F_\mu| = \mu$ gilt nach Satz 4.4 die Behauptung.

(ii) Nach dem Satz von De Bruijn ist die freie Gruppe vom Rang 2^θ in die $\mathrm{Sym}(\theta)$ einbettbar. Da $\mathrm{Sym}(\theta) = \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\theta) \leq \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\mu \leq 2^\theta$ gilt, folgt daraus wiederum mit Satz 4.4 die Behauptung. $\square$

4.2 Die Faktorgruppen der Normalteiler der Sym(κ)

Wir wenden uns nun den homomorphen Bildern der Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ zu. Auch hier zeigt sich, dass diese alle dieselbe Konfinalität wie der entsprechende Normalteiler selbst haben.

Satz 4.7 *Seien κ, λ, θ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda < \theta \leq \kappa$.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) = \mathrm{cf}(\theta)$.

Beweis: Es gilt $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \geq \mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)\big) = \mathrm{cf}(\theta)$ gemäß Proposition 4.1 und Satz 3.8.

Also bleibt zu zeigen: $\mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \leq \mathrm{cf}(\theta)$.

1. Fall: θ ist regulär.
Wir in Satz 3.1 sei die Abbildung $\varphi : \ \kappa \longrightarrow \theta$ definiert durch

$$\varphi(\alpha) = \gamma \iff \exists \beta \in \kappa : \ \alpha = \theta \cdot \beta + \gamma.$$

Für $\nu \in \theta$ sei

$$H_\nu = \{\pi \in \mathrm{Sym}_\theta(\kappa); \ \varphi\big(\mathrm{supp}(\pi)\big) \subseteq \nu\}.$$

Im Beweis von Satz 3.1 wurde gezeigt, dass $\big\{H_\nu; \ \nu \in \theta\big\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$ bildet.
Damit ist dann $\big\{\big(H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa); \ \nu \in \theta\big\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$, wobei

$$\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \bigcup_{\nu \in \theta} \big(H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$$

gilt.

Behauptung: Für alle $\nu \in \theta$ ist $\big(H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ eine echte Untergruppe von $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Beweis: Sei $\nu \in \theta$. Dann ist $|\theta - \nu| = \theta > \lambda$. Wir wählen eine Menge $\Sigma \subseteq \theta - \nu$ mit $|\Sigma| = \lambda$ und ein $\pi \in \mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$ mit $\mathrm{supp}(\pi) = \Sigma$.

Dann gilt $(\star)$ $\pi \notin H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Beweis von $(\star)$: Angenommen es existiert ein $h \in H_\nu$ und ein $\sigma \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ mit $\pi = h \cdot \sigma$, d. h. $\sigma = h^{-1} \cdot \pi$.
Es ist $\mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(\pi) = \varnothing$. Denn für ein $x \in \mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(\pi)$ gilt einerseits $x \in \mathrm{supp}(\pi) = \Sigma \subseteq \theta - \nu$. Also ist $\nu \leq x < \theta$ und somit insbesondere $\varphi(x) = x$. Doch andererseits folgt aus $x \in \mathrm{supp}(h)$ und $h \in H_\nu$, dass $\varphi(x) < \nu$ ist. Also ergibt sich der Widerspruch $\nu \leq x = \varphi(x) < \nu$.
Aus $\mathrm{supp}(h) \cap \mathrm{supp}(\pi) = \varnothing$ folgt $\mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(h) \cup \mathrm{supp}(\pi)$.
Damit gilt $|\mathrm{supp}(\sigma)| \geq |\mathrm{supp}(\pi)| = |\Sigma| = \lambda$ im Widerspruch zur Annahme, dass $\sigma \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ist.
Folglich ist $(\star)$ bewiesen.

Damit ist $\pi \in \mathrm{Sym}_\theta(\kappa) - H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und daraus folgt die Behauptung.

Insgesamt gilt also, dass $\{(H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa))/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \theta\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ bildet. Somit ist der Satz für reguläres θ bewiesen.

2. Fall: θ ist singulär.
Dann ist $\theta = \aleph_\zeta$ für eine Limesordinalzahl ζ. Sei $\mu = \mathrm{cf}(\theta) = \mathrm{cf}(\zeta)$ und $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \mu\rangle$ eine aufsteigende Folge von Ordinalzahlen, wobei $\zeta = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \alpha_\nu$ ist und für alle $\nu \in \mu$ die Ungleichung $\lambda \leq \aleph_{\alpha_\nu} < \aleph_\zeta = \theta$ gilt.
Offensichtlich bildet dann $\{\mathrm{Sym}_{\aleph_{\alpha_\nu}}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette der Länge $\mu = \mathrm{cf}(\theta)$ in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Damit ist der Satz auch für singuläres θ bewiesen. □

Auch die Konfinalität der Faktorgruppen der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$ (für $\theta \leq \kappa$) nach der alternierenden Gruppe lässt sich auf diese Weise berechnen. Dabei muss man allerdings voraussetzen, dass θ überabzählbar ist. Denn die $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)/\mathrm{Alt}(\kappa)$ hat nur zwei Elemente und lässt sich somit nicht als Union einer aufsteigenden Kette echter Untergruppen darstellen.

Satz 4.8 *Seien κ und θ überabzählbare Kardinalzahlen mit $\theta \leq \kappa$.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,(\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Alt}(\kappa)) = \mathrm{cf}(\theta)$.

Beweis: Diese Aussage lässt sich völlig analog zu obigem Satz zeigen. □

Nach R. Baer [2] sind die Gruppen $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ (für $\lambda \leq \kappa$) sowie die $\mathrm{Alt}(\kappa)$ sämtliche nicht–trivialen Subnormalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$. Somit haben wir die Konfinalität aller homomorphen Bilder der Normalteiler der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ berechnet.

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass aus den beiden konfinalen Ketten in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$, die in Satz 3.1 und Proposition 3.2 definiert wurden, auf natürliche Weise konfinale Ketten in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ für $\lambda < \theta \leq \kappa$ entstehen.

In Satz 3.16 haben wir für überabzählbare Kardinalzahlen $\theta \leq \kappa$ eine weitere konfinale Kette $\{U_\nu;\ \nu \in \mathrm{cf}(\theta)\}$ in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$ angegeben. Auch aus dieser lässt sich auf obige Art eine konfinale Kette in den Faktorgruppen dieser Gruppe gewinnen. Denn für eine unendliche Kardinalzahl $\lambda < \theta$ existiert nach Proposition 3.18 ein $\xi \in \mathrm{cf}(\theta)$ mit $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \leq U_\xi$ und somit gilt für alle $\nu \in \mathrm{cf}(\theta):\ U_\nu \cdot \mathrm{Alt}(\kappa) \leq U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \leq U_\nu \cdot U_\xi = U_{\max\{\nu,\xi\}} < \mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$.

Damit ist $\{(U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa))/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mathrm{cf}(\theta)\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\{(H_\nu \cdot \mathrm{Alt}(\kappa))/\mathrm{Alt}(\kappa);\ \nu \in \mathrm{cf}(\theta)\}$ eine in der $\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)/\mathrm{Alt}(\kappa)$.

Bemerkung: William R. Scott stellt in seinem Buch *Group Theory* [21, Seite 317] die folgende Frage:

> Seien κ, λ, μ und θ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda \leq \kappa$ und $\theta \leq \mu$.
> Sind die einfachen Gruppen $\mathrm{Sym}_{\lambda^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\mathrm{Sym}_{\theta^+}(\mu)/\mathrm{Sym}_\theta(\mu)$ nur im Falle $\kappa = \mu$ und $\lambda = \theta$ isomorph?

Es findet sich dort nur die Antwort in zwei Spezialfällen [21, 11.5.6, 11.5.7]:

- Wenn $\lambda < \kappa$ ist, so sind $\mathrm{Sym}_{\lambda^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\mathrm{Sym}_{\mu^+}(\mu)/\mathrm{Sym}_\mu(\mu)$ nicht isomorph.
- Wenn $\aleph_1 \leq \lambda$ ist, so sind $\mathrm{Sym}_{\lambda^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\mathrm{Sym}_{\aleph_1}(\mu)/\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\mu)$ nicht isomorph.

Eine Teilantwort auf die Frage von Scott stammt von Ulrich Felgner und Frieder Haug [14, Seite 511], die 1993 zeigten:

> Unter der Annahme von GCH gilt für $\lambda < \theta$, dass $\mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\theta(\kappa)$ und $\mathrm{Sym}_{\lambda^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ nicht isomorph sind.

Mit Hilfe obiger Resultate über die Konfinalität dieser Gruppen erhält man sogar eine etwas weitergehende Aussage. Diese ist zudem bereits in ZSF + AC beweisbar.

Korollar 4.9 *Seien κ, λ, μ und θ unendliche Kardinalzahlen mit $\lambda < \kappa$ und $\theta < \mu$. Wenn $\lambda \neq \theta$ ist, dann sind $\mathrm{Sym}_{\lambda^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und $\mathrm{Sym}_{\theta^+}(\mu)/\mathrm{Sym}_\theta(\mu)$ nicht isomorph.*

Beweis: Aus Satz 4.7 folgt direkt:
$\mathrm{konf}\left(\mathrm{Sym}_{\lambda^+}(\kappa)/\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\right) = \lambda^+ \neq \theta^+ = \mathrm{konf}\left(\mathrm{Sym}_{\theta^+}(\mu)/\mathrm{Sym}_\theta(\mu)\right)$. $\square$

Kapitel 5

Ketten im blockweisen Stabilisator einer Teilmenge Δ von κ

In diesem Kapitel betrachten wir konfinale Ketten in den blockweisen Stabilisatoren von Teilmengen von κ.
Diese Gruppen sind nicht zuletzt deshalb interessant, weil für eine endliche Teilmenge Δ von κ der blockweise Stabilisator $\mathrm{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ von Δ nach R. Ball (1966) eine maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist. Es gilt nach Ball sogar, dass jede intransitve maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ blockweiser Stabilisator einer endlichen Teilmenge ist. Wir zeigen im Folgenden, dass diese Gruppen dieselbe Konfinalität wie die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst haben.
Wenn Δ weder endlich noch koendlich ist, so ist die Konfinalität von $\mathrm{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ abhängig davon, welche Werte die Konfinalitäten der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und die der $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ haben. Da diese in $\mathrm{ZSF} + \mathrm{AC}$ im Allgemeinen nicht berechnet werden können, lassen sich insbesondere keine konkreten Untergruppen von $\mathrm{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ angeben, die eine kürzeste konfinale Kette bilden.
Allerdings werden wir sehen, dass ein enger Zusammenhang zwischen den konfinalen Ketten in $\mathrm{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ und denen in der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und in der $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ besteht.

5.1 Die Konfinalität des blockweisen Stabilisators

Die Konfinalität der blockweisen Stabilisatoren einer Teilmenge von κ bestimmen wir mit Hilfe der folgenden Proposition über die Konfinalität des direkten Produkts zweier Gruppen.

Proposition 5.1 *Sei H eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe.*

(i) Wenn K eine nicht endlich–erzeugbare Gruppe ist, dann gilt $\operatorname{konf}(H \times K) = \min\{\operatorname{konf}(H), \operatorname{konf}(K)\}$.

(ii) Wenn K eine endlich–erzeugbare Gruppe ist, dann gilt $\operatorname{konf}(H \times K) = \operatorname{konf}(H)$.

Beweis: (i) Sei $\mu = \operatorname{konf}(H)$ und $\theta = \operatorname{konf}(K)$. O. B. d. A. sei $\mu \leq \theta$.
Wenn $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in H ist, dann ist $\{U_\nu \times K;\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen von $H \times K$. Da U_ν (für $\nu \in \mu$) eine echte Untergruppe von H ist, ist $U_\nu \times K$ echt in $H \times K$. Offensichtlich gilt $H \times K = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \big(U_\nu \times K\big)$. Also ist $\{U_\nu \times K;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in $H \times K$.
Damit gilt $\operatorname{konf}(H \times K) \leq \mu = \operatorname{konf}(H) = \min\{\operatorname{konf}(H), \operatorname{konf}(K)\}$ $(\star)$.

Für $\gamma = \operatorname{konf}(H \times K)$ sei $\{V_\nu;\ \nu \in \gamma\}$ eine konfinale Kette in $H \times K$.

Wie man leicht sieht, gilt eine der folgenden Aussagen:

(1) Für alle $\nu \in \mu$ ist $H \nleq V_\nu$.

(2) Für alle $\nu \in \mu$ ist $K \nleq V_\nu$.

Wir unterscheiden also zwei Fälle:

<u>1. Fall:</u> Für alle $\nu \in \mu$ ist $H \nleq V_\nu$.
Dann ist für alle $\nu \in \mu$ der Schnitt $V_\nu \cap H$ eine echte Untergruppe von H und wegen $H = (H \times K) \cap H = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \big(V_\nu \cap H\big)$ folgt, dass $\{V_\nu \cap H;\ \nu \in \gamma\}$ eine konfinale Kette in H ist. Also gilt $\operatorname{konf}(H) \leq \gamma = \operatorname{konf}(H \times K)$ und mit $(\star)$ folgt die Behauptung.

<u>2. Fall:</u> Für alle $\nu \in \mu$ ist $K \nleq V_\nu$.
Dann folgt analog zum 1. Fall $\operatorname{konf}(K) \leq \operatorname{konf}(H \times K)$.
Mit $(\star)$ ergibt sich daraus $\operatorname{konf}(H) \leq \operatorname{konf}(K) \leq \operatorname{konf}(H \times K) \leq \operatorname{konf}(H)$, d. h. $\operatorname{konf}(H \times K) = \operatorname{konf}(H) = \min\{\operatorname{konf}(H), \operatorname{konf}(K)\}$.

(ii) folgt analog zu (i). Dabei kann der 2. Fall nicht eintreten, denn da K als endlich–erzeugbar vorausgesetzt wird, ist K in einem der Glieder der konfinalen Kette in $H \times K$ als Untergruppe enthalten. □

Aus dieser Proposition folgt direkt eine Verallgemeinerung von Korollar 4.5.

Korollar 5.2 *Seien κ, μ reguläre unendliche Kardinalzahlen mit $\kappa \leq \mu$.*
Dann existiert eine Gruppe G und ein Normalteiler N von G, so dass gilt:

(i) $\operatorname{konf}(G) = \kappa$,

(ii) $\operatorname{konf}(G/N) = \mu$.

Beweis: Wir setzen $G = \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) \times \mathrm{Sym}_\mu(\kappa)$ und $N = \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$.
Dann folgt aus obiger Proposition 5.1 und Satz 3.8:
$\operatorname{konf}(G) = \min\{\operatorname{konf}(\mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)), \operatorname{konf}(\mathrm{Sym}_\mu(\kappa))\} = \min\{\kappa, \mu\} = \kappa$ und
$\operatorname{konf}(G/N) = \operatorname{konf}(\mathrm{Sym}_\mu(\kappa)) = \mu$. □

Bemerkung: Eine weitere Verallgemeinerung dieses Korollars ist nicht möglich, da die Konfinalität einer Gruppe immer eine reguläre Kardinalzahl ist und die Konfinalität einer Faktorgruppe einer Gruppe G nicht kleiner als die Konfinalität von G selbst sein kann (vgl. Proposition 1.4 und Proposition 4.1).

Nun wenden wir uns der Konfinalität der blockweisen Stabilisatoren zu:

Satz 5.3 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ.*

(i) Wenn Δ endlich oder koendlich ist, so gilt $\operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}}) = \operatorname{konf}(S)$.

(ii) Wenn Δ und $\kappa - \Delta$ unendlich sind, dann gilt
$\operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}}) = \min\{\operatorname{konf}(\mathrm{Sym}(\Delta)), \operatorname{konf}(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta))\}$.
Insbesondere gilt für eine mittelmäßige Teilmenge Δ
$\operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}}) = \operatorname{konf}(S)$.

Beweis: Offensichtlich ist $S_{\{\Delta\}} = \mathrm{Sym}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$. Außerdem schneiden sich $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ trivial und beide sind Normalteiler von $S_{\{\Delta\}}$.
Folglich ist $S_{\{\Delta\}} = \mathrm{Sym}(\Delta) \times \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ das innere direkte Produkt dieser Gruppen.

(i) Wenn Δ und damit auch $\mathrm{Sym}(\Delta)$ endlich ist, dann muss $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sein, d. h. $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \cong S$. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 5.1 (ii).

Analog ist die Argumentation für koendliches Δ.

(ii) Die Behauptung folgt direkt aus Proposition 5.1 (i). □

Bemerkung: Bei Aussage (ii) aus obiger Proposition lässt sich (in ZSF + AC) nicht entscheiden, welches das Minimum der beiden Konfinalitäten ist, da man beispielsweise nicht beweisen kann, dass für $|\Delta| < |\kappa - \Delta|$ auch $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big) \leq \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$ gilt (vgl. Satz 1.8).

Korollar 5.4 *Sei $\Delta \subseteq \omega$. Dann gilt* $\operatorname{konf}(\operatorname{Sym}(\omega)_{\{\Delta\}}) = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\omega)\big)$.

Beweis: Da eine Teilmenge von ω endlich, koendlich oder mittelmäßig ist, folgt dies direkt aus Satz 5.3. □

Ralph Ball hat 1966 gezeigt, dass der blockweise Stabilisator einer endlichen Teilmenge von κ eine maximale Untergruppe der $\operatorname{Sym}(\kappa)$ ist (vgl. [3, Theorem 1.12]). Außerdem bewies er, dass sämtliche intransitiven maximalen Untergruppen der $\operatorname{Sym}(\kappa)$ von diesem Typ sind (vgl. [3, Theorem 1.17]).
Damit folgt aus Satz 5.3, dass eine intransitive maximale Untergruppe der $\operatorname{Sym}(\kappa)$ dieselbe Konfinalität wie die $\operatorname{Sym}(\kappa)$ selbst hat:

Korollar 5.5 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und G eine intransitive maximale Untergruppe der* $\operatorname{Sym}(\kappa)$.
Dann gilt $\operatorname{konf}(G) = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big)$.

5.2 Konfinale Ketten im blockweisen Stabilisator

Wir haben gesehen, dass die Konfinalität des blockweisen Stabilisators einer Teilmenge Δ von κ von den Werten von $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big)$ und $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$ abhängt. Insbesondere kann man in ZSF + AC keine konkrete kürzeste konfinale Kette in $\operatorname{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ angeben.
Es lässt sich jedoch ein enger Zusammenhang zwischen den konfinalen Ketten in $\operatorname{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ und denen in der $\operatorname{Sym}(\Delta)$ sowie in der $\operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$ feststellen.
Zunächst gilt, dass man aus jeder konfinalen Kette in der $\operatorname{Sym}(\Delta)$ sowie auch aus jeder konfinalen Kette in der $\operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$ auf natürliche Weise eine im blockweisen Stabilisator $\operatorname{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ enthält:

Proposition 5.6 *Seien κ, μ unendliche Kardinalzahlen, $S = \operatorname{Sym}(\kappa)$, Δ eine Teilmenge von κ, $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in der* $\operatorname{Sym}(\Delta)$ *und $\big\{V_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in der* $\operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$.

Dann sind $\{U_\nu \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta);\ \nu \in \mu\}$ *und* $\{V_\nu \cdot \mathrm{Sym}(\Delta);\ \nu \in \mu\}$ *konfinale Ketten in* $S_{\{\Delta\}}$.

Beweis: $S_{\{\Delta\}}$ ist das innere direkte Produkt von $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$. Damit folgt die Behauptung analog zum ersten Teil des Beweises von Proposition 5.1 (i). □

Die folgende Proposition gibt darüber Auskunft, wie die Glieder einer beliebigen kürzesten konfinalen Kette im blockweisen Stabilisator einer Teilmenge aussehen.

Proposition 5.7 *Sei* κ *eine unendliche Kardinalzahl,* $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$, Δ *eine Teilmenge von* κ, $\mu = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$ *und* $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $S_{\{\Delta\}}$.

(i) Seien Δ *und* $\kappa - \Delta$ *unendlich.*

(a) Es gelte $\mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big) < \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$.
Wenn λ *eine unendliche Kardinalzahl mit* $|\Delta|^{<\lambda} < \mu$ *ist, dann existiert ein* $\xi \in \mu$ *mit* $\mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \leq H_\xi$.
Außerdem ist $\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta);\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $\mathrm{Sym}(\Delta)$, *wobei für alle* $\nu \in \mu$ *gilt:* $\xi \leq \nu \implies H_\nu = \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta)\big) \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$.

(b) Es gelte $\mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big) < \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big)$.
Wenn λ *eine unendliche Kardinalzahl mit* $|\kappa - \Delta|^{<\lambda} < \mu$ *ist, dann existiert ein* $\xi \in \mu$ *mit* $\mathrm{Sym}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa - \Delta) \leq H_\xi$.
Außerdem ist $\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta);\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$, *wobei für alle* $\nu \in \mu$ *gilt:* $\xi \leq \nu \implies H_\nu = \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big) \cdot \mathrm{Sym}(\Delta)$.

(c) Es gelte $\mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big) = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$.
Wenn λ *und* θ *unendliche Kardinalzahlen mit* $|\Delta|^{<\lambda} < \mu$ *und* $|\kappa - \Delta|^{<\theta} < \mu$ *sind, dann existiert ein* $\xi \in \mu$ *mit* $\mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_\theta(\kappa - \Delta) \leq H_\xi$.

(ii) Sei Δ *endlich.*
Wenn λ *eine unendliche Kardinalzahl mit* $|\kappa - \Delta|^{<\lambda} < \mu$ *ist, dann existiert ein* $\xi \in \mu$ *mit* $\mathrm{Sym}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa - \Delta) \leq H_\xi$.
Außerdem ist $\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta);\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$, *wobei für alle* $\nu \in \mu$ *gilt:* $\xi \leq \nu \implies H_\nu = \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big) \cdot \mathrm{Sym}(\Delta)$.

Beweis: (i) (a): *1. Behauptung:* Es existiert ein $\nu_1 \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \leq H_{\nu_1}$.
Beweis: Angenommen für alle $\nu \in \mu$ ist $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \nleq H_\nu$, d. h. $H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ ist eine echte Untergruppe von $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$.

Außerdem gilt $\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta) = S_{\{\Delta\}} \cap \operatorname{Sym}(\kappa-\Delta) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)\big)$ und damit bildet $\big\{H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\kappa-\Delta);\ \nu\in\mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)$.
Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $\mu < \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)\big)$ ist, und somit ist die 1. Behauptung bewiesen.

Weil nach Voraussetzung $|\operatorname{Sym}_\lambda(\Delta)| = |\Delta|^{<\lambda} < \mu = \operatorname{cf}(\mu)$ gilt, existiert nach Proposition 2.6 ein $\nu_2 \in \mu$ mit $\operatorname{Sym}_\lambda(\Delta) \leq H_{\nu_2}$.
Wir setzen $\xi = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ und der erste Teil der Behauptung ist gezeigt.

Für alle $\nu \in \mu$ ist $H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta)$ eine echte Untergruppe von $\operatorname{Sym}(\Delta)$. Denn angenommen es gäbe ein $\nu_3 \in \mu$ mit $H_{\nu_3} \cap \operatorname{Sym}(\Delta) = \operatorname{Sym}(\Delta)$, so wäre $\operatorname{Sym}(\Delta) \leq H_{\nu_3}$ und gemäß Behauptung 1 würde $S_{\{\Delta\}} = \operatorname{Sym}(\Delta)\cdot\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta) \leq \big\langle H_{\nu_3}, H_{\nu_1}\big\rangle = H_{\max\{\nu_3,\nu_1\}}$ gelten. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung.
Weil $\operatorname{Sym}(\Delta) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta)\big)$ gilt, bildet $\big\{H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta);\ \nu\in\mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\operatorname{Sym}(\Delta)$.

Sei nun $\nu \in \mu$ mit $\xi \leq \nu$.

2. Behauptung: $\big(H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta)\big)\cdot\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta) = H_\nu$.
Beweis: Wegen $\xi \leq \nu$ folgt aus Behauptung 1, dass $\big(H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta)\big)\cdot\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta) \leq H_\nu$ ist.
Sei umgekehrt $\pi \in H_\nu$. Dann ist $\pi \in S_{\{\Delta\}} = \operatorname{Sym}(\Delta)\cdot\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)$. Also ist $\pi = \pi_1\cdot\pi_2$, wobei $\pi_1 = \pi \restriction \Delta \in \operatorname{Sym}(\Delta)$ und $\pi_2 = \pi \restriction (\kappa-\Delta) \in \operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)$ ist.
Wegen $\xi \leq \nu$ ist $\pi_2 \in H_\nu$ und damit $\pi_1 = \pi\cdot\pi_2^{-1} \in H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta)$.
Also ist $\pi = \pi_1\cdot\pi_2 \in \big(H_\nu \cap \operatorname{Sym}(\Delta)\big)\cdot\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)$.

(b) folgt aus (a) durch Vertauschen von Δ und $\kappa-\Delta$.

(c) folgt direkt aus Proposition 2.6.

(ii) Es existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\operatorname{Sym}(\Delta) \leq H_\nu$. Denn sonst würde wie in Behauptung 1 folgen, dass $\operatorname{Sym}(\Delta)$ die Union einer aufsteigend–geordneten Kette echter Untergruppen ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\operatorname{Sym}(\Delta)$ eine endliche Gruppe ist.

Der Rest der Behauptung folgt analog zum Beweis von (i) (a). □

Bemerkung: Die obige Proposition zeigt, welche Gestalt kürzeste konfinale Ketten im blockweisen Stabilisator $\operatorname{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ der Menge Δ haben.
Im Fall, dass $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big) < \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa-\Delta)\big)$ gilt, sind ihre Glieder, eventuell abgesehen von einem Anfangsstück der Kette, das Produkt der Glieder einer kürzesten

konfinalen Kette in der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und der Gruppe $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$. Analog ist die Situation, falls Δ endlich oder koendlich ist oder $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big) < \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big)$ gilt.
Im Fall, dass $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big) = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big) = \mu$ ist, gibt es weitere Möglichkeiten. Denn wenn $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und $\big\{V_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine in $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ bildet, dann sind, wie man leicht sieht, sowohl $\big\{U_\nu \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta);\ \nu \in \mu\big\}$ und $\big\{V_\nu \cdot \mathrm{Sym}(\Delta);\ \nu \in \mu\big\}$ als auch $\big\{U_\nu \cdot V_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ konfinale Ketten in $S_{\{\Delta\}}$.

Wenn wir zusätzlich GCH annehmen, wird die Situation aus Proposition 5.7 deutlich übersichtlicher:

Korollar 5.8 (GCH)
*Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ.
Sei $\mu = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$ und $\big\{H_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$.*

*(i) Sei $\aleph_0 \le |\Delta| < \kappa$.
Dann existiert ein $\xi \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(|\Delta|)}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \le H_\xi$.
Außerdem ist $\big\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta);\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\mathrm{Sym}(\Delta)$, wobei für alle $\nu \in \mu$ gilt: $\xi \le \nu \implies H_\nu = \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta)\big) \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$.*

*(ii) Sei $|\Delta| = |\kappa - \Delta| = \kappa$.
Dann existiert ein $\xi \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\kappa - \Delta) \le H_\xi$.*

*(iii) Sei Δ endlich.
Dann existiert ein $\xi \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_{\mathrm{cf}(\kappa)}(\kappa - \Delta) \le H_\xi$.
Außerdem ist $\big\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta);\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$, wobei für alle $\nu \in \mu$ gilt: $\xi \le \nu \implies H_\nu = \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big) \cdot \mathrm{Sym}(\Delta)$.*

Beweis: (i) Wegen GCH ist $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big) = |\Delta|^+ < \kappa^+ = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$. Also ist $\mu = |\Delta|^+$ gemäß Satz 5.3 und außerdem gilt $|\Delta|^{<\mathrm{cf}(|\Delta|)} = |\Delta| < \mu$. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 5.7 (i) (a).

(ii) folgt aus Proposition 5.7 (i) (c) wegen $\mu = \kappa^+$ und $|\Delta|^{<\mathrm{cf}(\kappa)} = |\kappa - \Delta|^{<\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{<\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa < \mu$.

(iii) folgt aus Proposition 5.7 (ii) wegen $\mu = \kappa^+$ und $|\kappa - \Delta|^{<\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{<\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa < \mu$. □

Bemerkung: Korollar 5.8 kann in ZSF + AC allein nicht bewiesen werden. Denn mit Hilfe einer Forcing–Konstruktion wie in Proposition 2.9 kann man Modelle der Mengenlehre konstruieren, in denen die Aussagen (i), (ii) oder (iii) aus Korollar 5.8 falsch sind.

Kapitel 6

Ketten im Faststabilisator einer Teilmenge Δ von κ

Wir bestimmen in diesem Kapitel die Konfinalität der Faststabilisatoren von unendlichen Teilmengen von κ. Dabei unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem ob die Mächtigkeit der Teilmenge eine Nachfolgerkardinalzahl, eine Limeskardinalzahl oder $\aleph_0$ ist.
Für die Untersuchung des letzten Falls definieren wir eine weitere Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, den sogenannten gleichgewichtigen Faststabilisator der Menge Δ.
Wenn $|\Delta| < \kappa$ ist, so ist der Faststabilisator $\mathrm{Sym}(\kappa)_{[\Delta]}$ von Δ eine maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$. Aus den Resultaten über die Konfinalität von $\mathrm{Sym}(\kappa)_{[\Delta]}$ in diesem Kapitel folgt, dass man in ZSF + AC Beispiele für maximale Untergruppen der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ angeben kann, deren Konfinalität echt kleiner als die der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst ist. Falls man GCH annimmt, gilt sogar, dass sämtliche maximalen Untergruppen, die Faststabilisatoren von Teilmengen sind, eine echt kleinere Konfinalität als die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ haben.

Wenn wir im Folgenden Aussagen über den Faststabilisator von Δ machen, nehmen wir meist an, dass das Komplement von Δ die Mächtigkeit κ hat. Dies ist ohne Einschränkung möglich, da andernfalls der Faststabilisator keine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ ist:

Hilfssatz 6.1 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ. Dann gilt:*

$$S_{[\Delta]} = S \iff |\kappa - \Delta| < \kappa.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $|\kappa - \Delta| = \kappa$. Wähle $\Gamma \subseteq \kappa - \Delta$ mit $|\Gamma| = |\Delta| \leq \kappa$. Dann existiert eine

Permutation $\pi \in S$ mit $\pi(\Delta) = \Gamma$ und es gilt $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| = |\Delta \triangle \Gamma| = |\Delta \cup \Gamma| \geq |\Delta|$. Folglich ist $\pi \notin S_{[\Delta]}$.

„$\Leftarrow$": Sei $|\kappa - \Delta| < \kappa$ und $\pi \in S$. Dann gilt $|\pi(\Delta) - \Delta| < \kappa$, da $\pi(\Delta) - \Delta \subseteq \kappa - \Delta$ ist. Außerdem folgt $\Delta - \pi(\Delta) \subseteq \kappa - \pi(\Delta) = \pi(\kappa - \Delta)$ und somit ist $|\Delta - \pi(\Delta)| \leq |\kappa - \Delta| < \kappa$. Also gilt $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| < \kappa = |\Delta|$ und damit auch $\pi \in S_{[\Delta]}$. □

Bemerkung 6.2 Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ. Dann gilt $S_{\{\Delta\}} \leq S_{[\Delta]}$ und $\mathrm{Sym}_{|\Delta|}(\kappa) \leq S_{[\Delta]}$.
Wenn Δ überabzählbar ist, so gilt sogar $S_{[\Delta]} = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_{|\Delta|}(\kappa)$, wie man relativ leicht zeigen kann (vgl. Ball [3, Theorem 2.2 (4)] oder Brazil et al. [7, Bemerkung vor Theorem 4.1]).

Die Konfinalität des Faststabilisators einer Teilmenge von κ kann niemals größer sein als die Konfinalität der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst:

Korollar 6.3 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \leq \mathrm{konf}\,(S)$.

Beweis: Da $S_{\{\Delta\}} \leq S_{[\Delta]}$ ist, folgt die Behauptung direkt aus Korollar 2.16. □

6.1 Fall 1: Die Mächtigkeit von Δ ist eine Nachfolgerkardinalzahl

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Konfinalität des Faststabilisators $\mathrm{Sym}(\kappa)_{[\Delta]}$ einer unendlichen Teilmenge Δ von κ, deren Mächtigkeit eine Nachfolgerkardinalzahl ist, gleich der des blockweisen Stabilisators $\mathrm{Sym}(\kappa)_{\{\Delta\}}$ von Δ ist.

Wir setzen $\lambda = |\Delta|$ und $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$. Damit ist λ eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl. Nach obiger Bemerkung 6.2 ist $S_{[\Delta]}$ dann das Produkt des blockweisen Stabilisators $S_{\{\Delta\}}$ und der beschränkten symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$. In Kapitel 3 haben wir für reguläres, überabzählbares λ zwei konfinale Ketten in der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ angegeben (vgl. Satz 3.1 und Satz 3.16). So liegt die Idee nahe, aus solchen eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ zu konstruieren, indem man sämtliche Glieder mit $S_{\{\Delta\}}$ multipliziert.

Doch dies ist nicht möglich. Denn für beide dort definierte Ketten $\{H_\nu;\ \nu \in \lambda\}$ und $\{U_\nu;\ \nu \in \lambda\}$ kann man Ordinalzahlen $\nu, \tilde{\nu} \in \mu$ mit der Eigenschaft finden, dass $H_\nu \cdot S_{\{\Delta\}}$ und $U_{\tilde{\nu}} \cdot S_{\{\Delta\}}$ keine Untergruppen von $S_{[\Delta]}$ mehr sind, sondern nur noch Teilmengen. Weil, wie wir zeigen werden, bei dem hier betrachteten Fall $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) = \operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}})$ gilt, ist die Konfinalität von $S_{[\Delta]}$ abhängig von den Werten von $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big)$ und $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$ (vgl. Satz 5.3). Da dies für die $\operatorname{Sym}_\lambda(\kappa)$ nicht gilt (vgl. Bemerkung 3.9), ist es prinzipiell nicht möglich, aus kürzesten konfinalen Ketten in der $\operatorname{Sym}_\lambda(\kappa)$ solche in $S_{[\Delta]}$ zu erhalten.

Wir zeigen zunächst, dass für eine überabzählbare Teilmenge Δ von κ die Ungleichung $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) \leq \operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}})$ gilt. Danach wird, unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $|\Delta|$ eine Nachfolgerkardinalzahl ist, auch die umgekehrte Ungleichung bewiesen.

Proposition 6.4 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \operatorname{Sym}(\kappa)$ und Δ eine überabzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) \leq \operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}})$.

Beweis: Weil $|\kappa - \Delta| = \kappa$ gilt, ist $\operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}}) = \min\big\{\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big), \operatorname{konf}(S)\big\}$ gemäß Satz 5.3. Nach Korollar 6.3 gilt $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) \leq \operatorname{konf}(S)$.
Somit bleibt noch $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) \leq \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big)$ zu zeigen.

Sei also $\mu = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big)$ und $\lambda = |\Delta|$. Nach Proposition 2.5 existiert eine konfinale Kette $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ in der $\operatorname{Sym}(\Delta)$ mit $U_0 = \operatorname{Sym}_\lambda(\Delta)$.
Für alle $\nu \in \mu$ setzen wir $H_\nu = U_\nu \cdot \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$.
Dann folgt aus Proposition 5.6, dass $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ ist, wobei $H_0 = \operatorname{Sym}_\lambda(\Delta) \cdot \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$ gilt. $(\star)$
Es ist $S_{\{\Delta\}} \leq S_{[\Delta]}$ und $\operatorname{Sym}_\lambda(\kappa) \trianglelefteq S_{[\Delta]}$. Folglich bildet $\{H_\nu \cdot \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen von $S_{[\Delta]}$.
Außerdem gilt $S_{[\Delta]} = S_{\{\Delta\}} \cdot \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa) = \big(\bigcup\limits_{\nu\in\mu} H_\nu\big) \cdot \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa) = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cdot \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa)\big)$, da $\lambda = |\Delta| \geq \aleph_1$ ist (vgl. Bemerkung 6.2).

Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist $H_\nu \cdot \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa)$ eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$.
Beweis: Sei $\nu \in \mu$ und $\pi \in S_{\{\Delta\}} - H_\nu$.
Angenommen $\pi \in H_\nu \cdot \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa)$, dann existieren $\rho \in H_\nu$ und $\sigma \in \operatorname{Sym}_\lambda(\kappa)$ mit $\pi = \rho \cdot \sigma$.
Weil $\pi \in S_{\{\Delta\}}$ und $\rho \in H_\nu \leq S_{\{\Delta\}}$ ist, folgt $\sigma \in S_{\{\Delta\}}$.
Wegen $S_{\{\Delta\}} = \operatorname{Sym}(\Delta) \cdot \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$ ist $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$, wobei $\sigma_1 = \sigma \upharpoonright \Delta \in \operatorname{Sym}(\Delta)$ und $\sigma_2 = \sigma \upharpoonright (\kappa - \Delta) \in \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$ ist.

Da $\sigma \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ist, gilt $\sigma_1 \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta)$, also ist $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \in \mathrm{Sym}_\lambda(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$. Wegen ($\star$) folgt daraus $\sigma \in H_0 \leq H_\nu$ und damit gilt $\pi = \rho \cdot \sigma \in H_\nu$ im Widerspruch zur Wahl von π.
Folglich ist $\pi \in S_{[\Delta]} - H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ und die Behauptung ist bewiesen.

Somit bildet $\{H_\nu \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ und daraus folgt insbesondere $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \leq \mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big)$. $\square$

Für den Beweis von $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \geq \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$, falls $|\Delta|$ eine Nachfolgerkardinalzahl ist, benutzen wir das folgende Resultat von Ralph Ball [3, Lemma 1.11].

Proposition 6.5 (Ball)
Seien κ, λ unendliche Kardinalzahlen, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ mit $\delta = |\Delta|$. Es gelte $\delta < \kappa$ oder $\lambda < \kappa^+$.
Sei $\pi \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) - S_{\{\Delta\}}$.
Für $\theta = \max\Big\{\big|\{x \in \Delta;\ \pi(x) \in \kappa - \Delta\}\big|, \big|\{x \in \kappa - \Delta;\ \pi(x) \in \Delta\}\big|\Big\}$ gelte $\aleph_0 \leq \theta \leq \delta$.
Wenn $\sigma \in \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) - S_{\{\Delta\}}$ ist, wobei $\max\Big\{\big|\{x \in \Delta;\ \sigma(x) \in \kappa - \Delta\}\big|, \big|\{x \in \kappa - \Delta;\ \sigma(x) \in \Delta\}\big|\Big\} \leq \theta$ gilt, dann ist $\sigma \in \big\langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa), \pi\big\rangle$.

Hilfssatz 6.6 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, Δ eine Teilmenge von κ und $\pi \in \mathrm{Sym}(\kappa)$. Dann gilt*

$$\max\Big\{\big|\{x \in \Delta;\ \pi(x) \in \kappa - \Delta\}\big|, \big|\{x \in \kappa - \Delta;\ \pi(x) \in \Delta\}\big|\Big\} \leq |\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)|.$$

Falls dabei $\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)$ unendlich ist, so gilt Gleichheit.

Beweis: Es ist $\{x \in \Delta;\ \pi(x) \in \kappa - \Delta\} \cup \{x \in \kappa - \Delta;\ \pi(x) \in \Delta\} = \Delta \bigtriangleup \pi^{-1}(\Delta)$.
Denn für ein $x \in \kappa$ gilt: $x \in \Delta\ \&\ \pi(x) \in \kappa - \Delta \iff x \in \Delta - \pi^{-1}(\Delta)$ und $x \in \kappa - \Delta\ \&\ \pi(x) \in \Delta \iff x \in \pi^{-1}(\Delta) - \Delta$.

Also folgt $|\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)| = |\pi^{-1}\big(\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)\big)| = |\pi^{-1}(\Delta) \bigtriangleup \Delta| = \big|\{x \in \Delta;\ \pi(x) \in \kappa - \Delta\} \cup \{x \in \kappa - \Delta;\ \pi(x) \in \Delta\}\big| \geq \max\Big\{\big|\{x \in \Delta;\ \pi(x) \in \kappa - \Delta\}\big|, \big|\{x \in \kappa - \Delta;\ \pi(x) \in \Delta\}\big|\Big\}$, wobei Gleichheit gilt, falls die betrachtete Menge unendlich ist. $\square$

Hilfssatz 6.7 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ. Sei $\pi \in S$ mit $|\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)| < \kappa$.*
Dann existiert $\rho \in S_{\{\Delta\}}$ mit $\pi\rho \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ und $\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta) = \Delta \bigtriangleup (\pi\rho)(\Delta)$.

Beweis: Sei $\pi = \prod_{\nu\in\mu} z_\nu = \bigcup_{\nu\in\mu} z_\nu$ die Zerlegung von π in elementfremde Zyklen, wobei μ eine Kardinalzahl mit $\mu \leq \kappa$ ist.

Behauptung: Es gilt $\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)\big)$ und für $\nu, \xi \in \mu$ mit $\nu \neq \xi$ ist $\big(\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)\big) \cap \big(\Delta \bigtriangleup z_\xi(\Delta)\big) = \varnothing$.

Beweis: „$\subseteq$“: Sei $x \in \Delta \bigtriangleup \pi(\Delta) \subseteq \operatorname{supp}(\pi)$. Also existiert $\nu \in \mu$ mit $x \in \operatorname{supp}(z_\nu)$. Dann ist aber $x \in \pi(\Delta) \iff \pi^{-1}(x) = z_\nu^{-1}(x) \in \Delta \iff x \in z_\nu(\Delta)$ und es folgt $x \in \Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)$.

„$\supseteq$“: Sei $\nu \in \mu$ und $x \in \Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)$. Dann ist $x \in \operatorname{supp}(z_\nu) \subseteq \operatorname{supp}(\pi)$ und somit folgt erneut $x \in \pi(\Delta) \iff x \in z_\nu(\Delta)$ und daraus $x \in \Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)$.

Die Disjunktheit der Union folgt wegen $\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta) \subseteq \operatorname{supp}(z_\nu)$ aus der Disjunktheit der Zyklen. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Wir setzen $A = \{\nu \in \mu;\ \Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta) \neq \varnothing\}$ und $B = \mu - A$.
Es sei $\tau = \prod_{\nu\in A} z_\nu = \bigcup_{\nu\in A} z_\nu$ und $\rho = \Big(\prod_{\nu\in B} z_\nu\Big)^{-1} = \Big(\bigcup_{\nu\in B} z_\nu\Big)^{-1}$.
Da elementfremde Zyklen kommutieren, ist $\pi = \tau \cdot \rho^{-1}$, d. h. $\tau = \pi \cdot \rho$.
Dabei ist $\rho \in S_{\{\Delta\}}$. Denn für $\nu \in B$ gilt $\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta) = \varnothing$ und damit $z_\nu(\Delta) = \Delta$.
Analog zum Beweis der Behauptung folgt $\Delta \bigtriangleup \tau(\Delta) = \bigcup_{\nu\in A} \big(\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)\big)$.
Damit gilt $\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)\big) = \bigcup_{\nu\in A} \big(\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)\big) = \Delta \bigtriangleup \tau(\Delta) = \Delta \bigtriangleup (\pi\rho)(\Delta)$, da für $\nu \in \mu - A = B$ die Menge $\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta) = \varnothing$ ist.
Außerdem folgt aus $\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta) = \bigcup_{\nu\in A} \big(\Delta \bigtriangleup z_\nu(\Delta)\big)$, der Disjunktheit dieser Union sowie $|\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)| < \kappa$, dass auch $|A| < \kappa$ gilt.
Damit ist $|\operatorname{supp}(\tau)| = \big|\bigcup_{\nu\in A} \operatorname{supp}(z_\nu)\big| = \sum_{\nu\in A} |\operatorname{supp}(z_\nu)| \leq |A| \cdot \aleph_0 < \kappa$.
Also gilt $\tau = \pi\rho \in \operatorname{Sym}_\kappa(\kappa)$. □

Mit obigem Hilfssatz kann man eine Modifikation von Proposition 6.5 zeigen, die im Folgenden benutzt wird:

Proposition 6.8 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \operatorname{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ. Sei $\pi \in S$ mit $\aleph_0 \leq |\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)| < |\Delta|$.*
Dann gilt $\big\{\sigma \in S;\ |\Delta \bigtriangleup \sigma(\Delta)| \leq |\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)|\big\} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\ \pi\big\rangle$.

Beweis: Sei $\sigma \in S$ mit $|\Delta \bigtriangleup \sigma(\Delta)| \leq |\Delta \bigtriangleup \pi(\Delta)|$. Falls $\sigma \in S_{\{\Delta\}}$ ist, so sind wir fertig. Wir nehmen also o. B. d. A. $\sigma \notin S_{\{\Delta\}}$ an.

Weil $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| < |\Delta| \leq \kappa$ ist, existiert nach Hilfssatz 6.7 ein $\rho \in S_{\{\Delta\}}$ mit der Eigenschaft, dass $\pi\rho \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ und $\Delta \triangle \pi(\Delta) = \Delta \triangle (\pi\rho)(\Delta)$ gilt.
Analog folgt wegen $|\Delta \triangle \sigma(\Delta)| < |\Delta| \leq \kappa$, dass ein $\tau \in S_{\{\Delta\}}$ existiert mit $\sigma\tau \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa)$ und $\Delta \triangle \sigma(\Delta) = \Delta \triangle (\sigma\tau)(\Delta)$.
Da $\pi \notin S_{\{\Delta\}}$ und $\sigma \notin S_{\{\Delta\}}$ sind, sind auch $\pi\rho \notin S_{\{\Delta\}}$ und $\sigma\tau \notin S_{\{\Delta\}}$.
Also gilt $\pi\rho \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) - S_{\{\Delta\}}$ mit $\aleph_0 \leq |\Delta \triangle \pi(\Delta)| = |\Delta \triangle (\pi\rho)(\Delta)| < |\Delta|$ und $\sigma\tau \in \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa) - S_{\{\Delta\}}$ mit $|\Delta \triangle (\sigma\tau)(\Delta)| = |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq |\Delta \triangle \pi(\Delta)|$.
Damit können wir Proposition 6.5 in Verbindung mit Hilfssatz 6.6 anwenden und es folgt $\sigma\tau \in \big\langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_\kappa(\kappa),\, \pi\rho \big\rangle \leq \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi \big\rangle$, weil $\rho \in S_{\{\Delta\}}$ ist.
Da auch $\tau \in S_{\{\Delta\}}$ ist, gilt folglich $\sigma = \sigma\tau\tau^{-1} \in \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \sigma\tau \big\rangle \leq \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi \big\rangle$.

Wir haben also $\big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq |\Delta \triangle \pi(\Delta)|\big\} \leq \big\langle S_{\{\Delta\}},\ \pi \big\rangle$ gezeigt. Die umgekehrte Ungleichung ist offensichtlich. □

Aus dieser Proposition folgt, dass die Konfinalität des Faststabilisators mindestens so groß ist, wie die des Blockstabilisators:

Korollar 6.9 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine überabzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Wenn $|\Delta| = \theta^+$ für eine unendliche Kardinalzahl θ ist, so gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \geq \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.

Beweis: Wir wählen Teilmengen $\Gamma \subseteq \Delta$ mit $|\Gamma| = \theta < |\Delta|$ und $\Sigma \subseteq \kappa - \Delta$ mit $|\Sigma| = \theta < |\Delta| \leq \kappa = |\kappa - \Delta|$. Dann existiert eine Permutation $\pi \in S$, so dass $\pi(\Gamma) = \Sigma$ sowie $\pi(\Sigma) = \Gamma$ gilt und π auf $\kappa - (\Gamma \cup \Sigma)$ die Identität ist.
Also ist $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| = |\Sigma \cup \Gamma| = \theta < |\Delta|$.
Nach Proposition 6.8 gilt damit $S_{[\Delta]} = \big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq \theta\big\} = \big\langle S_{\{\Delta\}}, \pi \big\rangle$ und daraus folgt die Behauptung gemäß Proposition 1.9. □

Außerdem ergibt sich unmittelbar ein Satz von Ralph Ball (vgl. [3, Theorem 2.2 (8)]):

Korollar 6.10 (Ball)
Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine überabzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.
Wenn $|\Delta| = \theta^+$ für eine unendliche Kardinalzahl θ und $\pi \in S$ mit $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| = \theta$ ist, dann gilt $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi \big\rangle$.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Proposition 6.8, denn offensichtlich gilt $S_{[\Delta]} = \big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| < |\Delta|\big\} = \big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq |\Delta \triangle \pi(\Delta)|\big\}$. □

Aus Korollar 6.9 und Proposition 6.4 folgt die zentrale Aussage dieses Abschnitts:

Satz 6.11 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine überabzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Wenn $|\Delta| = \theta^+$ für eine unendliche Kardinalzahl θ ist, so gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.

6.2 Fall 2: Die Mächtigkeit von Δ ist eine Limeskardinalzahl

Die oben bestimmte Konfinalität des Faststabilisators einer Menge Δ, deren Mächtigkeit eine Nachfolgerkardinalzahl ist, ist nach Satz 5.3 abhängig von den Werten von $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big)$ und $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$.
Die Resultate in diesem Abschnitt zeigen, dass wir eine gänzlich andere Situation haben, falls $|\Delta|$ eine Limeskardinalzahl ist. Dann ist die Konfinalität des Faststabilisators von Δ gleich der Konfinalität der Kardinalzahl $|\Delta|$. Diese hängt nicht von den Werten von $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big)$ und $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big)$ ab. Denn die Forcing–Konstruktionen aus den Sätzen 1.7 und 1.8 von Sharp und Thomas bewahren Konfinalitäten (vgl. Bemerkung 3.9).

Proposition 6.12 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Wenn $|\Delta| = \aleph_\lambda$ für eine Limesordinalzahl λ ist, dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \leq \mathrm{cf}(\lambda)$.

Beweis: Sei $\mu = \mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(|\Delta|)$ und $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \mu\rangle$ eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen mit $\lambda = \bigcup\limits_{\nu \in \mu} \alpha_\nu$.
Wir definieren für $\nu \in \mu$

$$H_\nu = \{\pi \in S;\ |\Delta \triangle \pi(\Delta)| \leq \aleph_{\alpha_\nu}\}.$$

Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist H_ν eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$.
Beweis: Sei $\nu \in \mu$. Für zwei Permutationen π, σ gilt, wie man relativ leicht zeigen kann, $\Delta \triangle (\pi\sigma)(\Delta) \subseteq \big(\Delta \triangle \pi(\Delta)\big) \cup \big(\Delta \triangle \sigma(\Delta)\big)$ und somit ist H_ν eine Untergruppe von $S_{[\Delta]}$.

Wir wählen wieder Mengen $\Gamma \subseteq \Delta$ mit $|\Gamma| = \aleph_{\alpha_{\nu+1}} < \aleph_\lambda = |\Delta|$ und $\Sigma \subseteq \kappa - \Delta$ mit $|\Sigma| = \aleph_{\alpha_{\nu+1}} < |\Delta| \leq \kappa = |\kappa - \Delta|$. Also können wir eine Permutation $\pi \in S$ finden, so dass $\pi(\Gamma) = \Sigma$ sowie $\pi(\Sigma) = \Gamma$ gilt und π auf $\kappa - (\Gamma \cup \Sigma)$ die Identität ist. Dann ist $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| = |\Gamma \cup \Sigma| = \aleph_{\alpha_{\nu+1}} < |\Delta|$ und somit folgt $\pi \in S_{[\Delta]} - H_\nu$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Offensichtlich ist $S_{[\Delta]} = \bigcup\limits_{\nu \in \mu} H_\nu$. Da die Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ aufsteigend–geordnet ist, bildet sie eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ und somit ist die Proposition bewiesen. $\square$

Proposition 6.13 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine überabzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \geq \mathrm{cf}(|\Delta|)$.

Beweis: Sei $\lambda = |\Delta| \geq \aleph_1$. Angenommen für eine Kardinalzahl $\mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ existiert eine konfinale Kette $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ in $S_{[\Delta]}$.

1. Behauptung: Es existiert ein $\nu \in \mu$ mit $S_{\{\Delta\}} \leq H_\nu$.
Beweis: Angenommen für alle $\nu \in \mu$ gilt $S_{\{\Delta\}} \not\leq H_\nu$, d. h. $S_{\{\Delta\}} \cap H_\nu$ ist eine echte Untergruppe von $S_{\{\Delta\}}$.
Wegen $S_{\{\Delta\}} = S_{[\Delta]} \cap S_{\{\Delta\}} = \bigcup\limits_{\nu \in \mu} \big(H_\nu \cap S_{\{\Delta\}}\big)$ ist dann $\{H_\nu \cap S_{\{\Delta\}};\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ und es gilt folglich $\mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}}) \leq \mu < \mathrm{cf}(\lambda)$.
Doch da $|\kappa - \Delta| = \kappa$ ist, folgt aus Satz 5.3 und Satz 1.5 im Widerspruch dazu
$\mathrm{konf}\,\big(S_{\{\Delta\}}\big) = \min\Big\{\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big), \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big)\Big\} \geq |\Delta|^+ = \lambda^+ > \lambda \geq \mathrm{cf}(\lambda)$.
Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

2. Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ gilt $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \not\leq H_\nu$.
Beweis: Angenommen es existiert ein $\nu \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \leq H_\nu$. Dann folgt mit der ersten Behauptung, dass eine Ordinalzahl $\xi \in \mu$ existiert, so dass $S_{\{\Delta\}} \leq H_\xi$ und $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \leq H_\xi$ gilt. Nach Bemerkung 6.2 ergibt sich $S_{[\Delta]} = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \leq H_\xi$ im Widerspruch zur Annahme, dass dies eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$ ist.

Somit ist auch die 2. Behauptung bewiesen und daraus folgt, dass für alle $\nu \in \mu$ der Schnitt $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) \cap H_\nu$ eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$ ist.
Wegen $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = S_{[\Delta]} \cap \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa) = \bigcup\limits_{\nu \in \mu} \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big)$ ist also $\{H_\nu \cap \mathrm{Sym}_\lambda(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ eine konfinale Kette in $\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)$.
Es folgt $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}_\lambda(\kappa)\big) \leq \mu < \mathrm{cf}(\lambda)$ im Widerspruch zu Satz 3.8.

Also ist die Annahme zu Beginn des Beweises falsch und die Proposition somit bewiesen. □

Mit obigen Propositionen ist die Konfinalität des Faststabilisators von Δ auch in dem Fall bestimmt, dass die Mächtigkeit von Δ eine Limeskardinalzahl ist:

Satz 6.14 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Wenn $|\Delta| = \aleph_\lambda$ für eine Limesordinalzahl λ ist, dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{cf}(\lambda)$.

6.3 Der gleichgewichtige Faststabilisator

Wir definieren nun eine Untergruppe des Faststabilisators einer abzählbaren Menge Δ von κ, die wir den gleichgewichtigen Faststabilisator von Δ nennen. Er besteht aus den Permutationen von κ, die genauso viele Elemente von Δ nach $\kappa - \Delta$ wie umgekehrt von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbilden. Diese Gruppe ist unseres Wissens bisher nicht in der Literatur behandelt worden.
Mit Hilfe der Eigenschaften, die im Folgenden gezeigt werden, können wir dann im nächsten Abschnitt die Konfinalität des Faststabilisators einer abzählbaren Menge bestimmen.

Definition 6.15 Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.
Dann heißt

$$S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\}$$

der *gleichgewichtige Faststabilisator der Menge* Δ.

Insbesondere ist also $|\Delta \vartriangle \sigma(\Delta)|$ für jedes $\sigma \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ endlich.
Man beachte den Unterschied in den Notation von $S_{[\Delta]}$ und $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

Um zu zeigen, dass diese Menge tatsächlich eine Gruppe bildet, beweisen wir zunächst einen Hilfssatz:

Hilfssatz 6.16 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Seien $\sigma, \rho \in S_{[\Delta]}$ mit $|\Delta - \sigma(\Delta)| = |\Delta - \rho(\Delta)|$ und $|\sigma(\Delta) - \Delta| = |\rho(\Delta) - \Delta|$.
Dann existieren Permutationen $\tau_1, \tau_2 \in S_{\{\Delta\}}$ mit $\sigma = \tau_1\, \rho\, \tau_2$.
Insbesondere gilt $\sigma \in \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \rho\big\rangle$.

Beweis: Wir wählen eine Permutation $\rho_1 \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ mit $\rho_1\big(\Delta - \rho(\Delta)\big) = \Delta - \sigma(\Delta)$. Dies ist gemäß Hilfssatz 2.14 möglich, denn einerseits gilt $|\Delta - \rho(\Delta)| = |\Delta - \sigma(\Delta)|$ nach Voraussetzung. Andererseits sind $\sigma, \rho \in S_{[\Delta]}$ und damit $|\Delta - \rho(\Delta)| < |\Delta|$ und $|\Delta - \sigma(\Delta)| < |\Delta|$. Weil Δ unendlich ist, folgt $\big|\Delta - \big(\Delta - \rho(\Delta)\big)\big| = |\Delta| = \big|\Delta - \big(\Delta - \sigma(\Delta)\big)\big|$. Analog gilt $|\rho(\Delta) - \Delta| = |\sigma(\Delta) - \Delta|$ und $\big|(\kappa - \Delta) - \big(\rho(\Delta) - \Delta\big)\big| = |\kappa - \Delta| = \big|(\kappa - \Delta) - \big(\sigma(\Delta) - \Delta\big)\big|$ und somit existiert auch eine Permutation $\rho_2 \in \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ mit $\rho_2\big(\rho(\Delta) - \Delta\big) = \sigma(\Delta) - \Delta$.
Wir setzen nun $\tau_1 = \rho_2 \cdot \rho_1$.
Dann ist $\tau_1 \in \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \cdot \mathrm{Sym}(\Delta) = S_{\{\Delta\}}$ und wegen $\rho_1 \in S_{(\kappa-\Delta)}$ und $\rho_2 \in S_{(\Delta)}$ gilt $\Delta - \sigma(\Delta) = \rho_1\big(\Delta - \rho(\Delta)\big) = \rho_1(\Delta) - \rho_1\rho(\Delta) = \Delta - \rho_1\rho(\Delta) = \rho_2\big(\Delta - \rho_1\rho(\Delta)\big) = \rho_2(\Delta) - \rho_2\rho_1\rho(\Delta) = \Delta - \tau_1\rho(\Delta)$.
Außerdem gilt:
$\sigma(\Delta) - \Delta = \rho_2\big(\rho(\Delta) - \Delta\big) = \rho_2\Big(\rho_1\big(\rho(\Delta) - \Delta\big)\Big) = \rho_2\rho_1\rho(\Delta) - \rho_2\rho_1(\Delta) = \tau_1\rho(\Delta) - \Delta$.
Daraus folgt $\sigma(\Delta) = \big(\sigma(\Delta) - \Delta\big) \cup \big(\sigma(\Delta) \cap \Delta\big) = \big(\sigma(\Delta) - \Delta\big) \cup \Big(\Delta - \big(\Delta - \sigma(\Delta)\big)\Big)$
$= \big(\tau_1\rho(\Delta) - \Delta\big) \cup \Big(\Delta - \big(\Delta - \tau_1\rho(\Delta)\big)\Big) = \big(\tau_1\rho(\Delta) - \Delta\big) \cup \big(\tau_1\rho(\Delta) \cap \Delta\big) = \tau_1\rho(\Delta)$.

Somit ist $\rho^{-1}\tau_1^{-1}\sigma(\Delta) = \Delta$, d. h. $\rho^{-1}\tau_1^{-1}\sigma \in S_{\{\Delta\}}$.
Wenn man $\tau_2 = \rho^{-1}\tau_1^{-1}\sigma$ setzt, so folgt insgesamt $\sigma = \tau_1\,\rho\,\rho^{-1}\,\tau_1^{-1}\,\sigma = \tau_1\,\rho\,\tau_2$.
Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Proposition 6.17 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Seien $a \in \Delta$ und $b \in \kappa - \Delta$. Dann gilt:

$$\big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\ (a,b)\big\rangle.$$

Insbesondere ist $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$.

Beweis: „$\subseteq$“: Sei $\sigma \in S_{[\Delta]}$ mit $|\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta| = m \in \omega$.
Seien $\{a_0, \dots, a_{m-1}\} \subseteq \Delta$ und $\{b_0, \dots, b_{m-1}\} \subseteq \kappa - \Delta$ zwei m-elementige Mengen.
Setze $\varphi = \prod\limits_{i<m} (a_i, b_i)$. Es gilt $(a_i, b_i) = (a, a_i)\ (b, b_i)\ (a, b)\ (b, b_i)\ (a, a_i)$ für $i < m$.
Da (a, a_i) und (b, b_i) Elemente von $S_{\{\Delta\}}$ sind, folgt $\varphi \in \big\langle S_{\{\Delta\}},\ (a,b)\big\rangle$.
Dabei gilt außerdem $\Delta - \varphi(\Delta) = \{x \in \Delta;\ \varphi^{-1}(x) \in \kappa - \Delta\} = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ und $\varphi(\Delta) - \Delta = \{x \in \kappa - \Delta;\ \varphi^{-1}(x) \in \Delta\} = \{b_0, \dots, b_{m-1}\}$.

Also ist $|\Delta - \varphi(\Delta)| = |\varphi(\Delta) - \Delta| = m = |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|$ und damit folgt $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}},\, \varphi \rangle \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, (a,b) \rangle$ gemäß Hilfssatz 6.16.

„$\supseteq$“: Sei $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}},\, (a,b) \rangle$. Dann ist

$$\sigma = \rho_n\,(a,b)\,\rho_{n-1}\,\ldots\,(a,b)\,\rho_1\,(a,b)\,\rho_0$$

für ein $n \in \omega$ und geeignete $\rho_i \in S_{\{\Delta\}}$ (für $i \leq n$).

Wir zeigen $\sigma \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ durch Induktion nach n:
Für $n = 0$ ist die Behauptung offensichtlich, da $S_{\{\Delta\}} \leq S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ gilt.
Sei also die Behauptung für n bewiesen und sei

$$\sigma = \rho_{n+1}\,(a,b)\,\rho_n\,(a,b)\,\rho_{n-1}\,\ldots\,(a,b)\,\rho_1\,(a,b)\,\rho_0.$$

Setze $\rho = \rho_n\,(a,b)\,\rho_{n-1}\,\ldots\,(a,b)\,\rho_1\,(a,b)\,\rho_0$ und $\tau = (a,b)\,\rho$.
Nach der Induktionsvoraussetzung ist $\rho \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

Behauptung: $\tau \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.
Beweis: Sei $x = \rho^{-1}(a)$ und $y = \rho^{-1}(b)$. Dann gilt $\tau(x) = (a,b)\big(\rho(x)\big) = b$, $\tau(y) = (a,b)\big(\rho(y)\big) = a$ und $\tau(z) = (a,b)\big(\rho(z)\big) = \rho(z)$ für alle $z \in \kappa - \{x,y\}$. Daraus folgt:

$$\begin{array}{lclcll} \tau^{-1}(a) & = & y & = & \rho^{-1}(b) & , \\ \tau^{-1}(b) & = & x & = & \rho^{-1}(a) & \text{und} \\ \tau^{-1}(c) & = & \rho^{-1}(c) & & & \text{für alle } c \in \kappa - \{a,b\}. \end{array}$$

Denn wenn $c \in \kappa - \{a,b\}$ und $z = \rho^{-1}(c)$ ist, dann gilt $z \in \kappa - \{x,y\}$ und deshalb $\tau(z) = \rho(z) = c$.

<u>1. Fall:</u> $x \in \Delta$, $y \in \kappa - \Delta$.
Dann gilt $\Delta - \tau(\Delta) = \{c \in \Delta;\ \tau^{-1}(c) \in \kappa - \Delta\} = \{c \in \Delta;\ \rho^{-1}(c) \in \kappa - \Delta\} \,\dot\cup\, \{a\}$
$= \big(\Delta - \rho(\Delta)\big) \,\dot\cup\, \{a\}$ und
$\tau(\Delta) - \Delta = \{c \in \kappa - \Delta;\ \tau^{-1}(c) \in \Delta\} = \{c \in \kappa - \Delta;\ \rho^{-1}(c) \in \Delta\} \,\dot\cup\, \{b\}$
$= \big(\rho(\Delta) - \Delta\big) \,\dot\cup\, \{b\}$.
Damit folgt $|\Delta - \tau(\Delta)| = |\Delta - \rho(\Delta)| + 1 = |\rho(\Delta) - \Delta| + 1 = |\tau(\Delta) - \Delta|$.

<u>2. Fall:</u> $x \in \kappa - \Delta$, $y \in \kappa - \Delta$.
Dann gilt $\Delta - \tau(\Delta) = \{c \in \Delta;\ \tau^{-1}(c) \in \kappa - \Delta\} = \{c \in \Delta;\ \rho^{-1}(c) \in \kappa - \Delta\}$
$= \Delta - \rho(\Delta)$ und
$\tau(\Delta) - \Delta = \{c \in \kappa - \Delta;\ \tau^{-1}(c) \in \Delta\} = \{c \in \kappa - \Delta;\ \rho^{-1}(c) \in \Delta\} = \rho(\Delta) - \Delta$.

Wieder folgt $|\Delta - \tau(\Delta)| = |\tau(\Delta) - \Delta|$.

<u>3. Fall:</u> $x \in \Delta,\ y \in \Delta$.
Analog zum 2. Fall ist $\Delta - \tau(\Delta) = \Delta - \rho(\Delta)$ und $\tau(\Delta) - \Delta = \rho(\Delta) - \Delta$, d. h. $|\Delta - \tau(\Delta)| = |\tau(\Delta) - \Delta|$.

<u>4. Fall:</u> $x \in \kappa - \Delta,\ y \in \Delta$.
Dann gilt $\Delta - \tau(\Delta) = \{c \in \Delta;\ \tau^{-1}(c) \in \kappa - \Delta\} = \{c \in \Delta;\ \rho^{-1}(c) \in \kappa - \Delta\} - \{a\}$
$= \big(\Delta - \rho(\Delta)\big) - \{a\}$ und
$\tau(\Delta) - \Delta = \{c \in \kappa - \Delta;\ \tau^{-1}(c) \in \Delta\} = \{c \in \kappa - \Delta;\ \rho^{-1}(c) \in \Delta\} - \{b\}$
$= \big(\rho(\Delta) - \Delta\big) - \{b\}$.
Wieder folgt $|\Delta - \tau(\Delta)| = |\tau(\Delta) - \Delta|$.

Also gilt in allen vier Fällen $\tau \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da $\rho_{n+1} \in S_{\{\Delta\}}$ ist, folgt daraus $|\Delta - (\rho_{n+1}\,\tau)(\Delta)| = \big|\rho_{n+1}\big(\Delta - \tau(\Delta)\big)\big| = \big|\Delta - \tau(\Delta)\big|$
$= \big|\tau(\Delta) - \Delta\big| = \big|\rho_{n+1}\big(\tau(\Delta) - \Delta\big)\big| = \big|(\rho_{n+1}\,\tau)(\Delta) - \Delta\big|$, d. h. $\sigma = \rho_{n+1}\,\tau \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.
Damit ist $S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\ (a,b)\big\rangle$ bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der gleichgewichtige Faststabilisator eine echte Untergruppe des Faststabilisators ist.
Seien dazu zwei abzählbare Mengen $\{x_n;\ n \in \omega\} \subseteq \Delta$ und $\{y_n;\ n \in \omega\} \subseteq \kappa - \Delta$ gewählt. Wenn man dann $\pi = (\ldots, x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1,\ x_0,\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ \ldots)$ setzt, so bildet π genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und keines von $\kappa - \Delta$ nach Δ ab.
Also ist $\pi \in S_{[\Delta]} - S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. □

Wir haben den gleichgewichtigen Faststabilisator nur für abzählbare Mengen, deren Komplement die Mächtigkeit κ hat, definiert. Für andere Teilmengen von κ ist dieser Begriff nicht sinnvoll, denn dann ist die Menge $\big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\}$ nicht multiplikativ abgeschlossen oder bereits die ganze $\mathrm{Sym}(\kappa)$.

Proposition 6.18 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ.*

(i) *Wenn $|\Delta|$ abzählbar und $|\kappa - \Delta| < \kappa$ ist, dann gilt*
$\big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\} = S.$

(ii) *Wenn $|\Delta|$ überabzählbar und $\kappa - \Delta$ endlich ist, dann gilt*
$\big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\} = S.$

(iii) *Wenn* $|\Delta|$ *überabzählbar und* $\kappa - \Delta$ *unendlich ist, dann ist die Menge* $\big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\}$ *nicht multiplikativ abgeschlossen und es gilt* $\Big\langle \big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\} \Big\rangle = S_{[\Delta]}$.

Beweis: (i) Wenn $|\Delta|$ abzählbar und $|\kappa - \Delta| < \kappa$ ist, so muss $\kappa = \aleph_0$ gelten und somit $\kappa - \Delta$ endlich sein. Nach Proposition 6.1 folgt dann $S_{[\Delta]} = S$.

Sei nun $\sigma \in S$ und $\sigma = \prod\limits_{\nu \in \mu} z_\nu$ für eine Kardinalzahl μ mit $\mu \le \kappa$ die Zerlegung von σ in elementfremde Zyklen.
Da $\kappa - \Delta$ endlich ist, treten in diesen Zyklen nur an endlich vielen Stellen Elemente von $\kappa - \Delta$ auf. Man sieht leicht, dass ein Zyklus, bei dem an endlich vielen Stellen Elemente von $\kappa - \Delta$ und sonst (an endlich oder unendlich vielen Stellen) Elemente von Δ stehen, genauso viele Elemente von Δ nach $\kappa - \Delta$ wie Elemente von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet. Da die Zyklen elementfremd sind, bildet auch die Permutation σ gleich viele Elemente von Δ nach $\kappa - \Delta$ wie von $\kappa - \Delta$ nach Δ ab. Aus diesen berlegungen folgt
$|\Delta - \sigma(\Delta)| = \big|\sigma^{-1}\big(\Delta - \sigma(\Delta)\big)\big| = |\sigma^{-1}(\Delta) - \Delta| = |\{x \in \kappa - \Delta;\ \sigma(x) \in \Delta\}|$
$= |\{x \in \Delta;\ \sigma(x) \in \kappa - \Delta\}| = |\Delta - \sigma^{-1}(\Delta)| = \big|\sigma\big(\Delta - \sigma^{-1}(\Delta)\big)\big| = |\sigma(\Delta) - \Delta|$.
Da $S_{[\Delta]} = S$ ist, gilt also $S = \big\{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta|\big\}$.

(ii) folgt analog zu (i).

(iii) Sei $\sigma \in S_{[\Delta]}$ mit $\theta = |\Delta \mathbin{\triangle} \sigma(\Delta)| < |\Delta|$.
Behauptung: Es gilt $\theta \le |\kappa - \Delta|$.
Beweis: Sei o. B. d. A. θ unendlich, denn sonst gilt die Behauptung nach Voraussetzung.
Da $\Delta \mathbin{\triangle} \sigma(\Delta) = \big(\Delta - \sigma(\Delta)\big) \cup \big(\sigma(\Delta) - \Delta\big)$ ist, gilt $|\Delta - \sigma(\Delta)| = \theta$ oder $|\sigma(\Delta) - \Delta| = \theta$.
Im ersten Fall folgt $\theta = |\Delta - \sigma(\Delta)| \le |\kappa - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\kappa - \Delta)| = |\kappa - \Delta|$.
Im zweiten Fall folgt $\theta = |\sigma(\Delta) - \Delta| \le |\kappa - \Delta|$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es sei $\gamma = \max\{\aleph_0, \theta\} < |\Delta|$. Wir wählen zwei γ-mächtige Mengen $\{x_\nu;\ \nu \in \gamma\} \subseteq \Delta$ und $\{y_\nu;\ \nu \in \gamma\} \subseteq \kappa - \Delta$ und setzen $\pi = \prod\limits_{\nu \in \gamma} (x_\nu, y_\nu) = \bigcup\limits_{\nu \in \gamma} (x_\nu, y_\nu)$.
Dann gilt $\aleph_0 \le |\Delta - \pi(\Delta)| = |\pi(\Delta) - \Delta| = |\Delta \mathbin{\triangle} \pi(\Delta)| = \gamma < |\Delta|$. Insbesondere ist $\pi \in S_{[\Delta]}$. Da κ überabzählbar und $|\Delta \mathbin{\triangle} \sigma(\Delta)| = \theta \le \gamma$ ist, können wir Proposition 6.8 anwenden und es folgt $\sigma \in \big\langle S_{\{\Delta\}},\ \pi\big\rangle \le \Big\langle \big\{\rho \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \rho(\Delta)| = |\rho(\Delta) - \Delta|\big\} \Big\rangle$.
Da $\sigma \in S_{[\Delta]}$ beliebig war, haben wir $S_{[\Delta]} = \Big\langle \big\{\rho \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \rho(\Delta)| = |\rho(\Delta) - \Delta|\big\} \Big\rangle$ gezeigt.

Wie im Beweis von 6.17 sei π ein Zyklus unendlicher Länge, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet.
Dann ist $\pi \in S_{[\Delta]} - \big\{\rho \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \rho(\Delta)| = |\rho(\Delta) - \Delta|\big\}$.
Also ist die Menge $\big\{\rho \in S_{[\Delta]};\ |\Delta - \rho(\Delta)| = |\rho(\Delta) - \Delta|\big\}$ eine echte Teilmenge der von ihr erzeugten Gruppe. $\square$

Wenn Δ eine überabzählbare Teilmenge von κ ist, so ist der Faststabilisator von Δ das Produkt des Blockstabilisators von Δ mit der beschränkten symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}_{|\Delta|}(\kappa)$ (vgl. Bemerkung 6.2). Wenn Δ abzählbar ist, ergibt dieses Produkt dagegen den gleichgewichtigen Faststabilisator:

Proposition 6.19 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt $S_{\lfloor\Delta\rfloor} = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.
Insbesondere ist also $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) \leq S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

Beweis: Es seien $a \in \Delta$ und $b \in \kappa - \Delta$, dann gilt $S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\ (a,b)\big\rangle$ gemäß Proposition 6.17.

„$\leq$“: Es ist $\big\langle S_{\{\Delta\}},\ (a,b)\big\rangle \leq \big\langle S_{\{\Delta\}}, \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)\big\rangle = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.

„$\geq$“: Offensichtlich ist $S_{\{\Delta\}} \leq S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. Da jede Transposition aus S in $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ liegt und jedes Element der $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ ein Produkt von endlich vielen Transpositionen ist, gilt auch $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) \leq S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. $\square$

Als Nächstes beweisen wir, dass der gleichgewichtige Faststabilisator von Δ zusammen mit einem unendlichen Zyklus, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet, den Faststabilisator von Δ erzeugt. Zuvor zeigen wir einen Hilfssatz über solche Permutationen:

Hilfssatz 6.20 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Wenn $\pi \in S_{[\Delta]}$ ein Zyklus unendlicher Länge ist, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet, dann gilt für jedes $k \in \omega$: $|\pi^k(\Delta) - \Delta| = k$ und $\Delta - \pi^k(\Delta) = \varnothing$ sowie $\pi^{-k}(\Delta) - \Delta = \varnothing$ und $|\Delta - \pi^{-k}(\Delta)| = k$.

Beweis: π hat die Form $\pi = (\ldots, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots)$ für zwei abzählbare Mengen $\{x_n;\ n \in \omega\} \subseteq \Delta$ und $\{y_n;\ n \in \omega\} \subseteq \kappa - \Delta$.
Für ein $k \in \omega$ gilt dann

$$\begin{aligned}\pi^k \ = \ & (\ldots, x_{3k}, x_{2k}, x_k, x_0, y_{k-1}, y_{2k-1}, y_{3k-1}, y_{4k-1}, \ldots) \cdot \\ & (\ldots, x_{3k+1}, x_{2k+1}, x_{k+1}, x_1, y_{k-2}, y_{2k-2}, y_{3k-2}, y_{4k-2}, \ldots) \cdot \\ & (\ldots, x_{3k+2}, x_{2k+2}, x_{k+2}, x_2, y_{k-3}, y_{2k-3}, y_{3k-3}, y_{4k-3}, \ldots) \cdot \ \ldots \ \cdot \\ & (\ldots, x_{4k-1}, x_{3k-1}, x_{2k-1}, x_{k-1}, y_0, y_k, y_{2k}, y_{3k}, \ldots).\end{aligned}$$

Folglich ist π^k das Produkt von k elementfremden Zyklen, von denen jeder Zyklus genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und keines von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet, d. h. $|\pi^k(\Delta) - \Delta| = k$ und $\Delta - \pi^k(\Delta) = \varnothing$.
Die Aussage für π^{-k} folgt analog. $\square$

Satz 6.21 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Sei $\pi \in S_{[\Delta]}$ ein Zyklus unendlicher Länge, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet.
Dann gilt $S_{[\Delta]} = \langle S_{\lfloor\Delta\rfloor}, \pi \rangle = \langle S_{\{\Delta\}}, \pi \rangle$.

Beweis: Wir wählen vier paarweise disjunkte abzählbare Mengen $A = \{a_n;\ n \in \omega\}$, $B = \{b_n;\ n \in \omega\}$, $C = \{c_n;\ n \in \omega\}$ und $D = \{d_n;\ n \in \omega\}$, wobei $A,\ C \subseteq \Delta$ und $B,\ D \subseteq \kappa - \Delta$ gelten soll.
Sei

$$\pi_1 = (\ldots, c_5, c_4, c_3, c_2, c_1, c_0, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \ldots).$$

Behauptung: Für alle $m \in \omega$ gilt $\prod\limits_{i<m} (a_i, b_i) \in \langle S_{\{\Delta\}}, \pi_1 \rangle$.
Beweis: Zunächst gilt offensichtlich $(a_0, b_0) = (a_0, c_0)\,(b_0, d_0)\,(c_0, d_0)\,(b_0, d_0)\,(a_0, c_0) = (a_0, c_0)(b_0, d_0)\pi_1(c_1, c_0)\pi_1^{-1}(b_0, d_0)(a_0, c_0) \in \langle S_{\{\Delta\}}, \pi_1 \rangle$, da $A, C \subseteq \Delta$ und $B, D \subseteq \kappa - \Delta$ sind. Daraus folgt $\prod\limits_{i<m} (a_i, b_i) = \prod\limits_{i<m} (a_0, a_i)\,(b_0, b_i)\,(a_0, b_0)\,(b_0, b_i)\,(a_0, a_i) \in \langle S_{\{\Delta\}}, \pi_1 \rangle$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Sei nun $\sigma \in S_{[\Delta]}$. Wir zeigen, dass dann $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}}, \pi_1 \rangle$ gilt.
Da die Menge $\Delta \,\triangle\, \sigma(\Delta)$ endlich ist, existieren $l, m \in \omega$ mit $|\Delta - \sigma(\Delta)| = l$ und $|\sigma(\Delta) - \Delta| = m$.

1. Fall: $l = m$.
Falls dabei $l = m = 0$ ist, so gilt $\sigma \in S_{\{\Delta\}} \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \rangle$.
Falls $l = m > 0$ ist, setzen wir $\rho = \prod\limits_{i<m} (a_i, b_i)$.
Dann gilt $\Delta - \rho(\Delta) = \{a_i;\ i < m\}$ und $\rho(\Delta) - \Delta = \{b_i;\ i < m\}$.
Also ist $|\Delta - \rho(\Delta)| = |\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta| = |\rho(\Delta) - \Delta|$ und aus Hilfssatz 6.16 zusammen mit obiger Behauptung folgt $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}},\, \rho \rangle \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \rangle$.

2. Fall: $l < m$.
Wir setzen $k = m - l$. Falls $l = 0$ ist, so sei $\rho = 1$, sonst sei $\rho = \prod\limits_{i<l}(a_i, b_i)$.
Wie im 1. Fall folgt $|\Delta - \rho(\Delta)| = |\rho(\Delta) - \Delta| = l$ und außerdem gilt nach Hilfssatz 6.20 $\Delta - \pi_1^k(\Delta) = \varnothing$ und $|\pi_1^k(\Delta) - \Delta| = k$.
Da $\mathrm{supp}(\rho) \cap \mathrm{supp}(\pi_1^k) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup D) = \varnothing$ ist, folgt damit:
$|\Delta - (\pi_1^k\, \rho)(\Delta)| = |\Delta - \pi_1^k(\Delta)| + |\Delta - \rho(\Delta)| = l = |\Delta - \sigma(\Delta)|$ und
$|(\pi_1^k\, \rho)(\Delta) - \Delta| = |\pi_1^k(\Delta) - \Delta| + |\rho(\Delta) - \Delta| = k + l = m = |\sigma(\Delta) - \Delta|$.
Also gilt mit Hilfssatz 6.16 und obiger Behauptung $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1^k\, \rho \rangle \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \rangle$.

3. Fall: $l > m$.
Wir setzen wieder $k = m - l$. Falls $m = 0$ ist, sei $\rho = 1$, sonst sei $\rho = \prod\limits_{i<m} (a_i, b_i)$.
Dann folgt $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1^k\, \rho \rangle \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \rangle$ analog zu Fall 2.

Insgesamt haben wir $S_{[\Delta]} \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \rangle$ gezeigt.

Weil $\pi, \pi_1 \in S_{[\Delta]}$ und $\Delta - \pi(\Delta) = \varnothing = \Delta - \pi_1(\Delta)$ sowie $|\pi(\Delta) - \Delta| = 1 = |\pi_1(\Delta) - \Delta|$ gilt, existieren nach Hilfssatz 6.16 Permutationen $\tau_1, \tau_2 \in S_{\{\Delta\}}$ mit $\pi_1 = \tau_1\, \pi\, \tau_2$. Damit folgt $S_{[\Delta]} \leq \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \rangle = \langle S_{\{\Delta\}},\, \pi \rangle \leq \langle S_{\lfloor\Delta\rfloor},\, \pi \rangle \leq S_{[\Delta]}$ und die Proposition ist bewiesen. $\square$

Der gleichgewichtige Faststabilisator einer abzählbaren Menge ist sogar ein Normalteiler des Faststabilisators, wobei die Faktorgruppe unendlich–zyklisch ist:

Proposition 6.22 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt:

(i) $S_{\lfloor\Delta\rfloor} \trianglelefteq S_{[\Delta]}$.

(ii) *Wenn $\pi \in S_{[\Delta]}$ ein Zyklus unendlicher Länge ist, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet, so ist*

$$S_{[\Delta]}/S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \{\pi^k S_{\lfloor\Delta\rfloor};\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dabei gilt für $k \in \mathbb{Z}$: $\pi^k S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\sigma(\Delta) - \Delta| - |\Delta - \sigma(\Delta)| = k\}$.

Insbesondere ist $S_{[\Delta]}/S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ eine unendliche zyklische Gruppe.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 6.21 wählen wir paarweise disjunkte abzählbare Mengen $A = \{a_n;\ n \in \omega\}$, $B = \{b_n;\ n \in \omega\}$, $C = \{c_n;\ n \in \omega\}$ und $D = \{d_n;\ n \in \omega\}$, wobei $A,\ C \subseteq \Delta$ und $B,\ D \subseteq \kappa - \Delta$ gilt, und setzen

$$\pi_1 = (\dots,\ c_5,\ c_4,\ c_3,\ c_2,\ c_1,\ c_0,\ d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ \dots) \in S_{[\Delta]}.$$

Dann folgt wie dort, dass $\tau_1, \tau_2 \in S_{\{\Delta\}}$ mit $\pi_1 = \tau_1\, \pi\, \tau_2$ exisitieren $(\star)$.
Damit gilt dann auch $S_{[\Delta]} = \langle S_{\{\Delta\}},\ \pi\rangle = \langle S_{\{\Delta\}},\ \pi_1\rangle$.
Dagegen ist $S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \langle S_{\{\Delta\}},\ (a_0, b_0)\rangle$ gemäß Proposition 6.17.
(i) *1. Behauptung:* Sei $\tau \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.
Beweis: O. B. d. A. sei $k \neq 0$, da sonst die Behauptung offensichtlich ist.
Wir betrachten die Zerlegung von τ in elementfremde Zyklen. Dann entsteht $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k$ dadurch, dass man in jedem Zyklus von τ die Einträge durch ihr Bild unter π_1^{-k} ersetzt.

1. Fall: $k > 0$.

   Da $\tau \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ ist, sind alle Einträge Elemente von Δ. Folglich sind auch deren Bilder unter π_1^{-k} Elemente von Δ. Also gilt $\mathrm{supp}(\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k) \subseteq \Delta$ und damit $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k \in \mathrm{Sym}(\Delta) \leq S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

2. Fall: $k < 0$.

   Dann bildet π_1^{-k} nur endliche viele Elemente von Δ nach $\kappa - \Delta$ ab. Also treten in den Zyklen von $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k$ an endlich vielen Stellen Elemente von $\kappa - \Delta$ und sonst Elemente von Δ auf. Man sieht leicht, dass die Permutation $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k$ dann genauso viele Elemente von Δ nach $\kappa - \Delta$ wie von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet, d. h. $|\Delta - (\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k)(\Delta)| = |(\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k)(\Delta) - \Delta|$. Da $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k \in S_{[\Delta]}$ ist, gilt damit $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

Analog zur 1. Behauptung zeigt man:
2. Behauptung: Sei $\tau \in \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\pi_1^{-k}\, \tau\, \pi_1^k \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

3. Behauptung: Sei $\rho \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\pi_1^{-k}\, \rho\, \pi_1^k \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.
Beweis: Da $\rho \in S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \langle S_{\{\Delta\}},\ (a_0, b_0)\rangle$ ist, hat ρ die Form

$$\rho = \rho_n\, (a_0, b_0)\, \rho_{n-1}\, \dots\, (a_0, b_0)\, \rho_1\, (a_0, b_0)\, \rho_0$$

für ein $n \in \omega$ und $\rho_i \in S_{\{\Delta\}}$ für $i \leq n$.
$\pi_1^{-k}\, (a_0, b_0)\, \pi_1^k$ ist wieder eine Transposition, also ist $\pi_1^{-k}\, (a_0, b_0)\, \pi_1^k \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ nach Proposition 6.19. Für jedes $i \leq n$ ist $\rho_i = \rho_i \restriction \Delta \cdot \rho_i \restriction (\kappa - \Delta)$, wobei $\rho_i \restriction \Delta \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ und

$\rho_i \upharpoonright (\kappa - \Delta) \in \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ gilt. Also folgt aus den ersten beiden Behauptungen, dass $\pi_1^{-k}\, \rho_i\, \pi_1^k = \pi_1^{-k}\, \rho_i \upharpoonright \Delta\, \pi_1^k\, \pi_1^{-k}\, \rho_i \upharpoonright (\kappa - \Delta)\, \pi_1^k \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ gilt.
Insgesamt folgt $\pi_1^{-k}\, \rho\, \pi_1^k \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$.

4. Behauptung: Sei $\rho \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ und $\sigma \in S_{[\Delta]}$. Dann ist $\sigma^{-1}\, \rho\, \sigma \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$.
Beweis: Da $\sigma \in S_{[\Delta]} = \left\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi_1 \right\rangle$ ist, hat σ die Form

$$\sigma = \sigma_m\, \pi_1^{l_m}\, \sigma_{m-1}\, \ldots\, \pi_1^{l_2}\, \sigma_1\, \pi_1^{l_1}\, \sigma_0$$

für ein $m \in \omega$, $l_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq m$ und $\sigma_j \in S_{\{\Delta\}}$ für $j \leq m$.
Offensichtlich ist $\sigma_m^{-1}\, \rho\, \sigma_m \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ und daraus folgt $\pi_1^{-l_m}\, \sigma_m^{-1}\, \rho\, \sigma_m\, \pi_1^{l_m} \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ nach Behauptung 3. Somit ist $\sigma_{m-1}^{-1}\, \pi_1^{-l_m}\, \sigma_m^{-1}\, \rho\, \sigma_m\, \pi_1^{l_m}\, \sigma_{m-1} \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ und so weiter.
Schließlich erhält man $\sigma^{-1}\, \rho\, \sigma \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$.

Für ein $\sigma \in S_{[\Delta]}$ ist also $\sigma^{-1}\, S_{\lfloor \Delta \rfloor}\, \sigma = S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ und damit ist Teil (i) bewiesen.

(ii) Aus Teil (i) folgt unmittelbar, dass $S_{[\Delta]}/S_{\lfloor \Delta \rfloor} = \{\pi^k S_{\lfloor \Delta \rfloor};\ k \in \mathbb{Z}\}$ gilt.
Insbesondere ist $S_{[\Delta]}/S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ eine unendliche zyklische Gruppe.

5. Behauptung: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $\pi^k S_{\lfloor \Delta \rfloor} = \{\sigma \in S_{[\Delta]};\ |\sigma(\Delta) - \Delta| - |\Delta - \sigma(\Delta)| = k\}$.
Beweis: „$\supseteq$": Sei $\sigma \in S_{[\Delta]}$ mit $|\sigma(\Delta) - \Delta| - |\Delta - \sigma(\Delta)| = k$. Analog zum Beweis von Satz 6.21 folgt mit Hilfe von Hilfssatz 6.16, dass $\rho \in \left\langle S_{\{\Delta\}},\ (a_0, b_0) \right\rangle = S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ sowie $\rho_1, \rho_2 \in S_{\{\Delta\}}$ mit $\sigma = \rho_1\, \pi_1^k\, \rho\, \rho_2$ existieren. Mit der Aussage $(\star)$ vom Beginn dieses Beweises gilt dann $\sigma = \rho_1\, (\tau_1\, \pi\, \tau_2)^k\, \rho\, \rho_2$. Da auch $\rho_1, \rho_2, \tau_1, \tau_2 \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ und $S_{\lfloor \Delta \rfloor} \trianglelefteq S_{[\Delta]}$ ist, folgt $\sigma \in \pi^k S_{\lfloor \Delta \rfloor}$.

„$\subseteq$": Sei $\pi^k \rho \in \pi^k S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ für ein $\rho \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ und $|\pi^k \rho(\Delta) - \Delta| - |\Delta - \pi^k \rho(\Delta)| = l \in \mathbb{Z}$. Wie wir soeben gezeigt haben, ist dann $\pi^k \rho \in \pi^l S_{\lfloor \Delta \rfloor}$, d. h. $\pi^{k-l} \in S_{\lfloor \Delta \rfloor}$. Nach Hilfssatz 6.20 gilt also $k = l$.

Damit ist die Proposition bewiesen. $\square$

6.4 Fall 3: Die Menge Δ ist abzählbar

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass für eine abzählbare Teilmenge von κ die Konfinalität des Faststabilisators gleich der des blockweisen Stabilisators ist. Im Anschluss daran werden wir die Konfinalität der gleichgewichtigen Faststabilisators bestimmen.

Aus Satz 6.21 folgt bereits:

Korollar 6.23 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \geq \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.

Beweis: Nach Satz 6.21 existiert eine Permutation $\pi \in S_{[\Delta]}$ mit $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi \big\rangle$. Damit folgt die Behauptung aus Proposition 1.9. □

Der Hauptteil des Beweises, dass die beiden Konfinalitäten gleich sind, besteht aus der Konstruktion einer konfinalen Kette im Faststabilisator der Länge $\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\omega)\big)$.
Zur Vorbereitung dienen die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 6.24 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Sei $\pi \in S_{[\Delta]}$ ein Zyklus unendlicher Länge, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet und $D = \mathrm{supp}(\pi) \cap (\kappa - \Delta)$.
Dann gilt $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta \cup D) \leq \big\langle \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta),\, \pi \big\rangle$.

Beweis: π hat die Form $\pi = (\ldots\,,\, c_5,\, c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1,\, c_0,\, d_0,\, d_1,\, d_2,\, d_3,\, d_4,\, d_5,\, \ldots)$, wobei $\{c_n;\ n \in \omega\} \subseteq \Delta$ und $D = \{d_n;\ n \in \omega\} \subseteq \kappa - \Delta$ gilt.
Jedes Element der $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta \cup D)$ ist das Produkt von endlich vielen Transpositionen aus der $\mathrm{Sym}(\Delta \cup D)$. Es genügt also zu zeigen, dass $(x, y) \in \big\langle \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta),\, \pi \big\rangle$ für alle $x, y \in \Delta \cup D$ gilt. Wenn $x, y \in \Delta$ gilt, so ist dies klar.
Also sei o. B. d. A. $y \in D$. Dann existiert ein $i \in \omega$ mit $y = d_i$.
<u>1. Fall:</u> $x \in \Delta$.
Es gilt $(x, y) = (x, d_i) = (c_0, x)(c_0, d_i)(c_0, x) = (c_0, x)\, \pi^{i+1}\, (c_{i+1}, c_0)\, \pi^{-(i+1)}\, (c_0, x) \in \big\langle \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta),\, \pi \big\rangle$.
<u>2. Fall:</u> $x \in D$.
Wegen $c_0 \in \Delta$ sind nach Fall 2 (c_0, x) und (c_0, y) Elemente von $\big\langle \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta),\, \pi \big\rangle$ und somit gilt dies auch für $(x, y) = (c_0, x)(c_0, y)(c_0, x)$. □

Hilfssatz 6.25 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei. Sei $\Sigma \subseteq \kappa - \Delta$ eine abzählbare Menge und*

$$G = \mathrm{Sym}(\Delta \cup \Sigma)_{[\Delta]} = \{\sigma \in \mathrm{Sym}(\Delta \cup \Sigma);\ \Delta \mathbin{\triangle} \sigma(\Delta) \text{ ist endlich}\}$$

der Faststabilisator von Δ in der $\mathrm{Sym}(\Delta \cup \Sigma)$ *sowie* $\mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\omega)\big)$.

Dann ist $\operatorname{konf}(G) = \mu$ *und es existiert eine konfinale Kette* $\{H_\nu;\ \nu \in \mu\}$ *in* G*, so dass gilt:*

(i) *Für alle* $\nu \in \mu$ *ist* $\operatorname{Sym}(\Delta) \nleq H_\nu$*,*

(ii) $\operatorname{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq H_0$.

Beweis: $\Delta \cup \Sigma$ ist abzählbar und Δ ist eine mittelmäßige Teilmenge von $\Delta \cup \Sigma$. Also ist $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma)_{\{\Delta\}}\big) = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma)\big)$ gemäß Satz 5.3. Nach den Korollaren 6.23 und 6.3 gilt $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta\cup\Sigma)_{\{\Delta\}}\big) \leq \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta\cup\Sigma)_{[\Delta]}\big) \leq \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta\cup\Sigma)\big)$. Insgesamt folgt also

$$\operatorname{konf}(G) = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma)_{[\Delta]}\big) = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma)\big) = \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\omega)\big) = \mu.$$

Wir wählen nun eine beliebige konfinale Kette $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ in G und definieren $\pi = (\ldots,\, c_5,\, c_4,\, c_3,\, c_2,\, c_1,\, c_0,\, d_0,\, d_1,\, d_2,\, d_3,\, d_4,\, d_5,\, \ldots)$, wobei $\{c_n;\ n \in \omega\}$ eine mittelmäßige Teilmenge von Δ und $\{d_n;\ n \in \omega\}$ eine mittelmäßige Teilmenge von Σ ist. Aus Satz 6.21 folgt $G = \big\langle \operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma)_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle = \big\langle \operatorname{Sym}(\Delta),\, \operatorname{Sym}(\Sigma),\, \pi\big\rangle$.

<u>1. Fall:</u> Für alle $\nu \in \mu$ gilt $\operatorname{Sym}(\Delta) \nleq U_\nu$.
Dann setzen wir $H_\nu = U_\nu$ für alle $\nu \in \mu$.

<u>2. Fall:</u> Es existiert ein $\nu_0 \in \mu$ mit $\operatorname{Sym}(\Delta) \leq U_{\nu_0}$.
Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist dann $\operatorname{Sym}(\Sigma) \nleq U_\nu$.
Beweis: Angenommen die Behauptung ist falsch, dann gibt es eine Ordinalzahl $\nu_1 \in \mu$ mit $\operatorname{Sym}(\Sigma) \leq U_{\nu_1}$. Also gilt $\operatorname{Sym}(\Delta) \cdot \operatorname{Sym}(\Sigma) \leq U_{\max\{\nu_0,\nu_1\}}$. Da $\pi \in G = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} U_\nu$ ist, existiert ein $\nu_2 \in \mu$ mit $\pi \in U_{\nu_2}$ und es folgt $G = \big\langle \operatorname{Sym}(\Delta)\cdot\operatorname{Sym}(\Sigma),\, \pi\big\rangle \leq U_{\max\{\nu_0,\nu_1,\nu_2\}}$ im Widerspruch dazu, dass dies eine echte Untergruppe von G ist.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir setzen $\{a_n;\ n \in \omega\} = \Delta - \{c_n;\ n \in \omega\}$ und $\{b_n;\ n \in \omega\} = \Sigma - \{d_n;\ n \in \omega\}$ und definieren eine Permutation $\varphi \in \operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma)$ durch $\varphi = \prod\limits_{n\in\omega} (a_n, b_n)(c_n, d_n)$ und einen inneren Automorphismus durch $i_\varphi :\ \operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma) \longrightarrow \operatorname{Sym}(\Delta \cup \Sigma),\ \sigma \mapsto \varphi^{-1}\,\sigma\,\varphi$.
Dann gilt $i_\varphi\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big) = \varphi^{-1}\operatorname{Sym}(\Delta)\,\varphi = \operatorname{Sym}\big(\varphi^{-1}(\Delta)\big) = \operatorname{Sym}(\Sigma)$ und ebenso ist $i_\varphi\big(\operatorname{Sym}(\Sigma)\big) = \operatorname{Sym}(\Delta)$.
Außerdem gilt $i_\varphi(\pi) = \pi^{-1}$ und somit $i_\varphi(G) = i_\varphi\big(\big\langle\operatorname{Sym}(\Delta),\, \operatorname{Sym}(\Sigma),\, \pi\big\rangle\big) = G$.
Da i_φ ein Automorphismus ist, folgt schließlich, dass $\big\{i_\varphi(U_\nu);\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in G bildet.

Gemäß obiger Behauptung gilt für alle $\nu \in \mu$ dabei $\mathrm{Sym}(\Delta) = i_\varphi\big(\mathrm{Sym}(\Sigma)\big) \not\leq i_\varphi(U_\nu)$. Wir setzten $H_\nu = i_\varphi(U_\nu)$ für alle $\nu \in \mu$ und beenden den zweiten Fall.

Da $\mu = \mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\omega)\big)$ gilt, ist μ eine reguläre und überabzählbare Kardinalzahl (vgl. Proposition 1.4 und Satz 1.5). Also ist $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta)$ eine Untergruppe von G mit $|\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta)| = |\Delta| = \aleph_0 < \mu = \mathrm{cf}(\mu)$ (vgl. Felgner [13, Satz 2.1]).
Damit folgt aus Proposition 2.6, dass ein $\xi \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq H_\xi$ existiert.
Also ist $\big\{H_\nu;\ \xi \leq \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in G mit den Eigenschaften (i) und (ii) und der Hilfssatz ist bewiesen. $\square$

Hilfssatz 6.26 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Sei $\pi \in S_{[\Delta]}$ ein Zyklus unendlicher Länge, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet, sowie $\mu = \mathrm{konf}\big(\mathrm{Sym}(\omega)\big)$.
Dann existiert eine konfinale Kette $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ in der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq U_0$ und der Eigenschaft, dass $\big\{\big\langle U_\nu,\ \pi\big\rangle;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\big\langle \mathrm{Sym}(\Delta),\ \pi\big\rangle$ ist.

Beweis: Sei wieder $\pi = (\dots, c_5, c_4, c_3, c_2, c_1, c_0, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \dots)$ für zwei Mengen $\{c_n;\ n \in \omega\} \subseteq \Delta$ und $D = \{d_n;\ n \in \omega\} \subseteq \kappa - \Delta$.
Dann ist D eine abzählbare Teilmenge von $\kappa - \Delta$ und wir setzen $G = \mathrm{Sym}(\Delta \cup D)_{[\Delta]}$.
Gemäß Hilfssatz 6.25 existiert folglich eine konfinale Kette $\big\{H_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ in G mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq H_0$ und $\mathrm{Sym}(\Delta) \not\leq H_\nu$ für alle $\nu \in \mu$. $(\star)$
Es ist $\mathrm{Sym}(\Delta) = \mathrm{Sym}(\Delta) \cap G = \mathrm{Sym}(\Delta) \cap \bigcup\limits_{\nu\in\mu} H_\nu = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \big(H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta)\big)$.
Für alle $\nu \in \mu$ setzen wir $U_\nu = H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta)$. Dann ist U_ν eine echte Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\Delta)$. Denn angenommen für ein $\nu \in \mu$ ist $U_\nu = \mathrm{Sym}(\Delta)$, dann gilt $\mathrm{Sym}(\Delta) \leq H_\nu$ im Widerspruch zu $(\star)$.
Somit folgt, dass $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq H_0 \cap \mathrm{Sym}(\Delta) = U_0$ bildet.

Außerdem gilt $\big\langle \mathrm{Sym}(\Delta),\ \pi\big\rangle = \big\langle \bigcup\limits_{\nu\in\mu} U_\nu,\ \pi\big\rangle = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} \big\langle U_\nu,\ \pi\big\rangle$, da die $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette bilden.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $\big\langle U_\nu,\ \pi\big\rangle$ für jedes $\nu \in \mu$ eine echte Untergruppe von $\big\langle \mathrm{Sym}(\Delta),\ \pi\big\rangle$ ist. Dazu nehmen wir an, dass ein $\nu \in \mu$ mit $\big\langle U_\nu,\ \pi\big\rangle = \big\langle \mathrm{Sym}(\Delta),\ \pi\big\rangle$ existiert. Da $\pi \in G = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} H_\nu$ ist, gibt es dann ein $\xi \in \mu$ mit $\pi \in H_\xi$. Es folgt $\mathrm{Sym}(\Delta) \leq \big\langle \mathrm{Sym}(\Delta),\ \pi\big\rangle = \big\langle U_\nu,\ \pi\big\rangle = \big\langle H_\nu \cap \mathrm{Sym}(\Delta),\ \pi\big\rangle \leq \big\langle H_\nu,\ \pi\big\rangle \leq H_{\max\{\nu,\xi\}}$ im

Widerspruch zu ($\star$). Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Satz 6.27 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.

Beweis: Gemäß Korollar 6.23 gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \geq \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.
Weil $|\kappa - \Delta| = \kappa$ ist, folgt $\mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}}) = \min\big\{\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big), \mathrm{konf}\,(S)\big\}$ aus Satz 5.3.
In Korollar 6.3 wurde bereits $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \leq \mathrm{konf}\,(S)$ gezeigt.
Also bleibt zu zeigen:

$$\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) \leq \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big).$$

Wir setzen $\mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big) = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\omega)\big)$.
Seien $C = \{c_n;\ n \in \omega\} \subseteq \Delta$ und $D = \{d_n;\ n \in \omega\} \subseteq \kappa - \Delta$ zwei abzählbare Mengen und $\pi = (\ldots, c_5, c_4, c_3, c_2, c_1, c_0, d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \ldots) \in S_{[\Delta]}$.
Dann existiert nach Hilfssatz 6.26 eine konfinale Kette $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ in der $\mathrm{Sym}(\Delta)$ mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq U_0$, wobei $\big\{\big\langle U_\nu, \pi\big\rangle;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $\big\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi\big\rangle$ bildet. (†)
Mit Satz 6.21 folgt

$$\begin{aligned} S_{[\Delta]} &= \big\langle S_{\{\Delta\}}, \pi\big\rangle = \big\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta), \pi\big\rangle \\ &= \Big\langle \bigcup_{\nu\in\mu} \langle U_\nu, \pi\rangle, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\Big\rangle = \bigcup_{\nu\in\mu} \big\langle U_\nu, \pi, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big\rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist $\big\{\big\langle U_\nu, \pi, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)\big\rangle;\ \nu \in \mu\big\}$ eine aufsteigend–geordnete Kette von Untergruppen von $S_{[\Delta]}$. Es bleibt zu zeigen, dass dies echte Untergruppen sind.

Für den Rest des Beweises sei dazu $\nu \in \mu$ fest gewählt.

1. Behauptung: Es existiert eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(\Delta) - \big\langle U_\nu, \pi\big\rangle \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.
Beweis: Angenommen eine solche Permutation existiert nicht. Dann ist $\mathrm{Sym}(\Delta)$ und damit auch $\big\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi\big\rangle$ eine Untergruppe von $\big\langle U_\nu, \pi\big\rangle \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.
Sei nun $\sigma \in \big\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi\big\rangle$. Dann existieren $\rho \in \big\langle U_\nu, \pi\big\rangle$ und $\tau \in \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ mit $\sigma = \rho\cdot\tau$.
Da $U_\nu \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ ist, gilt $\tau = \rho^{-1} \cdot \sigma \in \big\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi\big\rangle \leq \mathrm{Sym}(\Delta \cup D)$. Mit Hilfssatz 6.24 folgt $\tau \in \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta \cup D) \leq \big\langle \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta), \pi\big\rangle$.
Doch nach (†) ist $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta) \leq U_0$ und somit $\tau \in \big\langle U_0, \pi\big\rangle \leq \big\langle U_\nu, \pi\big\rangle$.

Also ist $\sigma = \rho \cdot \tau \in \langle U_\nu, \pi \rangle$. Da σ jedoch ein beliebiges Element von $\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi \rangle$ war, gilt dann $\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi \rangle \leq \langle U_\nu, \pi \rangle$ im Widerspruch dazu, dass dies echte Untergruppen von $\langle \mathrm{Sym}(\Delta), \pi \rangle$ sind.
Damit haben wir die 1. Behauptung bewiesen und wählen nun eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}(\Delta) - \langle U_\nu, \pi \rangle \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ (‡).

Im Folgenden wird gezeigt, dass σ kein Element von $\langle U_\nu, \pi, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \rangle$ sein kann. Da σ ein Element von $S_{[\Delta]}$ ist, haben wir dann den Satz bewiesen.

Wir nehmen an, dass $\sigma \in \langle U_\nu, \pi, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \rangle$ gilt.
Dann kann man σ wie folgt darstellen

$$\sigma = \rho_{k+1} \cdot \pi^{n_{k+1}} \cdot \rho_k \cdot \pi^{n_k} \cdot \ldots \cdot \rho_2 \cdot \pi^{n_2} \cdot \rho_1 \cdot \pi^{n_1} \cdot \rho_0$$

für ein $k \in \omega$, $n_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq k+1$ und $\rho_j \in U_\nu \cup \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ für $j \leq k+1$. (Dabei kann $\rho_j = 1$ oder $n_i = 0$ sein.)

2. Behauptung: Es existiert ein $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ mit $n_i \neq 0$.
Beweis: Angenommen dies gilt nicht, dann ist $\sigma \in \langle U_\nu, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \rangle \cap \mathrm{Sym}(\Delta)$.
Da $U_\nu \leq \mathrm{Sym}(\Delta)$ gilt, haben die Elemente von U_ν und die von $\mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ disjunkte Träger und kommutieren somit. Also ist $\langle U_\nu, \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \rangle = U_\nu \cdot \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ und es existieren $\tau_1 \in U_\nu$ und $\tau_2 \in \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta)$ mit $\sigma = \tau_1 \cdot \tau_2$. Da σ und τ_1 Elemente von $\mathrm{Sym}(\Delta)$ sind, folgt $\tau_2 \in \mathrm{Sym}(\Delta) \cap \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) = \{1\}$. Damit gilt aber $\sigma = \tau_1 \in U_\nu$ im Widerspruch zur Wahl von σ und auch die 2. Behauptung ist bewiesen.

Man kann σ folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned}
\sigma &= \rho_{k+1} \cdot \pi^{n_{k+1}+n_k+n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0} \cdot \pi^{-(n_k+n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0)} \cdot \rho_k \\
&\quad \cdot \pi^{n_k+n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0} \cdot \pi^{-(n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0)} \cdot \ldots \cdot \pi^{n_3+n_2+n_1} \cdot \pi^{-(n_2+n_1)} \\
&\quad \cdot \rho_2 \cdot \pi^{n_2+n_1} \cdot \pi^{-n_1} \cdot \rho_1 \cdot \pi^{n_1} \cdot \rho_0 \\
&= \rho_{k+1} \cdot \pi^{l_{k+1}} \cdot \left(\pi^{-l_k} \cdot \rho_k \cdot \pi^{l_k}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\pi^{-l_2} \cdot \rho_2 \cdot \pi^{l_2}\right) \\
&\quad \cdot \left(\pi^{-l_1} \cdot \rho_1 \cdot \pi^{l_1}\right) \cdot \rho_0,
\end{aligned}$$

wobei $l_i = \sum_{j=1}^{i} n_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq k+1$ gesetzt wird.

3. Behauptung: Es gilt $l_{k+1} = 0$.
Beweis: Sei $\tau = \pi^{-l_k}\, \rho_k\, \pi^{l_k}\, \ldots\, \pi^{-l_2}\, \rho_2\, \pi^{l_2}\, \pi^{-l_1}\, \rho_1\, \pi^{l_1}$.
Dabei ist $\rho_i \in U_\nu \cup \mathrm{Sym}(\kappa - \Delta) \subseteq S_{\lfloor \Delta \rfloor}$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $\pi \in S_{[\Delta]}$.

Da $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ nach Proposition 6.22 ein Normalteiler von $S_{[\Delta]}$ ist, gilt $\pi^{-l_i}\rho_i\pi^{l_i} \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ für alle $1 \leq i \leq k$, damit ist $\tau \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. Weil $\sigma = \rho_{k+1}\,\pi^{l_{k+1}}\,\tau\,\rho_0$ ist und auch $\sigma, \rho_0, \rho_{k+1} \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ sind, folgt $\pi^{l_{k+1}} \in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. Also muss $l_{k+1} = 0$ sein. Denn nach Hilfssatz 6.20 gilt sonst $|\Delta - \pi^{l_{k+1}}(\Delta)| \neq |\pi^{l_{k+1}}(\Delta) - \Delta|$. Somit ist die 3. Behauptung bewiesen.

Sei $m = \max\{|l_i|;\ 1 \leq i \leq k\}$.

4. Behauptung: Sei $1 \leq i \leq k$.

(i) Wenn $\rho_i \in U_\nu$ ist, so gilt $\operatorname{supp}\bigl(\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}\bigr) \cap (\kappa - \Delta) \subseteq \{d_0, \ldots, d_{m-1}\}$.

(ii) Wenn $\rho_i \in \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta)$ ist, so gilt $\operatorname{supp}\bigl(\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}\bigr) \cap \Delta \subseteq \{c_0, \ldots, c_{m-1}\}$.

Beweis: Zu (i): Wir betrachten die Zerlegung von ρ_i in elementfremde Zyklen. Dann entsteht $\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}$ dadurch, dass man in jedem Zyklus aus der Zerlegung von ρ_i die Einträge durch ihr Bild unter π^{-l_i} ersetzt.

1. Fall: $l_i \geq 0$.
Da $\rho_i \in \operatorname{Sym}(\Delta)$ ist, sind alle Einträge Elemente von Δ. Folglich sind auch deren Bilder unter π^{-l_i} Elemente von Δ, d. h. $\operatorname{supp}\bigl(\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}\bigr) \subseteq \Delta$.
Also gilt $\operatorname{supp}\bigl(\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}\bigr) \cap (\kappa - \Delta) = \varnothing$.

2. Fall: $l_i < 0$.
Dann bildet π^{-l_i} genau die Elemente $\{c_0, c_1, \ldots, c_{|l_i|-1}\}$ von Δ nach $\kappa - \Delta$ ab. Also werden in der Zyklenzerlegung von ρ_i diese Einträge durch $\{d_{|l_i|-1}, d_{|l_i|-2}, \ldots, d_0\}$ ersetzt, sofern sie überhaupt vorkommen (vgl. Hilfssatz 6.20). Alle anderen Einträge bleiben fest oder werden durch andere Elemente von Δ ersetzt.
Es folgt $\operatorname{supp}\bigl(\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}\bigr) \subseteq \Delta \cup \{d_0, \ldots, d_{|l_i|-1}\}$ und somit gilt
$\operatorname{supp}\bigl(\pi^{-l_i}\,\rho_i\,\pi^{l_i}\bigr) \cap (\kappa - \Delta) \subseteq \{d_0, \ldots, d_{|l_i|-1}\} \subseteq \{d_0, \ldots, d_{m-1}\}$.

Die Aussage (ii) folgt analog.
Also ist die 4. Behauptung bewiesen.

Wenn wir nun benachbarte Elemente von $\bigl\langle U_\nu,\ \pi\bigr\rangle$ und von $\bigl\langle \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta),\ \pi\bigr\rangle$ zusammenfassen, so erhält man mit den Behauptungen 3 und 4 die Darstellung

$$\sigma = \varphi_s \cdot \psi_s \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \psi_2 \cdot \varphi_1 \cdot \psi_1 \cdot \varphi_0 \cdot \psi_0$$

für ein $s \in \omega$, wobei $\varphi_i \in \bigl\langle U_\nu,\ \pi\bigr\rangle$, $\psi_i \in \bigl\langle \operatorname{Sym}(\kappa - \Delta),\ \pi\bigr\rangle$, $\operatorname{supp}(\varphi_i) \cap (\kappa - \Delta) \subseteq \{d_0, \ldots, d_{m-1}\}$ und $\operatorname{supp}(\psi_i) \cap \Delta \subseteq \{c_0, \ldots, c_{m-1}\}$ ist (für $0 \leq i \leq s$).
(Dabei ist $\psi_0 = 1$ oder $\varphi_s = 1$ möglich.)

Wir setzen $\varphi = \prod_{i=s}^{0} \varphi_i \in \langle U_\nu,\, \pi\rangle$.

5. Behauptung: $\operatorname{supp}(\varphi^{-1}\sigma) \cap \Delta$ ist endlich.

Beweis: Es sei

$$\begin{aligned}\Sigma \;=\; & \{c_0,\dots,c_{m-1}\} \,\cup\, \varphi_0^{-1}\big(\{c_0,\dots,c_{m-1},d_0,\dots,d_{m-1}\}\big)\\ & \cup (\varphi_1\varphi_0)^{-1}\big(\{c_0,\dots,c_{m-1},d_0,\dots,d_{m-1}\}\big) \,\cup\, \dots\\ & \cup (\varphi_{s-1}\dots\varphi_1\varphi_0)^{-1}\big(\{c_0,\dots,c_{m-1},d_0,\dots,d_{m-1}\}\big).\end{aligned}$$

Sei $x \in \Delta - \Sigma$. Dann gilt:

- $\psi_0(x) = x$, denn es ist $x \in \Delta - \{c_0,\dots,c_{m-1}\}$ und $\operatorname{supp}(\psi_0) \cap \Delta \subseteq \{c_0,\dots,c_{m-1}\}$.
- $(\varphi_0\,\psi_0)(x) = \varphi_0(x) \in \Delta - \{c_0,\dots,c_{m-1}\}$, denn es ist $x \notin \varphi_0^{-1}\big(\{c_0,\dots,c_{m-1}\}\big)$. Wenn dabei $\varphi_0(x) \in \kappa - \Delta$ wäre, so würde $x \in \operatorname{supp}(\varphi_0)$ gelten. Also wäre $\varphi_0(x) \in \operatorname{supp}(\varphi_0) \cap (\kappa - \Delta) \subseteq \{d_0,\dots,d_{m-1}\}$ und damit $x \in \Sigma$ im Widerspruch zur Annahme.
- $(\psi_1\,\varphi_0\,\psi_0)(x) = \psi_1\big(\varphi_0(x)\big) = \varphi_0(x)$, denn es ist $\varphi_0(x) \in \Delta - \{c_0,\dots,c_{m-1}\}$ und $\operatorname{supp}(\psi_1) \cap \Delta \subseteq \{c_0,\dots,c_{m-1}\}$.
- $(\varphi_1\,\psi_1\,\varphi_0\,\psi_0)(x) = (\varphi_1\,\varphi_0)(x) \in \Delta - \{c_0,\dots,c_{m-1}\}$, denn wir haben angenommen, dass $x \notin (\varphi_1\,\varphi_0)^{-1}\big(\{c_0,\dots,c_{m-1}\}\big)$ gilt. Wenn $(\varphi_1\,\varphi_0)(x) \in \kappa - \Delta$ wäre, so wäre $x \in \operatorname{supp}(\varphi_1\,\varphi_0)$. Somit wäre dann $(\varphi_1\,\varphi_0)(x) \in \operatorname{supp}(\varphi_1\,\varphi_0) \cap (\kappa - \Delta) \subseteq \big(\operatorname{supp}(\varphi_1) \cap (\kappa - \Delta)\big) \cup \big(\operatorname{supp}(\varphi_0) \cap (\kappa - \Delta)\big) \subseteq \{d_0,\dots,d_{m-1}\}$ und damit $x \in \Sigma$.
- Wenn man dies iteriert, so folgt
  $(\varphi_s\,\psi_s\,\varphi_{s-1}\,\psi_{s-1}\,\dots\,\varphi_2\,\psi_2\,\varphi_1\,\psi_1\,\varphi_0\,\psi_0)(x) = (\varphi_s\,\varphi_{s-1}\,\dots\,\varphi_2\,\varphi_1\,\varphi_0)(x)$.

Damit haben wir gezeigt, dass für alle $x \in \Delta - \Sigma$ gilt $\sigma(x) = \varphi(x)$, d. h. $(\varphi^{-1}\sigma)(x) = x$. Also ist $\operatorname{supp}(\varphi^{-1}\sigma) \cap \Delta \subseteq \Sigma$.

Da Σ eine endliche Teilmenge von κ ist, ist die 5. Behauptung bewiesen.

Es gilt $\operatorname{supp}(\varphi) \cap (\kappa - \Delta) \subseteq \big(\bigcup_{i=0}^{s} \operatorname{supp}(\varphi_i)\big) \cap (\kappa - \Delta) = \bigcup_{i=0}^{s} \big(\operatorname{supp}(\varphi_i) \cap (\kappa - \Delta)\big) \subseteq \{d_0,\dots,d_{m-1}\}$. Weil $\sigma \in \operatorname{Sym}(\Delta)$ und damit $\operatorname{supp}(\sigma) \cap (\kappa - \Delta) = \varnothing$ ist, folgt daraus

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\varphi^{-1}\sigma) \cap (\kappa - \Delta) \;&\subseteq\; \big(\operatorname{supp}(\varphi) \cup \operatorname{supp}(\sigma)\big) \cap (\kappa - \Delta)\\ &=\; \big(\operatorname{supp}(\varphi) \cap (\kappa - \Delta)\big) \cup \big(\operatorname{supp}(\sigma) \cap (\kappa - \Delta)\big)\\ &\subseteq\; \{d_0,\dots,d_{m-1}\}\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich, dass $\mathrm{supp}(\varphi^{-1}\sigma) = \big(\mathrm{supp}(\varphi^{-1}\sigma)\cap\Delta\big) \cup \big(\mathrm{supp}(\varphi^{-1}\sigma)\cap(\kappa-\Delta)\big)$ eine endliche Menge ist. Also gilt $\varphi^{-1}\sigma \in \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$. Doch wegen $\varphi \in \big\langle U_\nu,\, \pi\big\rangle$ ist damit $\sigma \in \big\langle U_\nu,\, \pi\big\rangle \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ im Widerspruch zur Wahl von σ (vgl. (‡)).

Also ist die Annahme $\sigma \in \big\langle U_\nu,\, \pi,\, \mathrm{Sym}(\kappa-\Delta)\big\rangle$ falsch und wir haben ein Element aus $S_{[\Delta]}$ gefunden, das nicht in $\big\langle U_\nu,\, \pi,\, \mathrm{Sym}(\kappa-\Delta)\big\rangle$ liegt.
Damit haben wir gezeigt, dass $\big\{\big\langle U_\nu,\, \pi,\, \mathrm{Sym}(\kappa-\Delta)\big\rangle;\ \nu\in\mu\big\}$ eine konfinalen Kette in $S_{[\Delta]}$ bildet. Insbesondere gilt $\mathrm{konf}\,\big(S_{[\Delta]}\big) \leq \mu = \mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big)$ und der Satz ist bewiesen. □

Damit haben wir die Konfinalität des Faststabilisators in allen Fällen bestimmt. Wir fassen die Ergebnisse aus den Sätzen 6.11, 6.14 und 6.27 zu folgendem Resultat zusammen:

Hauptsatz 6.28 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ, wobei $|\kappa-\Delta| = \kappa$ sei.*

(i) *Wenn Δ abzählbar oder die Mächtigkeit von Δ eine Nachfolgerkardinalzahl ist, dann gilt* $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.

(ii) *Wenn die Mächtigkeit von Δ eine Limeskardinalzahl ist, dann gilt* $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{cf}(|\Delta|)$.

Gemäß Korollar 5.5 hat eine intransitive maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$ immer diesselbe Konfinalität wie die $\mathrm{Sym}(\kappa)$ selbst. Aus den Ergebnissen über die Konfinalität des Faststabilisators folgern wir nun, dass dies für transitive maximale Untergruppen im Allgemeinen nicht gilt.
Nach einem Satz von Ralph Ball ist der Faststabilisator einer unendlichen Teilmenge Δ von κ eine maximale Untergruppe der $\mathrm{Sym}(\kappa)$, falls $|\Delta| < \kappa$ ist (vgl. [3, Theorem 2.2] oder [7, Theorem 4.1]).

Korollar 6.29 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine unendliche Teilmenge von κ, wobei die Mächtigkeit von Δ eine Limeskardinalzahl und echt kleiner als κ sei.*
Dann ist $S_{[\Delta]}$ eine maximale Untergruppe von S und es gilt $\mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) < \mathrm{konf}\,(S)$.

Beweis: Die Maximalität von $S_{[\Delta]}$ folgt aus dem erwähnten Resultat von Ball.

Nach Satz 6.14 und Satz 1.5 gilt $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) = \operatorname{cf}(|\Delta|) \leq |\Delta| < \kappa < \operatorname{konf}(S)$. □

Wenn man GCH annimmt, so gilt sogar, dass jede maximale Untergruppe der $\operatorname{Sym}(\kappa)$, die der Faststabilisator einer unendlichen Teilmenge von κ ist, eine echt kleinere Konfinalität als die $\operatorname{Sym}(\kappa)$ hat.

Korollar 6.30 (GCH)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \operatorname{Sym}(\kappa)$ und M eine maximale Untergruppe der $\operatorname{Sym}(\kappa)$.
Wenn eine unendliche Teilmenge Δ von κ mit $M = S_{[\Delta]}$ existiert, dann gilt $\operatorname{konf}(M) < \operatorname{konf}(S)$.

Beweis: Es gilt $|\kappa - \Delta| = \kappa$, da sonst $M = S_{[\Delta]} = S$ wäre (vgl. Hilfssatz 6.1).
Nach einem Resultat von Brazil, Covington, Penttila, Praeger und Woods ist der Faststabilisator einer mittelmäßigen Teilmenge von κ keine maximale Untergruppe von S (vgl. [7, Theorem 4.2]). Somit muss $|\Delta| < \kappa$ gelten.

1. Fall: $|\Delta|$ ist eine Nachfolgerzahl oder Δ ist abzählbar.
Dann folgt aus Hauptsatz 6.28, den Sätzen 5.3 und 1.5 sowie GCH
$\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) = \operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}}) = \min\Big\{\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big),\ \operatorname{konf}(S)\Big\} = \min\big\{|\Delta|^+,\ \kappa^+\big\} = |\Delta|^+ < \kappa^+ = \operatorname{konf}(S)$.

2. Fall: $|\Delta|$ ist eine Limeskardinalzahl.
Dann gilt die Behauptung nach Korollar 6.29 bereits in ZSF + AC. □

Bemerkung: Die Aussage des Korollars 6.30 ist in ZSF + AC nicht beweisbar. Denn wenn κ eine reguläre unendliche Kardinalzahl und Δ eine unendliche Teilmenge von κ ist, deren Mächtigkeit eine Nachfolgerkardinalzahl und echt kleiner als κ ist, so ist es gemäß Satz 1.8 konsistent (relativ zu ZSF + AC), dass $\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big) > \operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\kappa)\big)$ gilt. Also ist es konsistent, dass der Faststabilisator $S_{[\Delta]}$ eine maximale Untergruppe von $S = \operatorname{Sym}(\kappa)$ mit $\operatorname{konf}(S_{[\Delta]}) = \operatorname{konf}(S_{\{\Delta\}}) = \min\big\{\operatorname{konf}\big(\operatorname{Sym}(\Delta)\big), \operatorname{konf}(S)\big\} = \operatorname{konf}(S)$ ist.

Mit Hilfe der in diesem und im letzten Abschnitt gezeigten Resultate können wir auch die Konfinalität des gleichgewichtigen Faststabilisators einer abzählbaren Menge bestimmen.

Korollar 6.31 *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Dann gilt $\mathrm{konf}\,(S_{\lfloor\Delta\rfloor}) = \mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$.

Beweis: Für $a \in \Delta$ und $b \in \kappa - \Delta$ gilt $S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, (a,b)\big\rangle$ nach Proposition 6.17.
Damit folgt aus Proposition 1.9 $\mathrm{konf}\,\big(S_{\{\Delta\}}\big) \leq \mathrm{konf}\,\big(S_{\lfloor\Delta\rfloor}\big)$.
Nach Satz 6.21 existiert eine Permutation $\pi \in S_{[\Delta]}$ mit $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\lfloor\Delta\rfloor},\, \pi\big\rangle$.
Mit Proposition 1.9 und Satz 6.27 folgt $\mathrm{konf}\,(S_{\lfloor\Delta\rfloor}) \leq \mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$. □

6.5 Konfinale Ketten im Faststabilisator

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen wir die Gestalt kürzester konfinaler Ketten im Faststabilisator einer unendlichen Teilmenge Δ von κ. Wir unterscheiden wieder die Fälle, dass die Mächtigkeit von Δ eine Nachfolgerkardinalzahl, eine Limeskardinalzahl oder $\aleph_0$ ist.
Im ersten Fall besteht ein enger Zusammenhang zwischen kürzesten konfinalen Ketten im Faststabilisator und solchen im blockweisen Stabilisator, mit deren Gestalt wir uns in Abschnitt 5.2 beschäftigt haben.

Proposition 6.32 (GCH)
Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ, wobei $|\Delta| = \theta^+$ für eine unendliche Kardinalzahl θ und $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.
Sei $\mu = \mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})$ und $\pi \in \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$ mit $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| = \theta$.

*(i) Wenn $\big\{H_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ ist, dann ist $\big\{H_\nu \cap S_{\{\Delta\}};\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$.
Außerdem existiert ein $\xi \in \mu$, so dass für alle $\nu \in \mu$ mit $\xi \leq \nu$ gilt $H_\nu = \big\langle H_\nu \cap S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle = (H_\nu \cap S_{\{\Delta\}}) \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$.*

*(ii) Wenn $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ ist, dann ist $\big\{U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa);\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$.
Außerdem existiert ein $\xi \in \mu$, so dass für alle $\nu \in \mu$ mit $\xi \leq \nu$ gilt $U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa) = \big\langle U_\nu,\, \pi\big\rangle$.*

Beweis: (i) Wir setzen $V_\nu = H_\nu \cap S_{\{\Delta\}}$ für alle $\nu \in \mu$.
Gemäß Korollar 6.10 gilt $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle$.

Da $\pi \in S_{[\Delta]}$ ist, existiert eine Ordinalzahl $\eta \in \mu$ mit $\pi \in H_\eta$.
Für alle $\nu \in \mu$ ist V_ν eine echte Untergruppe von $S_{\{\Delta\}}$. Denn falls $V_\nu = S_{\{\Delta\}}$ wäre, so wäre $S_{\{\Delta\}} \leq H_\nu$ und damit $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\{\Delta\}}, \pi \big\rangle \leq H_{\max\{\nu,\eta\}}$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass dies eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$ ist.
Wegen $S_{\{\Delta\}} = \big(\bigcup\limits_{\nu\in\mu} H_\nu \big) \cap S_{\{\Delta\}} = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} V_\nu$ ist $\big\{V_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ folglich eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$.

Weil wir GCH vorausgesetzt haben, existiert nach Korollar 5.8 (i) und (ii) ein $\zeta \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\theta^+}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa - \Delta) \leq V_\zeta$.
Sei $\xi = \max\{\eta, \zeta\}$.

1. Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ mit $\xi \leq \nu$ gilt $\big\langle V_\nu, \pi \big\rangle = V_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$.
Beweis: Offensichtlich ist $\big\langle V_\nu, \pi \big\rangle \leq V_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$.
Sei $\sigma \in V_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$, d. h. $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ für $\sigma_1 \in V_\nu$ und $\sigma_2 \in \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$.
Dann gilt $|\Delta \mathbin{\triangle} \sigma_2(\Delta)| \leq |\mathrm{supp}(\sigma_2)| \leq \theta = |\Delta \mathbin{\triangle} \pi(\Delta)|$.
Falls $\sigma_2 \in S_{\{\Delta\}}$ ist, so ist $\sigma_2 \in S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa) = \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa - \Delta) \leq V_\zeta \leq V_\nu$.
Falls $\sigma_2 \notin S_{\{\Delta\}}$ ist, so gilt $\pi, \sigma_2 \in \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa) - S_{\{\Delta\}}$ und $\theta^+ = |\Delta| \leq \kappa < \kappa^+$. Also folgt $\sigma_2 \in \big\langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa), \pi \big\rangle \leq \big\langle V_\zeta, \pi \big\rangle \leq \big\langle V_\nu, \pi \big\rangle$ aus Proposition 6.5 in Verbindung mit Hilfssatz 6.6.
In beiden Fällen gilt $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \in \big\langle V_\nu, \pi \big\rangle$ und die Behauptung ist bewiesen.

2. Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ mit $\xi \leq \nu$ gilt $H_\nu = \big\langle V_\nu, \pi \big\rangle$.
Beweis: Offensichtlich gilt $\big\langle V_\nu, \pi \big\rangle \leq \big\langle H_\nu, H_\eta \big\rangle = H_\nu$.
Sei $\sigma \in H_\nu$. Weil $H_\nu \leq S_{[\Delta]} = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$ gilt (vgl. Bemerkung 6.2), existieren $\sigma_1 \in S_{\{\Delta\}}$ und $\sigma_2 \in \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$ mit $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$. Nach der ersten Behauptung gilt $\sigma_2 \in \big\langle V_\nu, \pi \big\rangle \leq H_\nu$. Also ist auch $\sigma_1 = \sigma \cdot \sigma_2^{-1} \in H_\nu$ und somit $\sigma_1 \in H_\nu \cap S_{\{\Delta\}} = V_\nu$.
Es folgt $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \in \big\langle V_\nu, \pi \big\rangle$.
Damit ist Teil (i) bewiesen.

(ii) Wieder folgt aus Korollar 5.8, dass ein $\zeta \in \mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\theta^+}(\Delta) \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa - \Delta) \leq U_\zeta$ existiert.

3. Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ ist $U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$ eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$.
Beweis: Wir können o. B. d. A. $\zeta \leq \nu$ annehmen.
Sei $\sigma \in S_{\{\Delta\}} - U_\nu$. Angenommen es gilt $\sigma \in U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$. Dann existieren $\sigma_1 \in U_\nu$ und $\sigma_2 \in \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$ mit $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$. Wegen $\sigma, \sigma_1 \in S_{\{\Delta\}}$ gilt $\sigma_2 \in S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa) \leq U_\zeta$.
Damit ist $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \in U_\nu$ im Widerspruch zur Wahl von σ.
Also ist $\sigma \in S_{[\Delta]} - U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)$ und die Behauptung ist gezeigt.

Weil $S_{[\Delta]} = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa) = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa)\big)$ gilt, bildet $\big\{U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\theta^+}(\kappa);\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$.
Der Rest von Teil (ii) folgt analog zur ersten Behauptung. □

Die obige Behauptung zeigt, welche Gestalt kürzeste konfinale Ketten im Faststabilisator einer Teilmenge Δ von κ (unter der Annahme von GCH) haben, wenn die Mächtigkeit von Δ eine Nachfolgerkardinalzahl ist. Jedes ihrer Glieder, eventuell abgesehen von einem echten Anfangsabschnitt der Kette, ist das Produkt eines Gliedes einer kürzesten konfinalen Kette im blockweisen Stabilisator $S_{\{\Delta\}}$ mit der $\mathrm{Sym}_{|\Delta|}(\kappa)$. Umgekehrt erhält man aus jeder kürzesten konfinalen Kette in $S_{\{\Delta\}}$ durch Multiplikation ihrer Glieder mit der $\mathrm{Sym}_{|\Delta|}(\kappa)$ eine in $S_{[\Delta]}$.
Die gleichen Ketten bekommt man, wenn man statt dessen das Erzeugnis jedes Gliedes mit einer Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}_{|\Delta|}(\kappa)$, für die $|\Delta \mathbin{\triangle} \pi(\Delta)|^+ = |\Delta|$ gilt, bildet.

Wir untersuchen nun den Fall, dass die Mächtigkeit von Δ eine Limeskardinalzahl ist. In Proposition 6.12 wurde eine kürzeste konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ angegeben. Wir zeigen im Folgenden, dass es im Wesentlichen nur diese Kette gibt. Das ist in dem Sinn gemeint, dass sie und jede andere kürzeste konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ sich wechselseitig ineinander einbetten lassen.

Proposition 6.33 *Sei κ eine überabzählbare Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine Teilmenge von κ, wobei $|\Delta| = \aleph_\lambda$ für eine Limesordinalzahl λ und $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.*
Sei $\mu = \mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{cf}(\lambda)$, $\langle \alpha_\nu;\ \nu \in \mu\rangle$ eine strikt–aufsteigende Folge von Ordinalzahlen mit $\lambda = \bigcup_{\nu\in\mu} \alpha_\nu$ und die Kette $\big\{H_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ wie in Proposition 6.12 definiert.
Sei $\big\{U_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$. Dann gilt:

(i) Für alle $\nu \in \mu$ existiert ein $\xi \in \mu$ mit $H_\nu \le U_\xi$.

(ii) Für alle $\nu \in \mu$ existiert ein $\xi \in \mu$ mit $U_\nu \le H_\xi$.

Beweis: *Behauptung:* Es existiert ein $\eta \in \mu$ mit $S_{\{\Delta\}} \le U_\eta$.
Beweis: Angenommen für alle $\nu \in \mu$ ist $S_{\{\Delta\}} \not\le U_\nu$, d. h. $U_\nu \cap S_{\{\Delta\}}$ ist eine echte Untergruppe von $S_{\{\Delta\}}$. Dann folgt wegen $S_{\{\Delta\}} = S_{[\Delta]} \cap S_{\{\Delta\}} = \bigcup_{\nu\in\mu} \big(U_\nu \cap S_{\{\Delta\}}\big)$, dass $\big\{U_\nu \cap S_{\{\Delta\}};\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ ist. Mit Satz 1.5 und Satz 5.3 gilt also $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(|\Delta|) \le |\Delta| < \min\big\{\mathrm{konf}\,\big(\mathrm{Sym}(\Delta)\big), \mathrm{konf}\,(S)\big\} = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}}) \le \mu$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(i) Sei nun $\nu \in \mu$ und eine Permutation $\pi \in S$ mit $|\Delta \triangle \pi(\Delta)| = \aleph_{\alpha_\nu} < |\Delta|$ gewählt (vgl. Beweis von Proposition 6.12). Dann gilt $\big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle = \big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq \aleph_{\alpha_\nu}\big\} = H_\nu$ nach Proposition 6.8. Weil $\pi \in S_{[\Delta]}$ ist, existiert ein $\zeta \in \mu$ mit $\pi \in U_\zeta$ und es folgt $H_\nu = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle \leq \big\langle U_\eta,\, U_\zeta\big\rangle = U_{\max\{\eta,\zeta\}}$.

(ii) Angenommen es existiert ein $\nu_0 \in \mu$, so dass für alle $\xi \in \mu$ gilt $U_{\nu_0} \not\leq H_\xi$.
Wenn wir $\zeta = \max\{\eta, \nu_0\}$ setzen, so gilt $U_\zeta \not\leq H_\xi$ für alle $\xi \in \mu$. Denn sonst wäre ja $U_{\nu_0} \leq U_\zeta \leq H_\xi$.
Sei $\xi \in \mu$. Dann existiert also ein $\tau \in U_\zeta - H_\xi$. Insbesondere ist $\tau \in S_{[\Delta]}$ mit $|\Delta \triangle \tau(\Delta)| = \aleph_\beta$, wobei $\aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\beta < \aleph_\lambda = |\Delta|$ gilt. Wir wenden wieder Proposition 6.8 an und schließen $H_\xi = \big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq \aleph_{\alpha_\xi}\big\} \leq \big\{\sigma \in S;\ |\Delta \triangle \sigma(\Delta)| \leq \aleph_\beta\big\} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \tau\big\rangle = \big\langle U_\eta,\, U_\zeta\big\rangle = U_\zeta$.
Da $\xi \in \mu$ beliebig war, folgt $S_{[\Delta]} = \bigcup\limits_{\xi \in \mu} H_\xi \leq U_\zeta$ im Widerspruch dazu, dass dies eine echte Untergruppe von $S_{[\Delta]}$ ist. □

Zum Schluss betrachten wir den Fall, dass Δ abzählbar ist:

Proposition 6.34 (GCH)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei.
Sei $\mu = \mathrm{konf}\,(S_{[\Delta]}) = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}}) = \mathrm{konf}\,(S_{\lfloor\Delta\rfloor})$ und $\big\{H_\nu;\ \nu \in \mu\big\}$ eine konfinale Kette in $S_{[\Delta]}$ sowie π ein Zyklus unendlicher Länge, der genau ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und kein Element von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet. Dann gilt:

(i) $\big\{H_\nu \cap S_{\{\Delta\}};\ \nu \in \mu\big\}$ ist eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ und es existiert ein $\xi \in \mu$, so dass für alle $\nu \in \mu$ mit $\xi \leq \nu$ gilt $H_\nu = \big\langle H_\nu \cap S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle$.

(ii) $\big\{H_\nu \cap S_{\lfloor\Delta\rfloor};\ \nu \in \mu\big\}$ ist eine konfinale Kette in $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ und es existiert ein $\eta \in \mu$, so dass für alle $\nu \in \mu$ mit $\eta \leq \nu$ gilt $H_\nu = \big\langle H_\nu \cap S_{\lfloor\Delta\rfloor},\, \pi\big\rangle$.

Beweis: Gemäß Satz 6.21 gilt $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle = \big\langle S_{\lfloor\Delta\rfloor},\, \pi\big\rangle$ und nach Voraussetzung existiert ein $\eta \in \mu$ mit $\pi \in H_\eta$.
Wir beweisen zunächst Teil (ii) und setzen dazu $V_\nu = H_\nu \cap S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ für alle $\nu \in \mu$.
Dies sind echte Untergruppen von $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$. Denn wenn es ein $\nu \in \mu$ mit $V_\nu = S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ gäbe, so wäre $S_{[\Delta]} = \big\langle S_{\lfloor\Delta\rfloor},\, \pi\big\rangle \leq \big\langle H_\nu,\, \pi\big\rangle = H_{\max\{\nu,\eta\}}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wegen $S_{\lfloor\Delta\rfloor} = \bigcup\limits_{\nu\in\mu} V_\nu$ bildet $\{V_\nu;\ \nu\in\mu\}$ eine konfinale Kette in $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.

1. Behauptung: Für alle $\nu\in\mu$ mit $\eta\le\nu$ ist $H_\nu = \langle V_\nu,\ \pi\rangle$.
Beweis: Offensichtlich gilt $\langle V_\nu,\ \pi\rangle \le H_\nu$, wenn $\eta\le\nu$ ist.
Sei nun $\sigma\in H_\nu$. Es gilt $H_\nu \le S_{[\Delta]} = \langle S_{\lfloor\Delta\rfloor},\ \pi\rangle = S_{\lfloor\Delta\rfloor}\cdot\langle\pi\rangle$, da $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ ein Normalteiler von $S_{[\Delta]}$ ist (vgl. Proposition 6.22). Somit existieren $\rho\in S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ und $k\in\mathbb{Z}$ mit $\sigma=\rho\cdot\pi^k$. Da $\sigma,\pi^k\in H_\nu$ sind, gilt dies auch für ρ. Also ist $\rho\in S_{\lfloor\Delta\rfloor}\cap H_\nu = V_\nu$ und folglich $\sigma\in\langle V_\nu,\ \pi\rangle$.
Damit ist Teil (ii) bewiesen.

(i) Wir setzen $U_\nu = H_\nu\cap S_{\{\Delta\}}$ für alle $\nu\in\mu$.
Dann folgt wie oben, dass $\{U_\nu;\ \nu\in\mu\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ bildet.
Gemäß Korollar 5.8 existiert ein $\zeta\in\mu$ mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\Delta)\cdot\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa-\Delta)\le U_\zeta$. $(\star)$
Wir wählen paarweise disjunkte Mengen $A=\{a_n;\ n\in\omega\}$, $B=\{b_n;\ n\in\omega\}$, $C=\{c_n;\ n\in\omega\}$ und $D=\{d_n;\ n\in\omega\}$, wobei $A,\ C\subseteq\Delta$ und $B,\ D\subseteq\kappa-\Delta$ gilt, und setzen $\pi_1 = (\ldots,\ c_5,\ c_4,\ c_3,\ c_2,\ c_1,\ c_0,\ d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ \ldots)$.
Weil $\pi,\pi_1\in S_{[\Delta]}$ und $\Delta-\pi(\Delta)=\varnothing=\Delta-\pi_1(\Delta)$ sowie $|\pi(\Delta)-\Delta|=1=|\pi_1(\Delta)-\Delta|$ gilt, existieren nach Hilfssatz 6.16 Permutationen $\tau_1,\tau_2\in S_{\{\Delta\}}$ mit $\pi_1=\tau_1\,\pi\,\tau_2$. $(\dagger)$
Außerdem existiert ein $\gamma\in\mu$ mit $\pi,\pi_1,(a_0,b_0)\in H_\gamma$.
Die folgenden Permutationen sind alle Elemente von $S_{\{\Delta\}}$:
$\tau_1,\tau_2,(a_0,c_0),(b_0,d_0),(c_1,c_0)$ sowie (a_0,a_n) und (b_0,b_n) für alle $n\in\omega$.
Da es sich um abzählbar viele handelt und $\{U_\nu;\ \nu\in\mu\}$ eine konfinale Kette in $S_{\{\Delta\}}$ mit $\mathrm{cf}(\mu)=\mu=\mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}})=\min\{\mathrm{konf}\,(\mathrm{Sym}(\Delta)),\mathrm{konf}\,(S)\}>\aleph_0$ ist, existiert ein $\xi\in\mu$, so dass $\eta,\zeta,\gamma\le\xi$ gilt und U_ξ die erwähnten Permutationen enthält.

2. Behauptung: Für alle $\nu\in\mu$ mit $\xi\le\nu$ ist $\langle U_\nu,\ (a_0,b_0)\rangle = U_\nu\cdot\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.
Beweis: Sei $\sigma\in U_\nu\cdot\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$. Also existieren $\sigma_1\in U_\nu$ und $\sigma_2\in\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ mit $\sigma=\sigma_1\cdot\sigma_2$. Nach Proposition 6.19 ist $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)\le S_{\lfloor\Delta\rfloor}$, folglich existiert ein $k\in\omega$ mit $|\Delta-\sigma_2(\Delta)|=|\sigma_2(\Delta)-\Delta|=k$.
Wir setzen $\rho=\prod\limits_{i<k}(a_i,b_i)=\prod\limits_{i<k}(a_0,a_i)\,(b_0,b_i)\,(a_0,b_0)\,(b_0,b_i)\,(a_0,a_i)\in\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.
Dann gilt $|\Delta-\rho(\Delta)|=|\rho(\Delta)-\Delta|=k$ und $\sigma_2,\rho\in S_{[\Delta]}$. Nach Hilfssatz 6.16 existieren damit $\rho_1,\rho_2\in S_{\{\Delta\}}$ mit $\sigma_2=\rho_1\,\rho\,\rho_2$. Dabei zeigt der Beweis von Hilfssatz 6.16, dass $\rho_1,\rho_2\in\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ gewählt werden können, wenn $\sigma_2,\rho\in\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ sind. Somit folgt $\sigma_2\in\langle S_{\{\Delta\}}\cap\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa),\ \rho\rangle\le\langle S_{\{\Delta\}}\cap\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa),\ U_\xi,\ (a_0,b_0)\rangle\le\langle U_\xi,\ (a_0,b_0)\rangle$ nach $(\star)$.
Also gilt $\sigma=\sigma_1\cdot\sigma_2\in\langle U_\nu,\ U_\xi,\ (a_0,b_0)\rangle=\langle U_\nu,\ (a_0,b_0)\rangle$.

Damit ist $U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) \le \big\langle U_\nu,\, (a_0,b_0)\big\rangle$ gezeigt. Die umgekehrte Ungleichung ist offensichtlich.

3. Behauptung: Für alle $\nu \in \mu$ mit $\xi \le \nu$ ist $V_\nu = \big\langle U_\nu,\, (a_0,b_0)\big\rangle$.
Beweis: Es gilt $\big\langle U_\nu,\, (a_0,b_0)\big\rangle \le \big\langle H_\nu \cap S_{\{\Delta\}},\, H_\gamma \cap S_{\lfloor\Delta\rfloor}\big\rangle \le H_\nu \cap S_{\lfloor\Delta\rfloor} = V_\nu$.
Sei nun $\sigma \in V_\nu \le S_{\lfloor\Delta\rfloor} = S_{\{\Delta\}} \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ (vgl. Proposition 6.19). Dann existieren $\sigma_1 \in S_{\{\Delta\}}$ und $\sigma_2 \in \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ mit $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$.
Es folgt $\sigma_1 = \sigma \cdot \sigma_2^{-1} \in V_\nu \cdot \big\langle U_\nu,\, (a_0,b_0)\big\rangle \le \big\langle H_\nu,\, (a_0,b_0)\big\rangle = \big\langle H_\nu,\, H_\gamma\big\rangle = H_\nu$ gemäß Behauptung 2. Also ist $\sigma_1 \in H_\nu \cap S_{\{\Delta\}} = U_\nu$ und damit $\sigma \in U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) = \big\langle U_\nu,\, (a_0,b_0)\big\rangle$.
Damit ist die dritte Behauptung bewiesen.

Es gilt $(a_0,b_0) = (a_0,c_0)\,(b_0,d_0)\,\pi_1\,(c_1,c_0)\,\pi_1^{-1}\,(b_0,d_0)\,(a_0,c_0) \in \big\langle U_\xi,\, \pi_1\big\rangle$.
Daraus folgt für ein $\nu \in \mu$ mit $\xi \le \nu$ aus den ersten beiden Behauptungen und (†):
$H_\nu = \big\langle V_\nu,\, \pi\big\rangle = \big\langle U_\nu,\, (a_0,b_0),\, \pi\big\rangle \le \big\langle U_\nu,\, U_\xi,\, \pi_1,\, \pi\big\rangle \le \big\langle U_\nu,\, \pi,\, \tau_1,\, \tau_2\big\rangle \le \big\langle U_\nu,\, \pi\big\rangle$
$= \big\langle H_\nu \cap S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle \le \big\langle H_\nu,\, H_\eta\big\rangle = H_\nu$, somit gilt $H_\nu = \big\langle H_\nu \cap S_{\{\Delta\}},\, \pi\big\rangle$.
Damit ist auch Teil (i) bewiesen. □

Eine kürzeste konfinale Kette im Faststabilisator einer abzählbaren Menge Δ hat also (unter der Annahme von GCH) die folgende Gestalt: Ihre Glieder sind das Erzeugnis der Glieder einer kürzesten konfinalen Kette im blockweisen Stabilisator (oder der einer kürzesten konfinalen Kette im gleichgewichtigen Faststabilisator) mit einem Zyklus unendlicher Länge, der ein Element von Δ nach $\kappa - \Delta$ und keines von $\kappa - \Delta$ nach Δ abbildet.
Aufgrund der Erfahrungen beim Beweis von Satz 6.27 vermuten wir, dass man umgekehrt nicht aus jeder kürzesten konfinalen Kette in $S_{\{\Delta\}}$ (oder in $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$) auf diese Weise eine in $S_{[\Delta]}$ erhält.
Was den gleichgewichtigen Faststabilisator betrifft, so zeigt die nächste Proposition, dass man aus jeder kürzesten konfinalen Kette in $S_{\{\Delta\}}$ durch Multiplikation ihrer Glieder mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ eine in $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ erhält und dass umgekehrt jede kürzeste konfinale Kette in $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$, eventuell abgesehen von einem echten Anfangsabschnitt, von dieser Form ist. Statt die Glieder mit $\mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ zu multiplizieren, kann man auch ihr Erzeugnis mit einer Transposition, die ein Element von Δ und eines von $\kappa - \Delta$ vertauscht, betrachten.

Proposition 6.35 (GCH)
Sei κ eine unendliche Kardinalzahl, $S = \mathrm{Sym}(\kappa)$ und Δ eine abzählbare Teilmenge von κ, wobei $|\kappa - \Delta| = \kappa$ sei. Sei $\mu = \mathrm{konf}\,(S_{\{\Delta\}}) = \mathrm{konf}\,(S_{\lfloor\Delta\rfloor})$ sowie $a \in \Delta$ und $b \in \kappa - \Delta$.

(i) Wenn $\{V_\nu;\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$ *ist, dann ist* $\{V_\nu \cap S_{\{\Delta\}};\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $S_{\{\Delta\}}$.
Außerdem existiert ein $\xi \in \mu$*, so dass für alle* $\nu \in \mu$ *mit* $\xi \leq \nu$ *gilt* $V_\nu = \langle V_\nu \cap S_{\{\Delta\}},\ (a,b)\rangle = (V_\nu \cap S_{\{\Delta\}}) \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$.

(ii) Wenn $\{U_\nu;\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $S_{\{\Delta\}}$ *ist, dann ist* $\{U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa);\ \nu \in \mu\}$ *eine konfinale Kette in* $S_{\lfloor\Delta\rfloor}$.
Außerdem existiert ein $\xi \in \mu$*, so dass für alle* $\nu \in \mu$ *mit* $\xi \leq \nu$ *gilt* $U_\nu \cdot \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) = \langle U_\nu,\ (a,b)\rangle$.

Beweis: Die Behauptung kann man analog zu Proposition 6.32 zeigen.
Man benötigt dazu die folgende Aussage:
Behauptung: $S_{\lfloor\Delta\rfloor} \cap \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa) = \langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa),\ (a,b)\rangle$.
Beweis: Sei $\sigma \in S_{\lfloor\Delta\rfloor} \cap \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$. Dann ist $|\Delta - \sigma(\Delta)| = |\sigma(\Delta) - \Delta| = k \in \omega$.
Wir wählen zwei k-elementige Mengen $\{a_i;\ i < k\} \subseteq \Delta$ und $\{b_i;\ i < k\} \subseteq \kappa - \Delta$ und setzen $\rho = \prod_{i<k}(a_i, b_i) = \prod_{i<k}(a, a_i)\,(b, b_i)\,(a, b)\,(b, b_i)\,(a, a_i) \in \langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa),\ (a,b)\rangle$.
Dann gilt $|\Delta - \rho(\Delta)| = |\rho(\Delta) - \Delta| = k$.
Somit folgt aus Hilfssatz 6.16, dass $\tau_1, \tau_2 \in S_{\{\Delta\}}$ mit $\sigma = \tau_1\,\rho\,\tau_2$ existieren. Dabei zeigt der Beweis von Hilfssatz 6.16, dass $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ gewählt werden können, falls $\sigma, \rho \in \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa)$ sind. Also folgt $\sigma \in \langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa),\ \rho\rangle \leq \langle S_{\{\Delta\}} \cap \mathrm{Sym}_{\aleph_0}(\kappa),\ (a,b)\rangle$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann, H.: *Transfinite Zahlen*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer–Verlag, Berlin 1955.

[2] Baer, R.: *Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge in sich*, Studia Mathematica **5** (1934), S. 15–17.

[3] Ball, R. W.: *Maximal subgroups of symmetric groups*, Transactions of the American Mathematical Society **121** (1966), S. 393–407.

[4] Baumgartner, J. E.; Shelah, S.; Thomas, S.: *Maximal subgroups of infinite symmetric groups*, Notre Dame Journal of Formal Logic **34** (1993), S. 1–11.

[5] Bhattacharjee, M.; Macpherson, D.; Möller, R. G.; Neumann, P. M.: *Notes on infinite permutation groups*, Lecture Notes in Mathematics 1698, Springer–Verlag, Berlin 1998.

[6] Bigelow, S.: *Supplements of bounded permutation groups*, Journal of Symbolic Logic **63** (1998), S. 89–102.

[7] Brazil, M.; Covington, J.; Penttila, T.; Praeger, C. E.; Woods, A. R.: *Maximal subgroups of infinite symmetric groups*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **68** (1994), S. 77–111.

[8] Bruijn, N. D. de: *Embedding theorems for infinite groups*, Indagationes Mathematicae **19** (1957), S. 560–569.
Addendum: Indagationes Mathematicae **26** (1964), S. 594–595.

[9] Cameron, P. J.: *Permutation Groups*, London Mathematical Society Student Texts 45, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[10] DIXON, J. D.; MORTIMER, B.: *Permutation groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York 1996.

[11] DIXON, J. D.; NEUMANN, P. M.; THOMAS S.: *Subgroups of small index in infinite symmetric groups*, Bulletin of the London Mathematical Society **18** (1986), S. 580–586.

[12] FELGNER, U.: *Vorlesung über Mengenlehre*, Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2000/2001 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[13] FELGNER, U.: *Unendliche symmetrische Gruppen*, Skriptum zur Vorlesung im Sommersemester 1998 am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

[14] FELGNER, U.; HAUG, F.: *The homomorphic images of infinite symmetric groups*, Forum Mathematicum **5** (1993), S. 505–520.

[15] JECH, T.: *Set Theory*, Academic Press, San Diego 1978.

[16] KUNEN, K.: *Set Theory*, An introduction to independence proofs, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford 1980.

[17] LEVY, A.: *Basic Set Theory*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer–Verlag, Berlin 1979.

[18] MACPHERSON, H. D.; NEUMANN, P. M.: *Subgroups of infinite symmetric groups*, Journal of the London Mathematical Society (2) **42** (1990), S. 64–84.

[19] MILDENBERGER, H.; SHELAH, S.: *The relative consistency of* $\mathfrak{g} < \mathrm{cf}(\mathrm{Sym}(\omega))$, erscheint im Journal of Symbolic Logic.

[20] SCHREIER, J.; ULAM, S.: *ber die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge*, Studia Mathematica **4** (1933), S. 134–141.

[21] SCOTT, W. R.: *Group theory*, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1964.

[22] SHARP, J. D.; THOMAS S.: *Uniformization problems and the cofinality of the infinite symmetric group*, Notre Dame Journal of Formal Logic **35** (1994), S. 328–345.

[23] Sharp, J. D.; Thomas S.: *Some questions concering the cofinality of* Sym(κ), Journal of Symbolic Logic **60** (1995), S. 892–897.

[24] Sharp, J. D.; Thomas S.: *Unbounded families and the cofinality of the infinite symmetric group*, Archive for Mathematical Logic **34** (1995), S. 33–45.

[25] Shelah, S.: *First–order theory of permutation groups*, Israel Journal of Mathematics **14** (1973), S. 149–162.
Errata: Israel Journal of Mathematics **15** (1973), S. 437–441.

[26] Shelah, S.; Thomas S.: *The cofinality spectrum of the infinite symmetric group*, Journal of Symbolic Logic **62** (1997), S. 902–916.

[27] Thomas, S.: *Aspects of infinite symmetric groups*, in: Corson, J. M. et al. (Hrsg.): Infinite groups and group rings. Proceedings of the AMS special session, Tuscaloosa 1992, Series in Algebra, World Scienctific, Singapore 1993, S. 139–145.

[28] Thomas, S.: *The cofinalities of the infinite dimensional classical groups*, Journal of Algebra **179** (1996), S. 704–719.

[29] Thomas, S.: *Cofinalities of infinite permutation groups*, in: Droste, M.; Göbel, R. (Hrsg.): Advances in algebra and model theory, Selected surveys presented at conferences in Essen 1994 and Dresden 1995, Algebra, logic and applications series **9**, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 1997, S. 101–120.

[30] Thomas, S.: *Groupwise density and the cofinality of the infinite symmetric group*, Archive for Mathematical Logic **37** (1998), S. 483–493.

[31] Warner, S.: *The cofinality of the random graph*, Journal of Symbolic Logic **66** (2001), S. 1439–1446.

[32] Wielandt, H.: *Unendliche Permutationsgruppen*, Skriptum zur Vorlesung am Mathematischen Institut der Universität Tübingen im Wintersemester 1959/60 und am Department of Mathematics der York University Toronto 1967,
Nachdruck in: Wielandt, H.: Mathematische Werke/Mathematical works, Band 1, Walter de Gruyter, Berlin 1994, S. 199–235.

Lebenslauf

26. Juni 1971	geboren in Spaichingen (Kreis Tuttlingen) als Sohn von Kurt Schatz und Rita Schatz, geb. Kudermann
1978 - 1982	Besuch der Schildrain–Steigen–Grundschule in Tuttlingen
1982 - 1991	Besuch des Immanuel–Kant–Gymnasiums in Tuttlingen
Juni 1991	Abitur
Juli 1991 - Sept. 1992	Zivildienst bei der Arbeiterwohlfahrt Tuttlingen
Okt. 1992 - Mai 1999	Studium der Mathematik und der Politikwissenschaft an der Universität Tübingen
Jan. 1995 - Mai 1999	Stipendium der Friedrich–Ebert–Stiftung
Febr. - Juli 1995	Auslandsaufenthalt an der Universität Valencia
Okt. 1998	Staatsexamen in Mathematik
seit Dez. 1998	verheiratet mit Heike Steinwand–Schatz
April 1999	Staatsexamen in Politikwissenschaft
seit Juni 1999	Doktorand an der Mathematischen Fakultät der Universität Tübingen
Juli 1999 - April 2000	Promotionsstipendium der Friedrich–Ebert–Stiftung
seit Mai 2000	Wissenschaflicher Angestellter an der Mathematischen Fakultät der Universität Tübingen

Meine akademischen Lehrer waren

in Mathematik:

G. Betsch, U. Felgner, P. Hauck, H. Heyer, M. J. Iranzo Aznar, W. Kaup, W. Knapp, M. Mathieu, R. Nagel, G. Turnwald, M. Voit, M. Wolff, H. Yserentant,

in Politikwissenschaft:

M. Beck, M. Hörmann, R. Hrbek, T. Nielebock, P. Pawelka, V. Rittberger, W. Schumann, R. Steiert.