Zur Regularität des inversen mittleren Krümmungsflusses

Dissertation

der Mathematischen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität Tübingen zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Mirjam Elisabeth Heidusch
geb. Wisskirchen

aus Stommeln bei Köln

betreut von

Prof. Dr. Gerhard Huisken

im September 2001

Tag der mündlichen Qualifikation: 26. Oktober 2001
Dekan: Prof. Dr. Christian Lubich
1. Berichterstatter: Prof. Dr. Gerhard Huisken
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Kaul

Für Heiko

Mein Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Gerhard Huisken, den Mitarbeitern des Arbeitsbereiches Analysis sowie allen Doktoranden des mathematischen Institutes, die um 11:45h in die Mensa gehen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Geometrische Objekte werden in vielen Teilgebieten der Mathematik beschrieben und untersucht. So werden sie in der algebraischen Geometrie als Nullstellengebilde eines Polynoms dargestellt, die Differentialgeometrie beschreibt sie durch Funktionen und bedient sich zu ihrer Untersuchung der Methoden der Analysis. Mit Hilfe der Differentialrechnung lassen sich Krümmungsbegriffe von Kurven, Flächen und höherdimensionalen Objekten definieren und berechnen.

Neben der Geometrie im n-dimensionalen euklidischen Raum wird auch die einer Mannigfaltigkeit untersucht. Eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* kann lokal, d.h. in kleinen Ausschnitten, und im Allgemeinen nur verzerrt auf den $\mathbf{R}^n$ abgebildet werden. In diesen lokalen Abbildungsfunktionen, Karten genannt, steckt die Information darüber, wie sich die Geometrie der Mannigfaltigkeit von der des $\mathbf{R}^n$ unterscheidet. Ein Beispiel ist eine zweidimensionale Sphäre, etwa die Oberfläche der Erde. Sie scheint uns lokal flach, d.h. eine Ebene zu sein. Es ist jedoch nicht möglich, auch nur in kleinen Ausschnitten eine längen- und winkeltreue Karte zu zeichnen. Ein weiteres Beispiel ist der Raum um einen schweren Stern oder ein schwarzes Loch, wie er in der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben wird. Aus unserer euklidischen Sicht bewegen sich Lichtstrahlen in der Nähe des Sterns auf gekrümmten Bahnen. Diese sind jedoch "Geraden", so genannte Geodäten, in der Geometrie der beschreibenden Mannigfaltigkeit.

Partielle Differentialgleichungen haben ihren Ursprung in der Physik, in der sie statische und dynamische Prozesse beschreiben. Beispiele sind etwa die Poisson-Gleichung zur Bestimmung des Potentials zu einer vorgegebenen Massen- bzw Ladungsverteilung, die Schwingungsgleichung eines Pendels oder die Wärmeleitungsgleichung, die die Ausbreitung von Wärme modelliert. Allein aus den Eigenschaften der Differentialgleichung und ohne die Lösung konkret anzugeben werden Aussagen über Existenz und Gestalt einer Lösung bewiesen. So folgt aus dem parabolischen Maximumprinzip, dass sich Wärme im Innern eines Gebietes nicht sammeln kann.

In geometrischen Evolutionsgleichugen verbinden sich die Methoden von partiellen Differentialgleichungen und Differentialgeometrie. Eine partielle Differentialgleichung beschreibt die Bewegnung einer Fläche im euklidischen Raum oder einer Mannigfaltigkeit. Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit bestimmen sich dabei aus der momentanen Geometrie der Fläche. In dieser Arbeit werden Regularitätsergebnisse für den so genannten inversen mittleren Krümmungsfluss gezeigt. Darunter versteht man Aussagen darüber, ob Schranken an die Krümmung und deren Ableitungen der sich bewegenden Fläche gefunden werden können oder ob sich Knicke ausbilden, die einer unendlichen Krümmung entsprechen.

Der folgende Abschnitt formuliert das hier Beschriebene mathematisch und gibt einen Überblick über bereits bekannte Ergebnisse. Zudem wird die Bedeutung des inversen mittleren Krümmungsflusses in der Allgemeinen Relativitätstheorie erleutert.

1.1 Hintergrund

Geometrische Evolutionsgleichungen sind seit über zwanzig Jahren Gegenstand intensiver mathematischer Forschung. Untersucht werden nichtlineare parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(p,t) &= f \cdot \nu(p,t)\,, \qquad p \in N^{n-1}, \quad t \in [0,T) \\ F(p,0) &= F_0(p)\,, \qquad p \in N^{n-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit $F : N^{n-1} \times [0,T) \to (M^n, \bar{g})$. Dabei ist $(M^n, \bar{g})$, $n \geqslant 2$ eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit und durch $N_t^{n-1} = F(\cdot,t)(N^{n-1})$ wird eine glatte Familie von Hyperflächen definiert, die sich in Richtung ihrer äußeren Normalen $\nu(p,t)$ bewegen. Die Geschwindigkeit bestimmt sich durch eine homogene symmetrische Funktion $f(p,t)$ der Hauptkrümmungen der Fläche N_t^{n-1} im Punkt $F(p,t)$.
Beispiele für (1.1) sind der mittlere Krümmungsfluss mit $f = -H = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1})$ (MCF, *mean curvature flow*), der Gauß'sche Krümmungsfluss für $f = -K = -(\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1})$ oder der harmonische mittlere Krümmungsfluss mit $f = -(\lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_{n-1}^{-1})^{-1}$. Gegenstand dieser Arbeit ist der inverse mittlere Krümmungsfluss (IMCF, *inverse mean curvature flow*), bei dem $f = \frac{1}{H}$ für $H > 0$ untersucht wird. Einen allgemeinen Überblick über geometrische Evolutionsgleichungen geben [HP96] und [Hu01].

Eine der ersten Fragen bei der Behandlung einer geometrischen Evolutionsgleichung betrifft die Kurzzeitexistenz ihrer Lösungen, die unter den Voraussetzungen des folgenden Theorems [HP96] gesichert ist.

Theorem 1.1 *Sei $F_0 : N^{n-1} \to (M^n, \bar{g})$ eine glatte, geschlossene Hyperfläche mit*

$$-\frac{\partial f}{\partial \lambda^i}(p) > 0\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

auf $F_0(N^{n-1})$. Dann hat (1.1) eine glatte Lösung auf einem nichtleeren Zeitintervall $[0,T)$ mit $T > 0$.

Im Fall des IMCF gilt $-\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda^i}\right) = H^{-2}$. Für glatte Anfangsdaten mit $H > 0$ existiert somit eine Lösung zumindest für eine kurze Zeit.

Lässt man eine Sphäre unter dem IMCF nach außen fließen, so nimmt ihr Radius exponentiell zu. Bei beliebigen Lösungen spiegelt sich dies in der Evolution des Fächeninhaltes wider, für den

$$\frac{\partial}{\partial t}|N_t| = |N_t|$$

und damit

$$|N_t| = |N_0| \cdot e^t \tag{1.2}$$

gilt.
Der MCF dagegen lässt eine geschlossene, gleichmäßig konvexe Hyperfläche im $\mathbf{R}^n$ in endlicher Zeit zu einem Punkt zusammenschrumpfen [Hu84]. Die Evolutionsgleichung für das Volumenelement

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_t = -H^2\mu_t$$

zeigt, dass der Flächeninhalt unter dem MCF kontinuierlich abnimmt.
Dieses Verhalten veranschaulicht die Entstehung von Singularitäten. Im einfachen Bild fließen die Flächen unter dem IMCF nach außen, sie werden immer flacher und der Fluss bricht zusammen, wenn in einem Punkt $H = 0$ erreicht wird. Das Beispiel des Torus im $\mathbf{R}^n$ zeigt, dass dies ohne zusätzliche geometrische Voraussetzungen in endlicher Zeit passiert. Beim MCF dagegen krümmen sich die Flächen immer mehr und Singularitäten entstehen dadurch, dass die Krümmung divergiert.
Wie die Anschauung vermuten lässt existiert beim IMCF eine obere Schranke an die mittlere Krümmung, die allein von den Anfangswerten abhängt. Diese folgt mit Hilfe des Maximumprinzips aus der Evolutionsgleichung für H. Eine innere Abschätzung (Satz 2.5) zeigt sogar, dass H im Fall $M = \mathbf{R}^n$ wie $1/r$ abfällt, wobei r der Abstand zur Anfangsfläche ist.

Die Flächen N_t des IMCF lassen sich als Niveauflächen einer Funktion $u : M \to \mathbf{R}$ auffassen, die einer degeneriert elliptischen Gleichung genügt

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u| \tag{1.3}$$

Dabei beschreibt die linke Seite von (1.3) die mittlere Krümmung der Niveauflächen, die rechte Seite das Inverse der Geschwindigkeit. Gleichung (1.3) kann als Euler-Lagrange-Gleichung eines Funktionals $J_u(v)$ gesehen werden. Dieses ist Ausgangspunkt für eine schwache Formulierung des IMCF [HI98], in der $J_u(v)$ in $C^{0,1}_{loc}$ minimiert wird.

Die Lösung von (1.3) und des schwachen Problems basiert auf elliptischer Regularisierung, d.h. es werden Lösungen des elliptischen Problems

$$\operatorname{div}\left(\frac{u^\varepsilon}{\sqrt{|\nabla u^\varepsilon| + \varepsilon^2}}\right) = \sqrt{|\nabla u^\varepsilon| + \varepsilon^2} \tag{1.4}$$

gesucht. Diese konvergieren für $\varepsilon \to 0$ lokal gleichmäßig gegen das gesuchte u. Somit ist das Problem auf ein rein elliptisches zurückgeführt, auf das sich die Methoden der klassischen elliptischen Theorie [GT] anwenden lassen.

Zudem beschreibt (1.4) auch selber wieder eine glatte Lösung des IMCF. So erfüllen

$$U^\varepsilon(x,z) = u^\varepsilon(x) - \varepsilon z$$

(1.3) in $M \times \mathbf{R}$, d.h. die Flächen $N_t^\varepsilon = \{U^\varepsilon = t\}$ translatieren unter dem IMCF. Damit stehen für die Untersuchung der Funktionen u^ε auch parabolische Methoden zur Verfügung.
Die schwache Formulierung erlaubt Sprünge über Gebiete endlichen Maßes, die durch die Flächen $N_t = \partial\{u < t\}$ und $N_t^+ = \partial\,\mathrm{int}\{u \leqslant t\}$ begrenzt sind. Eine Umformulierung in der Sprache der geometrischen Maßtheorie zeigt, dass die Flächen einer *minimizing hull property* genügen. Anschaulich gesprochen springt der Fluss immer dann, wenn dadurch bei gleichbleibender Oberfläche zusätzliches Volumen eingeschlossen werden kann. Zwischen solchen Sprüngen bewegen sich die Flächen unter dem klassischen Fluss.

Basierend auf analytischen Ergebnissen wurden geometrische Evolutionsgleichungen numerisch untersucht und visualisiert. Im Fall des MCF und IMCF wurde dies von Pasch [Pa97], [Pa98] durchgeführt. Bilder für den schwachen IMCF zeigen eindrücklich die Enstehung von Singularitäten und den Sprung über solche hinweg. So springt der Torus im $\mathbf{R}^3$ zu einer Sphäre, bevor am inneren Rand $H = 0$ erreicht wird. Ein anderes Beispiel sind zwei zunächst getrennte Sphären im $\mathbf{R}^3$, die sich unter dem klassischen Fluss nach endlicher Zeit berühren würden. Durch den schwachen Fluss werden sie vorher durch ein Katenoid verbunden.

Physikalisch ist der IMCF durch die so genannte *Geroch-Monotonie* (1.5) [G73] motiviert. Für eine geschlossene Fläche N^2 in einer beliebigen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $(M^3, \bar{g})$ mit $\bar{R} \geqslant 0$ ist die *Hawking quasi local mass* von N^2 durch die geometrische Größe

$$m_H(N) = \frac{|N|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_N H^2 d\mu\right)$$

definiert. Aus den Evolutionsgleichungen für die mittlere Krümmung und das Volumenelement, den Gauß-Gleichungen sowie der Formel von Gauß-Bonnet folgt für eine glatte Lösung $(N_t^2)_{t\geqslant 0}$ des IMCF

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{N_t} H^2 = \int_{N_t} -\frac{2}{H^2}|\nabla H|^2 - |A|^2 - \bar{R} + R \leqslant \frac{1}{2}\left(8\pi\chi(N_t) - \int_{N_t} H^2\right)$$

Ist N_t^2 zusammenhängend, so erhält man aus (1.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} m_H(N_t^2) \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Eine dreidimensionle Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M^3, \bar{g})$ heißt *asymptotisch flach*, falls $M = C \cup M_1 \ldots \cup M_k$ mit C kompakt und jedes Ende M_i diffeomorph zu $\mathbf{R}^3 \setminus \bar{B}^3_{\sigma_i}(0)$ ist. Für die Metrik auf jedem M_i soll zudem gelten

$$|\bar{g}_{ij} - \delta_{ij}| \leqslant \frac{C}{|x|}\,, \qquad |\bar{g}_{ij,k}| \leqslant \frac{C}{|x|^2}\,, \qquad \bar{R}ic \geqslant -\frac{C\bar{g}}{|x|^2}$$

für $|x| \to \infty$. Die Ableitung sind dabei bezüglich der Euklidischen Metrik δ_{ij} zu berechnen. Für jedes Ende M_i ist die *ADM-Masse* [ADM] definiert durch ein Flussintegral durch eine Sphäre im Unendlichen

$$m_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \int_{\infty} (\bar{g}_{ii,j} - \bar{g}_{ij,i}) \nu^j d\mu$$

In einem mathematischen Raumzeitmodell wird der räumliche Teil außerhalb eines isolierten Gravitationssystems (z.B. eines Sterns oder eines schwarzen Lochs) durch ein Ende einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit $(M^3, \bar{g})$ mit $\bar{R} \geqslant 0$ beschrieben. Physikalisch misst m_{ADM} dann sowohl die Materie als auch die Gravitationsenergie des isolierten Systems.
Für einen Raum mit *Schwarzschild-Metrik* ($M = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, \bar{g} = (1+m_S/2|x|)^4\delta$) stimmen m_{ADM} und $m_H(\partial B_R(0))$ für jede Koordinatensphäre $\partial B_R(0)$ mit der Schwarzschild-Masse m_S überein. Im Allgemeinen gilt für große, approximativ runde Sphären S_R

$$m_H(S_R) \longrightarrow m_{ADM}$$

Der äußere Rand eines schwarzen Loches wird durch eine Minimalfäche $N_0^2 \subset M^3$ beschrieben ($N_0 = \partial B_{m_s/2}(0)$ im Schwarzschild-Fall). Gäbe es eine glatte Lösung $(N_t)_{t \geqslant 0}$ des IMCF mit Anfangsfläche N_0 und $m_H(N_t) \to m_{ADM}$, so würde aus der Geroch-Monotonie folgen

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}} |N_0|^{\frac{1}{2}} = m_H(N_0) \leqslant m_{ADM}$$

Dies ist ein Spezialfall der *Riemannschen Penrose Ungleichung*, Theorem 1.2, wie sie in [HI98] bewiesen wird. Die Idee für diesen Beweisansatz stammt von Geroch [G73] und Jang, Wald [JW77].

Theorem 1.2 *Sei $(M, \bar{g})$ eine vollständige, zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit und gelte zudem*

(i) M hat nichtnegative skalare Krümmung.

(ii) M ist asymptotisch flach mit ADM-Masse m.

(iii) ∂M ist kompakt und besteht aus Minimalflächen, und M enthält keine weitere kompakte Minimalfläche.

Dann gilt $m \geqslant 0$ und

$$16\pi m^2 \geqslant |N|\,,$$

wobei N eine zusammenhängende Komponente von ∂M ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn M eine Hälfte der räumlichen Schwarzschild Mannigfaltigkeit ist.

In ihrem Beweis verwenden Huisken und Ilmanen schwache Lösungen des IMCF. Die beiden Hauptschritte sind die Erhaltung der Geroch-Monotonie unter dem schwachen Fluss sowie $\lim_{t\to\infty} m_H(N_t) \leqslant m_{ADM}$. Für einen ausführlichen Überblick über den Beweis siehe [HI97].

1.2 Resultate

Die vorliegende Arbeit zeigt im Wesentlichen zwei Regularitätsergebnisse für den IMCF. Zum einen wird eine innere Abschätzung für die Krümmung $|A|$ einer glatten Lösung unter Voraussetzung lokaler Sternförmigkeit der Flächen N_t gezeigt (Theorem 3.6 bzw. 5.1). Dabei ist im Fall einer beliebigen Hintergrundmannigfaltigkeit M mit lokaler Sternförmigkeit die Existenz eines Vektorfeldes X gemeint, für das lokal $\langle X, \nu\rangle$ durch positive Konstanten nach oben und unten beschränkt werden kann. Der Beweis beruht auf der Argumentation des parabolischen Maximumprinzips. Die Idee ist es, an Stelle von $|A|$ eine glatte Approximation des größten Eigenwertes zu betrachten. Die richtige Kombination mit $\langle X, \nu\rangle^{-1}$ liefert eine Evolutionsgleichung, die für ein Maximumprinzip geeignet ist. Wie im Beweis der Langzeitexistenz im Fall einer sternförmigen kompakten Anfangsfläche von Gerhardt [Ge90] bzw. Urbas [Ur90] zeigt sich auch hier die fundamentale Bedeutung der Größe $\langle X, \nu\rangle$.

Das zweite Ergebnis bezieht sich auf die Flächen N_t und N_t^+ einer schwachen Lösung, die im Fall $n < 8$ von der Klasse $C^{1,\alpha}$ sind [HI98]. Aufgrund der erwähnten *minimizing hull property* erwartet man sogar $C^{1,1}$-Regularität. Höhere Regulariät wird durch das Beispiel des Torus im $\mathbf{R}^3$ ausgeschlossen. Diese Vermutung wird für den Fall $n < 7$ bzw. geeignete Voraussetzungen bewiesen (Theorem 4.13 bzw. 5.5). Die Idee ist, mit Hilfe der oben genannten Krümmungsabschätzung lokal gleichmäßige C^2-Schranken für die Flächen $\{U^\varepsilon = t\}$ zu finden und auszunutzen, dass diese - anschaulich gesprochen - gegen die Flächen $N_t \times \mathbf{R}$ konvergieren.

Nach Einführung der Notation und Beweis einiger grundlegender Identitäten für Hyperflächen in Abschnitt 1.3 folgt in Kapitel 2 eine Darstellung der wesentlichen Eigenschaften des klassischen IMCF. Neben den Evolutiongleichungen der verschiedenen geometrischen Größen umfasst dies insbesondere die obere Schranke an H.

Die Beweise der beiden Haupttheoreme werden zunächst nur für den Fall $M = \mathbf{R}^n$ geführt. Da alle Aussagen von lokaler Natur sind, werden hier bereits die wesentlichen Ideen deutlich, ohne von der Schwierigkeit einer beliebigen Mannigfaltigkeit überdeckt zu werden. In Kapitel 3 wird die innere $|A|^2$-Schranke (Theorem 3.6) bewiesen. Die Hauptarbeit steckt dabei in der Berechnung der Evolutionsgleichung. In einigen vorangestellten technischen Grundlagen wird eine glatte Approximation an den größten Eigenwert von A definiert und untersucht. Zudem enthält dieser Abschnitt das grundlegende mathematische Lemma dafür, wann ein Ausdruck wahlweise als Funktion einer selbstadjungierten Matrix bzw. deren Eigenwerten aufgefasst werden kann.

Die ersten Abschnitte von Kapitel 4 fassen die Ergebnisse aus [HI98] über schwache Lösungen zusammen. Um Theorem 3.6 auf die Flächen $\{U^\varepsilon = t\}$ anwenden zu können, benötigt man deren lokale Sternförmigkeit. Das Argument ist rein geometrisch und verwendet lediglich, dass es sich um eine Familie von lokal gleichmäßigen $C^{1,\alpha}$-Flächen handelt, die sich nicht schneiden. Die $C^{1,\alpha}$-Schranke hindert die Normalen daran, zu weit auseinander zu kippen. Theorem 4.13 enthält die lokal gleichmäßige $C^{1,1}$-Regularität der Flächen N_t und N_t^+ unter Voraussetzungen, die im Fall $n < 7$ stets erfüllt sind (Korollar 4.14).

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse aus den Kapiteln 3 und 4 auf eine beliebige Hintergrundmannigfaltigkeit M verallgemeinert. Dabei wird über Normalkoordinaten die Mannigfaltigkeit M im $\mathbf{R}^n$ betrachtet, wo sich die Beweise im Wesentlichen übertragen lassen. Alle zusätzlichen Terme hängen von der Exponentialabbildung und damit von der umgebenden Mannigfaltigkeit ab.

1.3 Notation und Grundlagen

Sei M^n, $n \geqslant 2$ eine n-dimensionale glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik $\bar{g} = (\bar{g}_{\alpha\beta})$, Zusammenhang $\bar{\Gamma}$, kovarianter Ableitung $\bar{\nabla}$ und Riemann-Tensor $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Eine glatte $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche N^{n-1} sei durch eine Immersion

$$F : N^{n-1} \longrightarrow M^n$$

definiert. Auf N^{n-1} wird eine Metrik $g = (g_{ij})$ induziert, die für $X, Y \in T_pN^{n-1}$ gegeben ist durch

$$g(X,Y) = \bar{g}\left(d_pF(X), d_pF(Y)\right)$$

In lokalen Koordinaten $\{x^i\}$ auf N^{n-1} und $\{y^\alpha\}$ auf M^n bedeutet dies

$$g_{ij}(p) = \bar{g}_{\alpha\beta}\left(F(p)\right) \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}(p) \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j}(p)$$

Hier und im Folgenden laufen lateinische Indizes $i, j, k \ldots$ von 1 bis $n-1$, griechische Indizes $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ von 0 bis $n-1$. Über die Metrik sind auf N^{n-1} der Levi-Civita-Zusammenhang Γ, die kovariante Ableitung ∇ sowie der Riemann-Tensor R_{ijkl} definiert.

$e_0, \ldots, e_{n-1}$ sei ein orthonormales n-Bein, wobei $e_0 = \nu$ eine Normale an N^{n-1} ist. Die zweite Fundamentalform auf N^{n-1} ist dann gegeben durch

$$h_{ij}(p) = \langle \bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j \rangle = -\langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i} e_j \rangle \tag{1.6}$$

und die Weingartenabbildung $W_p : T_pN^{n-1} \to T_pN^{n-1}$ durch $h^i_k = g^{ik}h_{kj}$. Die Hauptkrümmungen von N^{n-1} im Punkt p, d.h. die Eigenwerte von W_p, seien mit $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_{n-1}(p)$ bezeichnet. Die mittlere Kümmung ist dann $H = h^i_i = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}$.
In lokalen Koordinaten ist (1.6) äquivalent zu den Weingarten-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} &= -h_{ij}\nu^\alpha \\ \frac{\partial \nu^\alpha}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\nu^\gamma &= h_{ij}g^{jl}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} \end{aligned}$$

Die Norm eines Tensors T^k_{ij} auf N^{n-1} ist definiert durch

$$|T|^2 = \langle T, T \rangle = g^{ip}g^{jq}g_{ks}T^k_{ij}T^s_{pq}$$

Das Quadrat der zweiten Fundamentalform ist dann $|A|^2 = g^{ip}g^{jq}h_{ij}h_{pq} = h^i_j h^j_i$.
Für die Vertauschung zweiter kovarianter Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} \nabla_i\nabla_j X^k - \nabla_j\nabla_i X^k &= R_{ijlm}g^{kl}X^m \\ \nabla_i\nabla_j\omega_k - \nabla_j\nabla_i\omega_k &= R_{ijkl}g^{lm}\omega_m \end{aligned}$$

Zudem gelten die *Gaußgleichungen*

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$$

sowie die Gleichungen von *Codazzi-Mainardi*

$$\nabla_i h_{jk} - \nabla_k h_{ij} = \bar{R}_{0jki} \tag{1.7}$$

Theorem 1.3 *Für die zweiten kovarianten Ableitungen von A gilt*

$$\begin{aligned} \nabla_k\nabla_l h_{ij} = \nabla_i\nabla_j h_{kl} &+ h_{kl}h^m_i h_{mj} - h^m_k h_{il}h_{mj} + h_{kj}h^m_i h_{ml} \\ &- h^m_k h_{ij}h_{ml} + \bar{R}_{kilm}h^m_j + \bar{R}_{kijm}h^m_l \\ &+ \bar{R}_{mjil}h^m_k + \bar{R}_{0i0j}h_{kl} - \bar{R}_{0k0l}h_{ij} + \bar{R}_{mljk}h^m_i \\ &+ \bar{\nabla}_k\bar{R}_{0jil} + \bar{\nabla}_i\bar{R}_{0ljk} \end{aligned}$$

Beweis: Nach Codazzi gilt $\nabla_k\nabla_l h_{ij} = \nabla_k(\nabla_i h_{lj} + \bar{R}_{0jil})$
und aus der Definition von h_{ij} folgt

$$\nabla_k(\bar{R}_{0jil}) = \bar{\nabla}_k\bar{R}_{0jil} + h^m_k\bar{R}_{mjil} - h_{ik}\bar{R}_{0j0l} - h_{lk}\bar{R}_{0ji0}$$

Vertauschen der zweiten kovarianten Ableitungen liefert

$$\nabla_k \nabla_i h_{lj} = \nabla_i \nabla_k h_{lj} + R_{kilm} h_j^m + R_{kijm} h_l^m$$

und damit

$$\begin{aligned}\nabla_k \nabla_l h_{ij} = \nabla_i \nabla_k h_{lj} &+ R_{kilm} h_j^m + R_{kijm} h_l^m \\ &+ \bar{\nabla}_k \bar{R}_{0jil} + h_k^m \bar{R}_{mjil} - h_{ik} \bar{R}_{0j0l} - h_{lk} \bar{R}_{0ji0}\end{aligned}$$

Analog findet man

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_k h_{lj} = \nabla_i \nabla_j h_{kl} &+ \bar{\nabla}_i \bar{R}_{0ljk} + h_i^m \bar{R}_{mljk} \\ &- h_{ij} \bar{R}_{0l0k} - h_{ik} \bar{R}_{0lj0}\end{aligned}$$

Mit den Gaußgleichungen und den Symmetrien von $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ folgt die Behauptung.

□

Korollar 1.4 *Für den Laplace $\triangle = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ der zweiten Fundamentalform gilt*

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij} = \nabla_i \nabla_j H &+ H h_i^m h_{mj} - h_{ij} |A|^2 + H \bar{R}_{0i0j} - \bar{R}_{00} h_{ij} \\ &+ \bar{R}^k{}_{ikm} h_j^m + \bar{R}_m{}^k{}_{jk} h_i^m + \bar{R}_{kijm} h^{km} \\ &+ \bar{R}_{mjik} h^{km} + \bar{\nabla}^k \bar{R}_{0jik} + \bar{\nabla}_i \bar{R}_0{}^k{}_{jk}\end{aligned}$$

Das folgende Lemma wurde zuerst von Bartnik [Ba84] für den Lorentz-Fall bewiesen; siehe auch [Ho99]. Es ist entscheidend in der Verallgemeinerung der $|A|^2$-Schranken unter Voraussetzung lokaler Sternförmigkeit auf beliebige Hintergrundmannigfaltigkeiten.

Lemma 1.5 *X sei ein zu N transversales Vektorfeld auf M. Dann gilt für $\beta = \langle X, \nu \rangle$*

$$\triangle \beta = -\beta(|A|^2 + \bar{R}ic(\nu, \nu)) + \langle X, \nabla H \rangle - X(H_X)$$

Dabei bezeichnet $X(H_X)$ die Variation der mittleren Krümmung von N unter dem Deformationsvektorfeld X. Mit Hilfe des Killing Tensors $\mathcal{L}_X \bar{g}(V, W) = \langle \bar{\nabla}_V X, W \rangle + \langle V, \bar{\nabla}_W X \rangle$ findet man

$$\begin{aligned}X(H_X) = \frac{1}{2} g^{ij} \bar{\nabla}_\nu (\mathcal{L}_X \bar{g})(e_i, e_j) &- g^{ij} \bar{\nabla}_{e_i} (\mathcal{L}_X \bar{g})(\nu, e_j) \\ &- h^{ij} \mathcal{L}_X \bar{g}(e_i, e_j) + \frac{1}{2} H \mathcal{L}_X \bar{g}(\nu, \nu)\end{aligned}$$

Beweis: Sei $p \in N$ fest. Betrachte ein orthonormales $(n-1)$-Bein $\{e_i\}$ mit $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$. $\varphi_s : U \to M$ sei der lokale Fluss zu X um p. Setze $\{e_i\}$ zu Vektorfeldern auf U fort durch

$$e_i(\varphi_s(q)) = d_q \varphi_s(e_i(q))$$

Dann ist $\{e_i\}$ tangentiales $(n-1)$-Bein an $\varphi_s(N)$ und es gilt

$$[X, e_i] = \bar{\nabla}_X e_i - \bar{\nabla}_{e_i} X = 0$$

Damit erhält man im Punkt p

$$\begin{aligned}
\triangle\langle X, \nu\rangle &= g^{ij}\nabla_{e_i}\{\langle\bar{\nabla}_X e_j, \nu\rangle + h_j^k\langle X, e_k\rangle\} \\
&= -\beta|A|^2 + g^{ij}\{\langle\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_X e_j, \nu\rangle + 2h_j^k\langle\bar{\nabla}_X e_i, e_k\rangle + e_i(h_j^k)\langle X, e_k\rangle\} \\
&= -\beta|A|^2 - \bar{R}ic(X, \nu) \\
&\qquad + g^{ij}\{\langle\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_{e_i} e_j, \nu\rangle + h_j^k X(g_{ik}) + e_i(h_j^k)\langle X, e_k\rangle\} \\
&= -\beta|A|^2 - \bar{R}ic(X, \nu) - h_{ij}X(g^{ij}) \\
&\qquad + g^{ij}\{X\langle\bar{\nabla}_{e_i} e_j, \nu\rangle - \langle\bar{\nabla}_{e_i} e_j, \bar{\nabla}_X\nu\rangle + e_i(h_j^k)\langle X, e_k\rangle\}
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$g^{ij}\langle\bar{\nabla}_{e_i} e_j, \bar{\nabla}_X\nu\rangle = -H\langle\nu, \bar{\nabla}_X\nu\rangle = -\frac{1}{2}HX\langle\nu, \nu\rangle = 0$$

und daher auch

$$\begin{aligned}
g^{ij}e_i(h_j^k)\langle X, e_k\rangle &= g^{ij}g^{kl}\nabla_{e_i}\langle e_j, \bar{\nabla}_{e_l}\nu\rangle\langle X, e_k\rangle \\
&= g^{ij}g^{kl}\{-h_{ij}h_l^p\langle\nu, e_p\rangle + \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_l}\bar{\nabla}_{e_i}\nu\rangle + \langle\bar{R}(e_i, e_l)\nu, e_j\rangle\}\langle X, e_k\rangle \\
&= g^{ij}g^{kl}\{\nabla_{e_l}\langle e_j, \bar{\nabla}_{e_i}\nu\rangle - \langle\bar{\nabla}_{e_l} e_j, \bar{\nabla}_{e_i}\nu\rangle + \langle\bar{R}(e_i, e_l)\nu, e_j\rangle\}\langle X, e_k\rangle \\
&= \langle\nabla H, X\rangle + \bar{R}ic(X^T, \nu)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\triangle\beta &= -\beta|A|^2 - \bar{R}ic(X, \nu) + \bar{R}ic(X^T, \nu) + \langle\nabla H, X\rangle \\
&\qquad - h_{ij}X(g^{ij}) - g^{ij}X(h_{ij}) \\
&= -(|A|^2 + \bar{R}ic(\nu, \nu))\beta + \langle\nabla H, X\rangle - X(H_X)
\end{aligned}$$

Dies ist der erste Teil der Behauptung.

$$\begin{aligned}
X(H_X) &= -h^{ij}X(g_{ij}) + g^{ij}X(h_{ij}) \\
&= -h^{ij}X\langle e_i, e_j\rangle + g^{ij}X\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j}\nu\rangle \\
&= -h^{ij}(\langle\bar{\nabla}_{e_i}X, e_j\rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j}X\rangle) \\
&\quad + g^{ij}(\langle\bar{\nabla}_X e_i, \bar{\nabla}_{e_j}\nu\rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j}\bar{\nabla}_X\nu\rangle + \langle\bar{R}(X, e_j)\nu, e_i\rangle) \\
&= -h^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i, e_j) + g^{ij}\{\nabla_{e_j}(\langle\bar{\nabla}_X e_i, \nu\rangle + \langle e_i, \bar{\nabla}_X\nu\rangle) \\
&\quad + \langle\bar{R}(X, e_j)\nu, e_i\rangle - \langle\bar{\nabla}_{e_j} e_i, \bar{\nabla}_X\nu\rangle + \langle\bar{\nabla}_X e_i, \bar{\nabla}_{e_j}\nu\rangle - \nabla_{e_j}\langle\bar{\nabla}_X e_i, \nu\rangle\} \\
&= -h^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i, e_j) + g^{ij}\{\nabla_{e_j}(X\langle e_i, \nu\rangle) + \langle\bar{R}(\nu, e_i)X, e_j\rangle \\
&\quad + \langle\bar{\nabla}_X e_i, \bar{\nabla}_{e_j}\nu\rangle - \nabla_{e_j}\langle\bar{\nabla}_X e_i, \nu\rangle\} \\
&= -h^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i, e_j) + g^{ij}\{\langle\bar{\nabla}_\nu(\bar{\nabla}_{e_i}X), e_j\rangle - \langle\bar{\nabla}_{e_i}(\bar{\nabla}_\nu X), e_j\rangle \\
&\quad - \langle\bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_\nu e_i}X, e_j\rangle + \langle\bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{e_i}\nu}X, e_j\rangle + \langle\bar{\nabla}_X e_i, \bar{\nabla}_{e_j}\nu\rangle - \nabla_{e_j}\langle\bar{\nabla}_X e_i, \nu\rangle\}
\end{aligned}$$

Nun gilt

- $h^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i,e_j) = g^{ij}\langle\bar{\nabla}_{e_i}X, \bar{\nabla}_{e_j}\nu\rangle + h^{ij}\langle e_i, \bar{\nabla}_{e_j}X\rangle$
- $g^{ij}\langle\bar{\nabla}_\nu\bar{\nabla}_{e_i}X, e_j\rangle = g^{ij}(\frac{1}{2}\nu(\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i,e_j)) - \langle\bar{\nabla}_{e_i}X, \bar{\nabla}_\nu e_j\rangle)$
- $-\langle\bar{\nabla}_{e_i}\bar{\nabla}_\nu X, e_j\rangle - e_i\langle\bar{\nabla}_{e_j}X, \nu\rangle = -e_i(\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,e_j)) + \langle\bar{\nabla}_\nu X, \bar{\nabla}_{e_i}e_j\rangle$
- $-\langle\bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_\nu e_i}X, e_j\rangle = -\mathcal{L}_X\bar{g}(\bar{\nabla}_\nu e_i, e_j) + \langle\bar{\nabla}_\nu e_i, \bar{\nabla}_{e_j}X\rangle$
- $\langle\bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{e_i}\nu}X, e_j\rangle = h_i^k\langle\bar{\nabla}_{e_k}X, e_j\rangle$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} X(H_X) = &\frac{1}{2}g^{ij}\nu(\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i,e_j)) - g^{ij}e_i(\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,e_j)) \\ &- g^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(\bar{\nabla}_\nu e_i, e_j) + g^{ij}\langle\bar{\nabla}_\nu X, \bar{\nabla}_{e_i}e_j\rangle \end{aligned}$$

Weiter gilt

- $\frac{1}{2}g^{ij}\nu(\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i,e_j)) = \frac{1}{2}g^{ij}\bar{\nabla}_\nu(\mathcal{L}_X\bar{g})(e_i,e_j) + g^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(\bar{\nabla}_\nu e_i, e_j)$
- $g^{ij}\langle\bar{\nabla}_\nu X, \bar{\nabla}_{e_i}e_j\rangle = -\frac{1}{2}H\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,\nu)$
- $-e_i(\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,e_j)) = -\bar{\nabla}_{e_i}(\mathcal{L}_X\bar{g})(\nu,e_j) - \mathcal{L}_X\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i}\nu, e_j) - \mathcal{L}_X\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{e_i}e_j)$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} X(H_X) &= \frac{1}{2}g^{ij}\bar{\nabla}_\nu(\mathcal{L}_X\bar{g})(e_i,e_j) - g^{ij}\bar{\nabla}_{e_i}(\mathcal{L}_X\bar{g})(\nu,e_j) \\ &\quad - g^{ij}h_i^k\mathcal{L}_X\bar{g}(e_k,e_j) + g^{ij}h_{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,\nu) - \frac{1}{2}H\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,\nu) \\ &= \frac{1}{2}g^{ij}\bar{\nabla}_\nu(\mathcal{L}_X\bar{g})(e_i,e_j) - g^{ij}\bar{\nabla}_{e_i}(\mathcal{L}_X\bar{g})(\nu,e_j) \\ &\quad - h^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i,e_j) + \frac{1}{2}H\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,\nu) \end{aligned}$$

$\square$

2 Der inverse mittlere Krümmungsfluss

Zunächst sollen die klassische Formulierung des IMCF und ihre grundlegenden Eigenschaften vorgestellt werden. Dies umfasst die Evolutionsgleichungen verschiedener geometrischer Größen, die Bedeutung der Sternförmigkeit sowie eine innere Abschätzung für die mittlere Krümmung H der Flächen N_t. Die am Ende dieses Abschnittes vorgestellte Niveauflächenformulierung ist der Ausgangspunkt des schwachen Lösungsbegriffs in Kapitel 4.

Sei $(M^n, \bar{g})$ eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqslant 2$.

2.1 Klassische Formulierung

Es sei eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche $N_0 \subset M$ gegeben durch eine glatte Immersion

$$F_0 : N \longrightarrow M$$

Eine klassische Lösung des inversen mittleren Krümmungsflusses mit Anfangsbedingung N_0 ist eine glatte Familie

$$F : N \times [0, T) \longrightarrow M$$

von Hyperflächen $N_t = F(\,\cdot\,, t)(N)$ mit

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{H}\nu \quad \text{und} \quad F(\cdot, 0) = F_0(\cdot)\,, \tag{2.1}$$

für deren mittlere Krümmung $H > 0$ gilt. Dabei ist ν die äußere Normale an die Fläche N_t.

Ist die Startfläche die $(n-1)$-dimensionale Einheitssphäre S^{n-1} in $\mathbf{R}^n$, so sind die Sphären vom Radius

$$R(t) = exp\left(\frac{t}{n-1}\right)$$

eine Lösung von (2.1) und es gilt $T = \infty$. Startet man dagegen mit einem Torus $\mathcal{T} \subset \mathbf{R}^3$, so entsteht am inneren Rand in endlicher Zeit eine Singularität, d.h. es gilt dort $H \to 0$ für $t \to T < \infty$.

Evolutionsgleichungen

Aus der Evolutionsgleichung der Flächen N_t folgen solche für ihre geometrischen Größen. Diese sind in Satz 2.1 zusammengestellt.

Satz 2.1 *Es gilt*

(i) $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{2}{H} h_{ij}$

(ii) $\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -\frac{2}{H} h^{ij}$

(iii) $\frac{\partial}{\partial t} \nu = -\nabla \frac{1}{H} = \frac{1}{H^2} \nabla H$

(iv) $\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = -\frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H + \frac{1}{H^2} \nabla_i \nabla_j H + \frac{1}{H} h_i^m h_{mj} - \frac{1}{H} \bar{R}_{i0j0}$

(v) $\frac{\partial}{\partial t} h_j^i = -\frac{2}{H^3} \nabla^i H \nabla_j H + \frac{1}{H^2} \nabla^i \nabla_j H - \frac{1}{H} h_i^m h_m^j - \frac{1}{H} \bar{R}^i{}_{0j0}$

(vi) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2} \triangle\right) H = -\frac{2}{H^3} |\nabla H|^2 - \frac{1}{H} (|A|^2 + \bar{R}_{00})$

Beweis: Rechne in Normalkoordinaten $\{x^i\}$ und $\{y^\alpha\}$.
(i)

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^j} \rangle = \frac{1}{H} \left(\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \nu, \frac{\partial F}{\partial x^j} \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \nu \rangle \right) = \frac{2}{H} h_{ij}$$

(ii) Folgt direkt aus $\delta_j^i = g^{ik} g_{kj}$.
(iii)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \nu, \nu \rangle = 2 \langle \frac{\partial}{\partial t} \nu, \nu \rangle \qquad \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \nu &= g^{ij} \langle \frac{\partial}{\partial t} \nu, \frac{\partial F}{\partial x^i} \rangle \frac{\partial F}{\partial x^j} = -g^{ij} \langle \nu, \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x^i} \rangle \frac{\partial F}{\partial x^j} \\ &= -g^{ij} \langle \nu, \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{H} \nu \right) \rangle \frac{\partial F}{\partial x^j} = -\nabla \frac{1}{H} \end{aligned}$$

(iv) Aus den Weingarten-Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \rangle + \Gamma_{ij}^k \langle \frac{\partial F}{\partial x^k}, \nu \rangle - \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \nu^\beta \right\} \\ &= -\langle \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{1}{H} \nu \right), \nu \rangle - \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \nu^\beta \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \frac{1}{H} - \frac{1}{H} \langle \frac{\partial}{\partial x^i} \left(h_{jk} g^{km} \frac{\partial F}{\partial x^m} - \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} \nu^\delta \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right), \nu \rangle \\ &\quad - \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \nu^\sigma \nu^\beta \\ &= -\nabla_i \nabla_j \frac{1}{H} - \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{1}{H} h_{jk} g^{km} \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^m} \nu^\beta + \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\sigma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} \nu^\delta \nu^\beta \\ &\quad - \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \nu^\sigma \nu^\beta \\ &= -\frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H + \frac{1}{H^2} \nabla_i \nabla_j H + \frac{1}{H} h_{im} h_j^m - \frac{1}{H} \bar{R}_{i0j0} \end{aligned}$$

(v) Folgt aus $h_j^i = g^{ip} h_{pj}$.
(vi) Verwende $H = h_i^i$ und (iv). □

Zusammen mit Korollar 1.4 erhält man

Korollar 2.2

$$(i)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)h_{ij}=-\frac{2}{H^3}\nabla_i H\nabla_j H+\frac{1}{H^2}h_{ij}(|A|^2+\bar{R}_{00})-\frac{2}{H}\bar{R}_{i0j0}$$
$$-\frac{2}{H^2}h^{km}\bar{R}_{kijm}-\frac{1}{H^2}(h_j^m\bar{R}^k_{\ ikm}+h_i^m\bar{R}_{m\ jk}^{\ k}+\bar{\nabla}^k\bar{R}_{0jik}+\bar{\nabla}_i\bar{R}_{0\ jk}^{\ k})$$
$$(ii)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)h^i_j=-\frac{2}{H^3}\nabla^i H\nabla_j H+\frac{1}{H^2}h^i_j(|A|^2+\bar{R}_{00})-\frac{2}{H}h^i_p h^p_j$$
$$-\frac{2}{H}\bar{R}^i_{\ 0j0}-\frac{2}{H^2}h^{km}\bar{R}_{k\ jm}^{\ i}$$
$$-\frac{1}{H^2}(h_j^m\bar{R}^{ki}_{\ \ km}+h^{im}\bar{R}_{m\ jk}^{\ k}+\bar{\nabla}_k\bar{R}_{0j}^{\ \ ik}+\bar{\nabla}^i\bar{R}_{0\ jk}^{\ k})$$

Sternförmigkeit

Eine zentrale Eigenschaft des IMCF ist die Erhaltung der Sternförmigkeit. Eine kompakte Hyperfläche $N\subset\mathbf{R}^n$ ohne Rand heißt *sternförmig bezüglich* $x_0\in\boldsymbol{R}^n$, falls

$$\beta=\langle x-x_0,\nu\rangle>0\qquad\text{für}\quad x\in N$$

Dabei ist ν die äußere Normale an N. Es kann o.B.d.A $x_0=0$ angenommen werden.

Ist $(N_t)_{t\geqslant 0}$ eine glatte Lösung des IMCF im $\mathbf{R}^n$, so genügt β folgender Evolutionsgleichung (siehe Lemma 3.1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)\beta=\frac{|A|^2}{H^2}\beta$$

Aus dem Maximumprinzip [PW] folgt damit, dass $\beta\geqslant\min_N\beta>0$ unter dem IMCF erhalten bleibt.
Gerhardt [Ge90] und Urbas [Ur90] beweisen in ihren Arbeiten: Ist $N_0\subset\mathbf{R}^n$ eine kompakte, sternförmige $C^{2,\alpha}$-Fläche ohne Rand, so existiert eine eindeutige $C^{2,\alpha}$-Lösung des klassischen IMCF (2.1) für alle Zeiten $0\leqslant t<\infty$. Die reskalierten Flächen $\tilde{F}=e^{-\frac{t}{n-1}}F$ konvergieren exponentiell zu einer eindeutigen Sphäre vom Radius

$$r=\left(\frac{|N_0|}{|S^{n-1}|}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Schranken an H

Die Evolutionsgleichung für H liefert zusammen mit dem Maximumprinzip eine obere Schranke für die mittlere Krümmung in Abhängigkeit der Anfangswerte und der Ricci-Krümmung der umgebenden Mannigfaltigkeit. Existiert eine untere Schranke $H\geqslant\delta>0$, so ist auch $|A|^2$ nach oben beschränkt. Im Fall $n=2$ wurde dies von

Smoczyk [Sm98] bewiesen und für beliebiges n von Huisken [Hu99] unter Anwendung des Maximumprinzips für Tensoren [Ha82] auf Hh_{ij}.

Im Gegensatz dazu garantiert die Evolutionsgleichung des MCF im $\mathbf{R}^n$, dass die Positivität von H unter dem Fluss erhalten bleibt [Hu84]. Wie das Beispiel der schrumpfenden Sphäre zeigt, existiert hier aber keine obere Schranke an H.

Im Fall $M = \mathbf{R}^n$ ist für geeignetes B, $p(y) = |x-y|^2$, $y \in B_r(x)$

$$h(y) = \frac{Br}{(r^2 - p(y))}$$

eine Superlösung von 2.1 (vi), der Evolutionsgleichung für H (siehe [HI98] bzw. Beweis von Satz 2.5). Zur Übertragung auf beliebiges M benötigt man eine Verallgemeinerung der Funktion $p(y)$, deren Eigenschaften in Definition 2.3 zusammengefasst sind. Damit ergibt sich eine innere Abschätzung für H (Satz 2.5).

Definition 2.3 *Für $x \in M$ definiere $\sigma(x) \in (0,\infty]$ als das Supremum aller Radien σ, so dass $B_\sigma(x) \subset\subset M$,*

$$Ric \geqslant -\frac{1}{100n\sigma^2} \quad in \quad B_\sigma(x)$$

und eine C^2-Funktion p auf $B_\sigma(x)$ existiert, für die gilt

$$p(x) = 0, \quad p \geqslant d_x^2 \qquad auf \quad \partial B_\sigma(x)$$

und

$$|\nabla p| \leqslant 3d_x\,, \quad \nabla^2 p \leqslant 3g \qquad auf \quad B_\sigma(x)$$

Dabei bezeichnet d_x den Abstand zu x.

Bemerkung 2.4 (i) Im Fall $M = \mathbf{R}^n$ ist $p(y) = |y-x|^2$ eine mögliche Wahl. Dann gilt $\sigma = \infty$.
(ii) Eine hinreichende Bedingung ist die Existenz eines Diffeomorphismus' von $B_\sigma(x)$ auf einen offenen Ball in $\mathbf{R}^n$, so dass gilt

$$|g - \delta| \leqslant \frac{1}{100}\,, \quad |g_{ij,k}| \leqslant \frac{1}{100\sigma} \qquad \text{in} \quad B_\sigma(x)$$

Dann erfüllt $p(y) = 100|y-x|^2/99$ die Eigenschaften aus 2.3, wobei $|\cdot|$ den Abstand in Koordinaten bezeichnet. Ein solcher Diffeomorphismus ist etwa durch die Inverse der Exponentialabbildung für hinreichend kleines σ gegeben.

Satz 2.5 *[HI98] Sei $(N_t)_{0\leqslant t<T}$ glatte Lösung von (2.1) in M, wobei die N_t mit glattem Rand zugelassen sind. Dann gilt für jedes $x \in N_t$ und jedes $r \leqslant \sigma(x)$*

$$H(x,t) \leqslant \max\left(H_r, \frac{C(n)}{r}\right)$$

Dabei ist $H_r = \max_{P_r} H$ *und*

$$P_r = P_r(x,t) = (B_r \cap N_0) \times \{0\} \cup \left(\cup_{0 \leqslant s \leqslant t} (B_r \cap \partial N_s) \times \{s\}\right)$$

der parabolische Rand von $N_s \cap B_r(x)$*,* $0 \leqslant s \leqslant t$*.*

Beweis: Betrachte $\psi = \frac{1}{H}$ und finde eine untere Schranke φ.
Es folgt aus der Evolution von H, Satz 2.1 (vi), und $|A|^2 \geqslant H^2/(n-1)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \psi^2 \left(\triangle \psi + |A|^2 \psi + Rc(\nu,\nu)\psi \right) \\ &\geqslant \psi^2 \triangle \psi + \frac{\psi}{n} - \frac{\psi^3}{100 n \sigma^2} \end{aligned}$$

auf $N_t \cap B_r(x)$. Für $0 < \varepsilon \ll 1$ setze

$$A_\varepsilon = \frac{1}{max(rH_r, 20n)} - \varepsilon \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_\varepsilon = \frac{A_\varepsilon}{r}\left(r^2 - p(y)\right)_+$$

Für $y \in N_t \cap B_r(x)$ folgt aus $\triangle \varphi = \bar{g}^{ij} \bar{\nabla}_{ij} \varphi - H \bar{\nabla}_\nu \varphi$ und $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{H}\nu$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \varphi^2 \triangle \right) \varphi &= \left\langle \bar{\nabla}\varphi, \frac{\partial y}{\partial t} \right\rangle - \varphi^2 S : \bar{\nabla}^2 \varphi + \frac{1}{\psi}\varphi^2 \left\langle \bar{\nabla}\varphi, \nu \right\rangle \\ &= -\frac{A_\varepsilon}{r}\left(\psi + \frac{\varphi^2}{\psi} \right) \left\langle \bar{\nabla} p, \nu \right\rangle + \frac{A_\varepsilon}{r} \varphi^2 S : \bar{\nabla}^2 p \end{aligned}$$

Dabei ist $S : \bar{\nabla}^2 = \bar{g}^{ij} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j$.
Auf dem parabolischen Rand P_r sowie außerhalb von $B_r(x)$ gilt $\psi - \varphi > 0$. Sei $0 < s \leqslant t$ erster Zeitpunkt mit $(\psi - \varphi)(y,s) = 0$ für ein $y \in N_s \cap B_r(x)$. In diesem Punkt gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varphi^2 \triangle \right) (\psi - \varphi) \leqslant 0$$

Andererseits gilt in (y,s) wegen $\psi(y,s) \leqslant \sigma$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \psi^2 \triangle \right) \psi \geqslant \frac{\psi}{2n}$$

Daraus folgt in (y,s) mit den Voraussetzungen an p

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \varphi^2 \triangle \right) (\psi - \varphi) &\geqslant \frac{\varphi}{2n} + \frac{2A_\varepsilon}{r}\varphi \left\langle \bar{\nabla} p, \nu \right\rangle - \frac{A_\varepsilon}{r}\varphi^2 S : \bar{\nabla}^2 p \\ &\geqslant \varphi \left(\frac{1}{2n} - 6A_\varepsilon - 3(n-1)A_\varepsilon^2 \right) > 0 \end{aligned}$$

Damit gilt also insbesondere $\psi(x,t) > \varphi_\varepsilon(x,t) = A_\varepsilon r$ und da ε beliebig war auch $\psi(x,t) \geqslant Ar$ mit $A = (max(rH_r, 20n))^{-1}$. Dies ist die Behauptung.

□

2.2 Niveauflächenformulierung

Ein anderer Ansatz für den IMCF fasst die Fächen N_t als Niveaumengen einer skalaren Funktion

$$u : M \longrightarrow \mathbf{R}$$

auf, d.h. $N_t = \partial E_t$ mit $E_t = \{u < t\}$. Ein ähnlicher Ansatz wurde erstmals von Evans-Spruck [ES] bzw. Chen-Giga-Goto [CGG] für den MCF untersucht.

Es sei also $u(x)$ der Zeitpunkt, zu dem der Ort x erreicht wird. Für einen Fluss mit Geschwindigkeit f erhält man

Lemma 2.6 *Sei u glatt mit $\nabla u \neq 0$. Dann gilt für die Geschwindigkeit des zugehörigen Flusses*

$$f = |\nabla u|^{-1}$$

Beweis: Es gilt $u\,(F(p,t)) = t$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 1 = \frac{\partial}{\partial t} t &= \langle \nabla u, \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) \rangle \\ &= \langle \nabla u, f\nu(p,t) \rangle = \langle \nabla u, f\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \rangle \\ &= f|\nabla u| \end{aligned}$$

□

Andererseits gilt $H = \operatorname{div}_M \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$. Damit ist (2.1) in der Situation von Lemma 2.6 äquivalent zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) &= |\nabla u| \qquad \text{in} \quad M \setminus E_0 \\ u &= 0 \qquad \text{auf} \quad \partial E_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Diese Formulierung des IMCF ist Ausgangspunkt für den schwachen Lösungsbegriff, auf den in Kapitel 4 eingegangen wird. Dieser vermag den Ursprung der Singularitäten zu klären und den Fluss über diese hinaus zu verfolgen.

3 Lokal sternförmige Lösungen ($M = \mathbf{R}^n$)

Im vorangehenden Kapitel wurde eine innere Abschätzung für die mittlere Krümmung H der Flächen N_t einer glatten Lösung des IMCF bewiesen. Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen man lokale Regularitätsergebnisse höherer Ordnung erhält. Der Existenzsatz von Gerhardt bzw. Urbas legt nahe, dass lokale Sternförmigkeit dies liefern kann.

Eine glatte Lösung $F : N \times [0, T) \to \mathbf{R}^n$ des IMCF heißt *lokal sternförmig in* $B_R^n(y_0) \subset \boldsymbol{R}^n$ *bezüglich* $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$, falls

$$\beta = \langle x - x_0, \nu \rangle > 0 \qquad \forall\, x \in N_t \cap B_R^n(y_0)$$

Dabei ist ν die äußere Normale an N_t im Punkt x und x_o ist unabhängig von t. Es kann wieder o.B.d.A. $x_0 = 0$ angenommen werden.

Lemma 3.1 *Sei* $F : N \times [0, T) \to \boldsymbol{R}^n$ *lokal sternförmig in* $B_R^n(y_0) \subset \boldsymbol{R}^n$ *bezüglich* $0 \in \boldsymbol{R}^n$*. Dann gilt in* $N_t \cap B_R^n(y_0)$
(i) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\beta = \frac{|A|^2}{H^2}\beta$
(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\beta^{-1} = -\frac{2}{H^2}\beta|\nabla\beta^{-1}|^2 - \beta^{-1}\frac{|A|^2}{H^2}$

Beweis: (i) $\frac{\partial}{\partial t}\beta = \langle \frac{\partial}{\partial t}x, \nu\rangle + \langle x, \frac{\partial}{\partial t}\nu\rangle = \frac{1}{H} + \frac{1}{H^2}\langle x, \nabla H\rangle$
Andererseits folgt mit (1.7)

$$\begin{aligned}\triangle\beta &= \nabla^i\{\langle e_i, \nu\rangle + \langle x, \bar\nabla_i\nu\rangle\} = \nabla^i\{h_i^j\langle x, e_j\rangle\}\\ &= \nabla^i h_i^j\langle x, e_j\rangle + h^{ij}\langle e_i, e_j\rangle + h^{ij}\langle x, \bar\nabla_i e_j\rangle\\ &= \nabla^j H\langle x, e_j\rangle + H - h_j^i h_i^j\langle x, \nu\rangle\\ &= \langle x, \nabla H\rangle + H - |A|^2\beta\end{aligned}$$

(ii) Folgt direkt aus (i) und

$$\triangle\beta^{-1} = -\beta^{-2}\triangle\beta + 2\beta^{-3}|\nabla\beta|^2$$

□

Um eine innere Abschätzung für $|A|^2 = h_j^i h_i^j$ zu erhalten, wäre es nahe liegend, das parabolische Maximumprinzip auf die Evolutionsgleichung von $|A|^2\beta^{-2}$ anzuwenden. Aus Korollar 2.2 ergibt sich

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)|A|^2 = -\frac{4}{H^3}h_i^j\nabla^i H\nabla_j H + \frac{2}{H^2}|A|^4 - \frac{4}{H}tr\,A^3 - \frac{2}{H^2}|\nabla A|^2$$

In dieser Evolutionsgleichung hat man jedoch keine Kontrolle über $-\frac{2}{H^3}h_i^j\nabla^i H\nabla_j H$, da weder H^{-1} noch $|\nabla H|$ nach oben beschränkt werden können. Wegen $H > 0$ ist eine obere Schranke an $|A|^2$ äquivalent zu einer an λ_{max}^2, das Quadrat des größten Eigenwertes der Weingartenabbildung. Da λ_{max} nur Lipschitz-stetig ist, betrachtet man glatte Approximationen. Die hierzu notwendigen technischen Grundlagen beinhaltet der folgende Abschnitt.

3.1 Technische Grundlagen

Glatte Approximation an $\max(x_1, \ldots, x_n)$

Die Niveauflächen der Funktion $\max(x_1, x_2)$ auf $\mathbf{R}^2$ lassen sich durch Hyperbeln approximieren. Diese sind Niveauflächen der Funktion

$$\tilde{u}_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}$$

für ein $\delta > 0$.
Rekursiv erhält man eine Approximation an $max(x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 3.2 *Für $\delta > 0$ setze*

$$\tilde{u}_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}$$

$$\tilde{u}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{u}_2(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})), \ n \geqslant 2$$

Lemma 3.3 *Für jedes $\delta > 0$ und $n \geqslant 2$ gilt:*

(i) *$\tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)$ ist glatt, symmetrisch, monoton steigend und konvex .*

(ii) $\frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \leqslant 1$

(iii) $\max(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n) \leqslant max(x_1, \ldots, x_n) + (n-1)\delta$

(iv) *Für $x \in \boldsymbol{R}^n$ gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \cdot x_i \leqslant \tilde{u}_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Beweis:
(i) $\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_i - x_j}{2\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}}\right) > 0$ für $i = 1, 2, \quad j \neq i$
und $D^2\tilde{u}_2 = \frac{\delta^2}{4\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}^3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.
Für $n > 2$ folgen die Behauptungen unmittelbar durch Induktion.
(ii) Induktion über n.
(iii) $n = 2$:

$$\tilde{u}_2(x_1, x_2) - max(x_1, x_2) = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2} - \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2} \quad \leqslant \delta$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{u}_2\left(x_i, \tilde{u}_n\left(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}\right)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} max\left(x_i, max(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) + (n-1)\,\delta\right) + \delta\\ &\leqslant max(x_1, \ldots, x_n) + n\,\delta\end{aligned}$$

(iv) $n = 2$:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \tilde{u}_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial \tilde{u}_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot x_2\\ &\qquad = \tilde{u}(x_1, x_2) - \frac{\delta^2}{\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \delta^2}} \leqslant \tilde{u}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}{\partial x_i} \cdot x_i &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\Bigg\{\frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_1} \cdot x_i\\ &+ \sum_{j<i} \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})}{\partial y_{i-1}} \cdot x_i\\ &+ \sum_{j>i} \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})}{\partial y_i} \cdot x_i\Bigg\}\\ &= \frac{1}{n+1}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_1} \cdot x_i + \sum_{j=1}^{n+1}(A_j + B_j)\Bigg\}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}A_j &= \sum_{i>j} \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})}{\partial y_{i-1}} \cdot x_i\\ &= \sum_{i=j}^{n} \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})}{\partial y_i} \cdot x_{i+1}\\ B_j &= \sum_{i<j} \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})}{\partial y_i} \cdot x_i\end{aligned}$$

Für festes j setze

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & : \; i < j \\ x_{i+1} & : \; i = j, \ldots, n \end{cases}$$

Damit findet man

$$\begin{aligned} A_j + B_j &= \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)\right)}{\partial y_2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}_n(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial y_i} \cdot \tilde{x}_i \\ &\leqslant \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_j, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \tilde{u}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}{\partial x_i} \cdot x_i &\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_1} \cdot x_i \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{u}_2\left(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\right)}{\partial y_2} \cdot \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) \right\} \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{u}_2\left(x_i, \tilde{u}_n(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\right) \end{aligned}$$

□

Funktionen von Matrizen

Um die Evolutionsgleichung der Approximation an λ_{max} berechnen zu können, benötigt man eine glatte Funktion der Weingartenabbildung mit

$$u(h^i_j) = \tilde{u}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Dazu ist 3.4 das entscheidende Lemma [An94], [CNS].
Eine symmetrische Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = g(e_1(x), \ldots, e_n(x)), \quad \text{wobei} \quad e_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} x^{i_1} \cdots x^{i_k}$$

die elementarsymmetrischen Polynome sind und $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ glatt ist. Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^{n^2}$ definiere

$$\begin{aligned} E^k(A) &= \frac{1}{k!} \mathrm{tr}(A^{(k)}) \\ A^{(k)} &: \otimes^k \mathbf{R}^n \longrightarrow \otimes^k \mathbf{R}^n \\ A^{(k)}(u_1, \ldots, u_k) &= \sum_{\sigma \in S(k)} (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} \left(A(u_{\sigma(1)}), \ldots, A(u_{\sigma(k)}) \right) \end{aligned}$$

Für eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $\mathbf{R}^n$ ist durch $\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} : i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n\}$ eine Basis von $\otimes^k \mathbf{R}^n$ gegeben. Bezüglich einer solchen läßt sich $E^k(A)$ schreiben als

$$E^k(A) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\sigma \in S(k)} (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} a^{i_1}_{\sigma(i_1)} \cdots a^{i_k}_{\sigma(i_k)}$$

Für eine diagonalisierbare Matrix A sei $\lambda(A) = \{\lambda^1, \ldots, \lambda^n\}$ die Menge der Eigenwerte. Dann gilt $E^k(A) = e^k(\lambda(A))$. Nun läßt sich durch

$$F(A) = g(E^1(A), \ldots, E^n(A))$$

eine glatte Funktion $F : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$ definieren, die für diagonalisierbare Matrizen mit $f(\lambda(A))$ übereinstimmt. Mit obigen Voraussetzungen gilt dann das folgende Lemma.

Lemma 3.4 *Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\boldsymbol{R}^n)$ diagonalisierbar.*

(i) Bezüglich einer Basis von Eigenvektoren gilt

$$DF(A) = \mathrm{diag}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\lambda(A)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(\lambda(A))\right)$$

(ii) Sei f konvex und $\xi \in \mathrm{Mat}_n(\boldsymbol{R}^n)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_s^r \partial y_q^p}(A)\xi_s^r \xi_q^p \geqslant 0$$

Beweis: (i)

$$\frac{\partial E^k}{\partial y_q^p} = \sum_{i_1 < \ldots < p < \ldots < i_k} \sum_{\sigma : p \mapsto q} (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} a^{i_1}_{\sigma(i_1)} \cdots \hat{a}^p_q \cdots a^{i_k}_{\sigma(i_k)}$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i_1 < \ldots < p < \ldots < i_k} \lambda^{i_1} \cdots \hat{\lambda}^p \cdots \lambda^{i_k} = \frac{\partial e^k}{\partial x^p}(\lambda(A)) & p = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) Rechne in einer Orthonormalbasis von Eigenvektoren von A. Bezüglich dieser gilt dann $\xi_q^p = \xi_p^q$. Wegen Stetigkeit genügt es die Behauptung für eine dichte Teilmenge der diagonalisierbaren Matrizen zu beweisen. Die Menge der diagonalisierbaren Matrizen A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten ist eine solche. Sei also $\lambda^i \neq \lambda^j$ für $i \neq j$. Es gilt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_s^r \partial y_q^p} = \frac{\partial^2 g}{\partial z^k \partial z^l} \frac{\partial E^k}{\partial y_s^r} \frac{\partial E^l}{\partial y_q^p} + \frac{\partial g}{\partial z^k} \frac{\partial^2 E^k}{\partial y_s^r \partial y_q^p}$$

und für $r \neq p$ (o.B.d.A. $r < p$)

$$\frac{\partial^2 E^k}{\partial y_s^r \partial y_q^p} = \sum_{I_k(r,p)} \sum_{\sigma : (r,p) \mapsto (s,q)} (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} a^{i_1}_{\sigma(i_1)} \cdots \hat{a}^r_s \cdots \hat{a}^p_q \cdots a^{i_k}_{\sigma(i_k)}$$

mit $I_k(r,p) = \{i_1 < \ldots < r < \ldots < p < \ldots < i_k\}$
Man findet

◇ $r = s = p = q$:

$$\frac{\partial^2 E^k}{\partial y^r_s \partial y^p_q} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^r_s \partial y^p_q}(A) = \frac{\partial^2 g}{\partial z^k \partial z^l} \frac{\partial e^k}{\partial x^r} \frac{\partial e^l}{\partial x^p} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial x^p}(\lambda(A))$$

◇ $r = s$, $p = q$ und $r \neq p$:

$$\frac{\partial^2 E^k}{\partial y^r_s \partial y^p_q}(A) = \sum_{I_k(r,p)} \lambda^{i_1} \cdots \hat{\lambda}^r \cdots \hat{\lambda}^p \cdots \lambda^{i_k} = \frac{\partial^2 e^k}{\partial x^r \partial x^p}(\lambda(A))$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^r_s \partial y^p_q}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial x^p}(\lambda(A))$$

◇ $s = p$, $q = r$ und $r \neq p$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E^k}{\partial y^r_s \partial y^p_q}(A) &= - \sum_{I_k(r,p)} \lambda^{i_1} \cdots \hat{\lambda}^r \cdots \hat{\lambda}^p \cdots \lambda^{i_k} \\
&= \sum_{I_k(r,p)} \frac{\lambda^{i_1} \cdots \hat{\lambda}^r \cdots \lambda^p \cdots \lambda^{i_k} - \lambda^{i_1} \cdots \lambda^r \cdots \hat{\lambda}^p \cdots \lambda^{i_k}}{\lambda^r - \lambda^p} \\
&= \frac{(\frac{\partial e^k}{\partial x^r} - \frac{\partial e^k}{\partial x^p})(\lambda(A))}{\lambda^r - \lambda^p} \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^r_s \partial y^p_q}(A) &= \frac{(\frac{\partial f}{\partial x^r} - \frac{\partial f}{\partial x^p})(\lambda(A))}{\lambda^r - \lambda^p}
\end{aligned}$$

Alle übrigen Terme verschwinden.
Man erhält also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial y^r_s \partial y^p_q} \xi^r_s \xi^p_q &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial x^p} \xi^r_r \xi^p_p + \sum_{r \neq p} \frac{\frac{\partial f}{\partial x^r} - \frac{\partial f}{\partial x^p}}{\lambda^r - \lambda^p} (\xi^r_p)^2 \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

wegen der Konvexität von f und Lemma 3.5.

□

Lemma 3.5 *Sei $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ glatt, symmetrisch und konvex. Dann gilt für $\lambda \in \boldsymbol{R}^n$*

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(\lambda)}{\lambda^i - \lambda^j} \geqslant 0 \qquad falls \quad \lambda^i \neq \lambda^j$$

Beweis: (vgl. [EH89]) Es gelte o.B.d.A. $\lambda^i > \lambda^j$. Betrachte die Kurve

$$\tilde{\lambda} : [0,1] \to \mathbf{R}^n \,, \quad \tilde{\lambda}(t) = \lambda + t\,\frac{\lambda^j - \lambda^i}{2}\eta$$

mit $\eta = e_i - e_j \in \mathbf{R}^n$. Dann gilt $\tilde{\lambda}^i(1) = \tilde{\lambda}^j(1) = \frac{\lambda^i + \lambda^j}{2}$ und

$$D_\eta f = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Daraus folgt wegen Symmetrie $D_\eta f(\tilde{\lambda}(1)) = 0$ und man erhält

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\lambda^i - \lambda^j}{2} \int\limits_0^1 D_\eta D_\eta f(\tilde{\lambda}(t))\, dt \\ &= D_\eta f(\tilde{\lambda}(0)) \end{aligned}$$

□

3.2 Die Evolutionsgleichung

Sei $F : N \times [0,T) \to \mathbf{R}^n$ eine glatte Lösung des IMCF. Theorem 3.6 liefert eine Schranke an λ^2_{max} in $B^n_{\theta R}(y_0)$, $\theta \in (0,1)$, falls

$$0 < \beta_1 R \leqslant \langle x, \nu \rangle \leqslant \beta_2 R \qquad \forall\, x \in N_t \cap B^n_R(y_0)$$

Gesucht ist nun eine Kombination von $u(h^i_j) = \tilde{u}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ und $\beta^{-1} = \langle x, \nu \rangle^{-1}$, die in $B^n_R(y_0)$ einer Evolutionsgleichung genügt, auf die das Maximumprinzip angewendet werden kann. Eine ähnliche Methode wird in [EH91] verwendet. Die nachfolgenden Rechnungen gelten in $N_t \cap B^n_R(y_0)$.

Für ein festes $\delta > 0$ betrachte die glatte Approximation des maximalen Eigenwertes der Weingartenabbildung (h^i_j) aus Definition 3.2

$$u(h^i_j) = \tilde{u}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= \frac{\partial u}{\partial \sigma^i_j} \frac{\partial}{\partial t} h^i_j \\ &= \frac{\partial u}{\partial \sigma^i_j} \left(\frac{1}{H^2} \triangle h^i_j - \frac{2}{H^3} \nabla^i H \nabla_j H + h^i_j \frac{|A|^2}{H^2} - \frac{2}{H} h^i_k h^k_j \right) \end{aligned}$$

und

$$\triangle u = \nabla^k \left(\frac{\partial u}{\partial \sigma^i_j} \nabla_k h^i_j \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^p_q \partial \sigma^i_j} \nabla^k h^p_q \nabla_k h^i_j + \frac{\partial u}{\partial \sigma^i_j} \triangle h^i_j$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right) u = \underbrace{-\frac{1}{H^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma_q^p \partial \sigma_j^i}\nabla^k h_q^p \nabla_k h_j^i - \frac{2}{H^3}\frac{\partial u}{\partial \sigma_j^i}\nabla^i H \nabla_j H}_{(1)}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \sigma_j^i} h_j^i \frac{|A|^2}{H^2}}_{(2)} - \underbrace{\frac{2}{H}\frac{\partial u}{\partial \sigma_j^i} h_k^i h_j^k}_{(3)} \tag{3.1}$$

- Da $\tilde{u}$ monoton und konvex ist, folgt aus Lemma 3.4: (1) $\leqslant 0$

- Aus den Lemmata 3.4 und 3.3 folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_j^i} h_j^i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda^i}\lambda^i \leqslant u \quad \Rightarrow \quad (2) \leqslant u\frac{|A|^2}{H^2}$$

- Wieder wegen der Monotonie von $\tilde{u}$ und Lemma 3.4 gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_j^i} h_k^i h_j^k = \sum_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda^i} \cdot (\lambda^i)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (3) \geqslant 0$$

Damit erhält man aus (3.1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right) u \leqslant u\frac{|A|^2}{H^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right) u^2 \leqslant -\frac{2}{H^2}|\nabla u|^2 + 2u^2\frac{|A|^2}{H^2} \tag{3.2}$$

Aus 3.1 ergibt sich zudem

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right) \beta^{-2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{H^2}\beta^2|\nabla \beta^{-2}|^2 - 2\beta^{-2}\frac{|A|^2}{H^2} \tag{3.3}$$

In der Evolutionsgleichung von $u^2\beta^{-2}$ heben sich die Terme $\pm 2u^2\beta^{-2}\frac{|A|^2}{H^2}$ gerade weg. Betrachte daher $\varphi(\beta^{-2})$ an Stelle von β^{-2} mit einer glatten Funktion φ, die zusätzliche gute Terme liefert.

Die Funktion $\varphi(z)$

Auf $[\beta_2^{-2}R^{-2}, \beta_1^{-2}R^{-2}]$ sei

$$\varphi(z) = \frac{z}{\alpha - z} \quad \text{mit} \quad \alpha = 2\beta_1^{-2}R^{-2}$$

Dann gilt

$$0 < \varphi_0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1 \quad \text{mit} \quad \varphi_0 = \frac{\beta_2^{-2}}{2\beta_1^{-2} - \beta_2^{-2}} \tag{3.4}$$

$$\varphi'(z) = \frac{\alpha}{(\alpha - z)^2} = \frac{\alpha}{z^2}\varphi^2(z) \tag{3.5}$$

$$\varphi''(z) = \frac{2\alpha}{(\alpha - z)^3} = \frac{2\alpha}{z^3}\varphi^3(z) \tag{3.6}$$

$$\varphi - \varphi' z = -\varphi^2 \tag{3.7}$$

$$\varphi' \leqslant \varphi'(\beta_1^{-2}R^{-2}) = \varphi_1 R^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_1 = 2\beta_1^2 \tag{3.8}$$

Die Evolution von $\varphi(\beta^{-2})$

Aus (3.3) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\beta^{-2}) &= \varphi' \left\{ \frac{1}{H^2}\triangle\beta^{-2} - \frac{3}{2}\frac{1}{H^2}\beta^2|\nabla\beta^{-2}|^2 - 2\beta^{-2}\frac{|A|^2}{H^2} \right\} \\
\triangle\varphi(\beta^{-2}) &= \nabla^i(\varphi'\nabla_i\beta^{-2}) = \varphi''\nabla^i\beta^{-2}\nabla_i\beta^{-2} + \varphi'\triangle\beta^{-2} \\
&= \varphi''|\nabla\beta^{-2}|^2 + \varphi'\triangle\beta^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\varphi(\beta^{-2}) = &- \frac{1}{H^2}(\frac{3}{2}\beta^2\varphi' + \varphi'')|\nabla\beta^{-2}|^2 \\
&- 2\varphi'\beta^{-2}\frac{|A|^2}{H^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Evolution von $w = u^2\varphi(\beta^{-2})$

Für $w = u^2\varphi(\beta^{-2})$ gilt mit (3.2) und (3.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}w &= \varphi\frac{\partial}{\partial t}u^2 + u^2\frac{\partial}{\partial t}\varphi \\
&\leqslant \frac{1}{H^2}(\varphi\triangle u^2 + u^2\triangle\varphi) - \frac{2}{H^2}\varphi|\nabla u|^2 \\
&\quad - \frac{1}{H^2}u^2(\frac{3}{2}\beta^2\varphi' + \varphi'')|\nabla\beta^{-2}|^2 + 2u^2(\varphi - \varphi'\beta^{-2})\frac{|A|^2}{H^2} \\
&= \frac{1}{H^2}\triangle w - \frac{2}{H^2}\nabla^i u^2\nabla_i\varphi - \frac{2}{H^2}\varphi|\nabla u|^2 \\
&\quad - \frac{1}{H^2}u^2\left(\frac{3}{2}\beta^2\varphi' + \varphi''\right)|\nabla\beta^{-2}|^2 - 2u^2\varphi^2\frac{|A|^2}{H^2}
\end{aligned}$$

und nach (3.7)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)w\leqslant-\frac{2}{H^2}\nabla^i u^2\nabla_i\varphi-\frac{2}{H^2}\varphi|\nabla u|^2 \tag{3.10}$$
$$-\frac{1}{H^2}u^2\left(\frac{3}{2}\beta^2\varphi'+\varphi''\right)|\nabla\beta^{-2}|^2-2\varphi w\frac{|A|^2}{H^2}$$

Setze $\tau=\frac{1}{\varphi_0+2}<\frac{1}{2}$ und $\sigma=2-\tau$.

$$-\frac{\tau}{H^2}\nabla^i u^2\nabla_i\varphi=-\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2+\frac{4\tau}{H^2}\varphi|\nabla u|^2$$
$$-\frac{\sigma}{H^2}\nabla^i u^2\nabla_i\varphi=-\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi+\frac{\sigma}{H^2}u^2\varphi^{-1}(\varphi')^2|\nabla\beta^{-2}|^2$$

Aus (3.10) erhält man dann

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)w\leqslant&-\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2-\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi\\&-\frac{2-4\tau}{H^2}\varphi|\nabla u|^2\\&-\frac{1}{H^2}u^2\left(\frac{3}{2}\beta^2\varphi'+\varphi''-\sigma\varphi^{-1}(\varphi')^2\right)|\nabla\beta^{-2}|^2\\&-2\varphi w\frac{|A|^2}{H^2}\end{aligned}\tag{3.11}$$

Für $z=\beta^{-2}$ gilt mit (3.4) - (3.8)

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\beta^2\varphi'+\varphi''-\sigma\varphi^{-1}(\varphi')^2&=\frac{3}{2}z^{-1}\varphi'+\varphi''-\sigma\varphi^{-1}(\varphi')^2\\&=\frac{\alpha}{z^3}\varphi^2\left(\frac{3}{2}+2\varphi-\sigma\frac{\alpha}{z}\varphi\right)\\&=\frac{\alpha}{z^3}\varphi^2\left(\frac{3}{2}+\tau\varphi-\sigma\right)\\&=\frac{\alpha}{z^3}\varphi^2\left(-\frac{1}{2}+\tau(1+\varphi)\right)\\&\geqslant\frac{\alpha}{z^3}\varphi^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1+\varphi_0}{\varphi_0+2}\right)\\&=\frac{\alpha}{z^3}\varphi^2\frac{\varphi_0}{2\varphi_0+4}\\&\geqslant c_2R^4\varphi^2\qquad\text{mit}\quad c_2=c_2(\beta_1,\beta_2)>0\end{aligned}$$

und mit $c_1(\beta_1,\beta_2)=2-4\tau>0$ folgt aus (3.11)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)w\leqslant&-\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2-\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi\\&-\frac{c_1}{H^2}\varphi|\nabla u|^2-\frac{c_2}{H^2}R^4u^2\varphi^2|\nabla\beta^{-2}|^2-2\varphi w\frac{|A|^2}{H^2}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Die Abschneidefunktion η

Um ein Maximumprinzip anwenden zu können, müssen die Randwerte kontrolliert werden. Dies wird durch eine Abschneidefunktion η erreicht, die auf $\partial B^n_R(y_0)$ verschwindet.

Auf $N_t \cap B^n_R(y_0)$ betrachte $r(x) = |x - y_0|^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} r &= 2\langle \frac{\partial}{\partial t} x, x - y_0\rangle = \frac{2}{H}\langle \nu, x - y_0\rangle \\
\triangle r &= 2\nabla^i \langle e_i, x - y_0\rangle \\
&= 2\langle \bar{\nabla}^i e_i, x - y_0\rangle + 2g^{ij}\langle e_i, e_j\rangle \\
&= -2H\langle \nu, x - y_0\rangle + 2(n-1)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right) r = \frac{4}{H}\langle \nu, x - y_0\rangle - \frac{2}{H^2} n \tag{3.13}$$

$$|\nabla r|^2 = 4|x - y_0|^2 \leqslant 4R^2 \tag{3.14}$$

Setze $\eta(x) = (R^2 - r(x))^2$. Dann gilt $\eta \leqslant R^4$ und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\eta &= -2(R^2 - r)\frac{\partial}{\partial t} r = -\frac{4}{H}(R^2 - r)\langle \nu, x - y_0\rangle \\
\triangle \eta &= -\nabla^i (2(R^2 - r)\nabla_i r) = 2|\nabla r|^2 - 2(R^2 - r)\triangle r \\
&= 2|\nabla r|^2 + 4H(R^2 - r)\langle \nu, x - y_0\rangle - 4n(R^2 - r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\eta &= -\frac{8}{H}(R^2 - r)\langle \nu, x - y_0\rangle - \frac{2}{H^2}|\nabla r|^2 \\
&\quad + \frac{4}{H^2} n(R^2 - r) \qquad (3.15) \\
&= -\frac{8}{H}\eta^{\frac{1}{2}}\langle \nu, x - y_0\rangle - \frac{2}{H^2}|\nabla r|^2 + \frac{4}{H^2} n\eta^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$|\nabla \eta| = 2\eta^{\frac{1}{2}}|\nabla r| \tag{3.16}$$

Die Evolution von $w\eta$

Mit (3.12) und (3.15) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(w\eta) &= \eta\frac{\partial}{\partial t}w + w\frac{\partial}{\partial t}\eta \\ &\leqslant \frac{1}{H^2}(\eta\triangle w + w\triangle\eta) - \frac{\tau}{H^2}\eta u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2 \\ &\quad - \frac{\sigma}{H^2}\eta\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi - \frac{c_1}{H^2}\varphi\eta|\nabla u|^2 - \frac{c_2}{H^2}R^4u^2\eta\varphi^2|\nabla\beta^{-2}|^2 \\ &\quad - 2\varphi\eta w\frac{|A|^2}{H^2} - \frac{8}{H}w\eta^{\frac{1}{2}}\langle\nu, x-y_0\rangle \\ &\quad - \frac{2}{H^2}w|\nabla r|^2 + \frac{4}{H^2}nw\eta^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)(\eta w) &\leqslant -\frac{2}{H^2}\nabla^i w\nabla_i\eta - \frac{\tau}{H^2}\eta u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2 \\ &\quad - \frac{\sigma}{H^2}\eta\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi - \frac{c_1}{H^2}\varphi\eta|\nabla u|^2 - \frac{c_2}{H^2}R^4\varphi w\eta|\nabla\beta^{-2}|^2 \\ &\quad - 2\varphi\eta w\frac{|A|^2}{H^2} - \frac{8}{H}w\eta^{\frac{1}{2}}\langle\nu, x-y_0\rangle - \frac{2}{H^2}w|\nabla r|^2 \\ &\quad + \frac{4}{H^2}nw\eta^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

Es gelten die folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned}-\frac{2}{H^2}\nabla^i w\nabla_i\eta &= -\frac{2}{H^2}\eta^{-1}\nabla^i(\eta w)\nabla_i\eta + \frac{2}{H^2}\eta^{-1}w|\nabla\eta|^2 \\ &= -\frac{2}{H^2}\eta^{-1}\nabla^i(\eta w)\nabla_i\eta + \frac{8}{H^2}w|\nabla r|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\tau}{H^2}\eta u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2 - \frac{c_1}{H^2}\varphi\eta|\nabla u|^2 \\ &\quad = -\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i u^2\nabla_i(\eta w) + \frac{2\tau}{H^2}u\varphi\nabla^i u\nabla_i\eta - \frac{c_1}{H^2}\varphi\eta|\nabla u|^2 \\ &\quad \leqslant -\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i u^2\nabla_i(\eta w) + \frac{\tau^2}{c_1H^2}\varphi\eta^{-1}u^2|\nabla\eta|^2 \\ &\quad = -\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i u^2\nabla_i(\eta w) + \frac{c_3}{H^2}w|\nabla r|^2\end{aligned}$$

mit $c_3(\beta_1, \beta_2) = \frac{4\tau^2}{c_1} > 0$.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\sigma}{H^2}\eta\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi - \frac{c_2}{H^2}R^4\varphi w\eta|\nabla\beta^{-2}|^2\\
&\quad = -\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i(\eta w)\nabla_i\varphi + \frac{\sigma}{H^2}w\varphi'\varphi^{-1}\nabla^i\eta\nabla_i\beta^{-2}\\
&\qquad\qquad - \frac{c_2}{H^2}R^4\varphi w\eta|\nabla\beta^{-2}|^2\\
&\quad \leqslant -\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i(\eta w)\nabla_i\varphi + \frac{\sigma^2}{4c_2R^4H^2}w\eta^{-1}(\varphi')^2\varphi^{-3}|\nabla\eta|^2\\
&\quad \leqslant -\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i(\eta w)\nabla_i\varphi + \frac{c_4}{H^2}w|\nabla r|^2
\end{aligned}
$$

mit $c_4(\beta_1,\beta_2) = \frac{\sigma^2}{c_2}\varphi_1^2\varphi_0^{-3} > 0$. Dabei wurde (3.16) verwendet.
Eingesetzt in (3.17) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)(\eta w)\\
&\quad \leqslant -\frac{1}{H^2}\left(2\eta^{-1}\nabla^i\eta + \tau u^{-2}\nabla^i u^2 + \sigma\varphi^{-1}\nabla^i\varphi\right)\nabla_i(\eta w)\\
&\quad - 2\varphi\eta w\frac{|A|^2}{H^2} - \frac{8}{H}w\eta^{\frac{1}{2}}\langle\nu, x-y_0\rangle + \frac{4}{H^2}nw\eta^{\frac{1}{2}}\\
&\quad + \frac{c_5}{H^2}w|\nabla r|^2
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

mit $c_5(\beta_1,\beta_2) = 6 + c_3 + c_4 > 0$

3.3 Innere Abschätzung für $|A|^2$

Theorem 3.6 *Sei $F : N \times [0,T) \to \boldsymbol{R}^n$ glatte Lösung des IMCF. Für $t \in [0,T)$ habe N_t in $B_R^n(y_0)$ keinen Rand und in $N_t \cap B_R^n(y_0)$ gelte*

$$0 < \beta_1 R \leqslant \beta = \langle x,\nu\rangle \leqslant \beta_2 R\,,$$

d.h. N_t ist in $B_R^n(y_0)$ lokal sternförmig bezüglich 0. Zudem sei

$$H_{max}(y_0,R) = \sup_{t\geqslant 0}\ \sup_{N_t\cap B_R^n(y_0)} H < \infty$$

Dann gilt für $\theta \in (0,1)$ in $N_t \cap B_{\theta R}^n(y_0)$

$$\lambda_{max}^2 \leqslant c_6\cdot(1-\theta^2)^{-2}\cdot\max\left\{\sup_{N_0\cap B_R^n(y_0)}\lambda_{max}^2,\, H_{max}R^{-1} + R^{-2}\right\}$$

mit $c_6 = c_6(\beta_1,\beta_2,n)$.

Beweis:
Für ein $\delta > 0$ betrachte die Funktion ηw mit $w = u^2\varphi(\beta^{-2})$ und

$$\eta(x) = ((R^2 - r(x))_+)^2 , \quad r(x) = |x - y_0|^2$$

In $N_t \cap B^n_R(y_0)$ für $t > 0$ gilt dann die Evolutionsgleichung (3.18). Auf $N_t \setminus B^n_R(y_0)$ für $t \geqslant 0$ gilt zudem $\eta w \equiv 0$. Ziel ist es, eine obere Schranke an u^2 zu finden, die unabhängig von δ ist, was eine Abschätzung an λ^2_{max} impliziert. Wegen der Voraussetzungen an β und den Eigenschaften von φ (3.4) genügt es, eine obere Schranke für w zu beweisen. Durch die Abschneidefunktion η werden die Randwerte kontrolliert. Da η auf dem Rand von $B^n_R(y_0)$ verschwindet, erhält man die gewünschten Abschätzungen nur auf einer etwas kleineren Kugel $B^n_{\theta R}(y_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$.

Setze

$$\begin{aligned} L_\delta &= \sup_{N_0 \cap B^n_R(y_0)} (\eta w) \geqslant 0 \\ L &= \sup_{N_0 \cap B^n_R(y_0)} (\eta\varphi\lambda^2_{max}) \leqslant R^4 \sup_{N_0 \cap B^n_R(y_0)} \lambda^2_{max} \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{\delta\to\infty} L_\delta = L$. Sei $t_1 > 0$ erster Zeitpunkt mit $\eta w(x_1) = M > L_\delta$ für ein $x_1 \in N_{t_1}$. Dann gilt $x_1 \in N_{t_1} \cap B^n_R(y_0)$ und

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)(\eta w)(x_1) \geqslant 0 \qquad \nabla_i(\eta w)(x_1) = 0$$

Daraus folgt in x_1

$$2\varphi\eta w\frac{|A|^2}{H^2} \leqslant -\frac{8}{H} w\eta^{\frac{1}{2}}\langle\nu, x_1 - y_0\rangle + \frac{4}{H^2} nw\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{c_5}{H^2} w|\nabla r|^2$$

Multipliziere mit H^2

$$2\varphi\eta w|A|^2 \leqslant 8Hw\eta^{\frac{1}{2}}|x_1 - y_0| + 4nw\eta^{\frac{1}{2}} + c_5 w|\nabla r|^2$$

Nach Lemma 3.3 gilt

$$\begin{aligned} & u \leqslant \lambda_{max} + (n-2)\delta \\ \Rightarrow \qquad & u^2 \leqslant 2|A|^2 + d(\delta) \qquad \text{mit} \quad \lim_{\delta\to 0} d(\delta) = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt in x_1

$$\begin{aligned} 2\eta w^2 &= 2\varphi\eta w u^2 \leqslant 4\varphi\eta w|A|^2 + 2\varphi\eta w d(\delta) \\ &\leqslant 16Hw\eta^{\frac{1}{2}}|x_1 - y_0| + 8nw\eta^{\frac{1}{2}} + 2c_5 w|\nabla r|^2 + 2\varphi\eta w d(\delta) \end{aligned}$$

Multipliziere mit η

$$\begin{aligned} 2M^2 &\leqslant \left(16H\eta^{\frac{1}{2}}|x_1 - y_0| + 8n\eta^{\frac{1}{2}} + 2c_5|\nabla r|^2 + 2\varphi\eta d(\delta)\right) \cdot M \\ \Rightarrow \quad M &\leqslant 8H\eta^{\frac{1}{2}}|x_1 - y_0| + 4n\eta^{\frac{1}{2}} + c_5|\nabla r|^2 + \varphi\eta d(\delta) \\ &\leqslant 8H_{max}R^3 + 4(n + c_5)R^2 + d(\delta)R^4 \end{aligned}$$

Auf $N_t \cap B_R^n(y_0)$, $t \geqslant 0$ erhält man somit

$$\eta w \leqslant \max\left\{L_\delta, 8H_{max}R^3 + 4(n + c_5)R^2 + d(\delta)R^4\right\}$$

Für $\delta \to 0$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \eta\lambda_{max}^2\varphi &\leqslant \max\left\{L, 8H_{max}R^3 + 4(n + c_5)R^2\right\} \\ \Rightarrow \quad \eta\lambda_{max}^2 &\leqslant \varphi_0^{-1}\max\left\{L, 8H_{max}R^3 + 4(n + c_5)R^2\right\} \end{aligned}$$

Auf $B_{\theta R}^n(y_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$ gilt

$$\eta(x) > (1 - \theta^2)^2 R^4$$

und damit auf $N_t \cap B_{\theta R}^n(y_0)$, $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \lambda_{max}^2 &\leqslant (1 - \theta^2)^{-2}R^{-4}\varphi_0^{-1}\max\left\{L, 8H_{max}R^3 + 4(n + c_5)R^2\right\} \\ &\leqslant (1 - \theta^2)^{-2}\varphi_0^{-1} \cdot \max\left\{\sup_{N_0 \cap B_R^n(y_0)} \lambda_{max}^2, 8H_{max}R^{-1} + 4(n + c_5)R^{-2}\right\} \\ &\leqslant c_6 \cdot (1 - \theta^2)^{-2} \cdot \max\left\{\sup_{N_0 \cap B_R^n(y_0)} \lambda_{max}^2, H_{max}R^{-1} + R^{-2}\right\} \end{aligned}$$

mit $c_6 = c_6(\beta_1, \beta_2, n)$. □

Bemerkung 3.7 (i) Wegen $H > 0$ erhält man aus Theorem 3.6 eine obere Schranke für $|A|^2$ in $N_t \cap B_{\theta R}^n(y_0)$

$$|A|^2 \leqslant c_7 \cdot (1 - \theta^2)^{-2} \cdot \max\left\{\sup_{N_0 \cap B_R^n(y_0)} |A|^2, H_{max}R^{-1} + R^{-2}\right\}$$

mit $c_7 = c_7(\beta_1, \beta_2, n)$.

(ii) Die obere Schranke für $H_{max}(y_0, R)$ liefert Satz 2.5. Gilt $N_0 \cap B_{2R}^n(y_0) = \emptyset$ und hat N_t für $t > 0$ in $B_{2R}^n(y_0)$ keinen Rand, so gilt nach Satz 2.5

$$H_{max} \leqslant \frac{c(n)}{R}$$

und damit in $N_t \cap B_{\theta R}^n(y_0)$

$$|A|^2 \leqslant c_8 \cdot (1 - \theta^2)^{-2}\frac{1}{R^2}$$

mit $c_8 = c_8(\beta_1, \beta_2, n)$.

4 Schwache Lösungen des IMCF

Im Allgemeinen existiert eine glatte Lösung des IMCF maximal für ein endliches Zeitintervall. In [HI98] wird ein schwacher Lösungsbegriff als Minimum eines Funktionals eingeführt, bei dem die Lösung nach einem Sprung über ein Gebiet endlichen Maßes weiter existiert. Zudem ermöglicht diese Formulierung die Ursache solcher Sprünge zu verstehen. Für die Flächen einer schwachen Lösung wird in diesem Kapitel $C^{1,1}$-Regularität gezeigt.

Für ein beschränktes Gebiet Ω ist die Gleichung

$$\operatorname{div}_M\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0$$

die Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionals

$$J(v) = \int_\Omega |\nabla v|$$

Bei "eingefrorenem" $|\nabla u|$-Term kann (2.2),

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = |\nabla u|, ,$$

als Euler-Lagrange-Gleichung von

$$J_u(v) = J_u^K(v) := \int_K (|\nabla v| + v|\nabla u|)$$

augefasst werden. Dies legt folgende Definition nahe:

Definition 4.1 *Sei $\Omega \subset M$ offen. $u \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$ heißt schwache Lösung (Sublösung, Superlösung) von (2.2) in Ω, falls*

$$J_u^K(u) \leqslant J_u^K(v) \tag{4.1}$$

für alle $v \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$ (mit $v \leqslant u$, $v \geqslant u$), so dass $\{u \neq v\} \subset\subset \Omega$.
Die Integration erstreckt sich über eine kompakte Menge $K \subset M$ mit $\{u \neq v\} \subset K$.

4.1 Anfangswertproblem

Sei E_0 offen mit $\partial E_0 \in C^1$. u heißt *schwache Lösung von (2.2) mit Anfangsbedingung* E_0, falls

$$(\dagger) \quad u \in C^{0,1}_{loc}(M),\ E_0 = \{u < 0\} \text{ und } u \text{ erfüllt (4.1) in } M \setminus E_0.$$

In der Sprache der geometrischen Maßtheorie läßt sich (†) umformulieren. Sei E_t eine Familie offener Mengen in M mit $E_t \subset E_s$ für $t \leqslant s$, die abgeschlossen unter Vereinigungen $\bigcup_{t_1 \leqslant t \leqslant t_2} E_t$ ist. Definiere u durch $E_t = \{u < t\}$. $(E_t)_{t>0}$ heißt *schwache Lösung des IMCF (2.1) mit Anfangsbedingung* E_0, falls

$$(\dagger\dagger) \quad u \in C^{0,1}_{loc}(M) \quad \text{und für alle} \quad t > 0 \quad \text{minimiert} \quad E_t$$

$$J_u(F) = |\partial^* F \cap K| - \int_{F \cap K} |\nabla u| \quad \text{in} \quad M \setminus E_0$$

d.h. für alle F mit $F \triangle E_t = (E_t \setminus F) \cup (F \setminus E_t) \subset\subset M \setminus E_0$ soll $J_u(E_t) \leqslant J_u(F)$ gelten. Dabei bezeichnet $\partial^* F$ den reduzierten Rand von $F \subset M$ und $|\partial^* F \cap K|$ das $(n-1)$-dimensionale Hausdorffmaß von $\partial^* F \cap K$ [Si83]. (†) und (††) sind äquivalent [HI98].

Motivation

Für eine schwache Lösung u definiere die Mengen $E_t = \{u < t\}$ und $E_t^+ = \text{int}\{u \leqslant t\}$ sowie $N_t = \partial E_t$ und $N_t^+ = \partial E_t^+$. Ist u auch eine glatte Lösung, so gilt $N_t = N_t^+$ für alle $t \in [0, T)$. Die schwache Formulierung läßt dagegen sogar Gebiete endlichen Maßes mit $\nabla u = 0$ und damit $u \equiv t$ für ein $t \in [0, T)$ zu. Dann gilt $N_t \neq N_t^+$ und die entsprechenden Gebiete werden von N_t und N_t^+ umrandet.

Die Mengen E_t und E_t^+ lösen Hindernisprobleme im folgenden Sinn (vgl. [HI98]). Sei $\Omega \subset M$ offen. E heißt *minimierende Hülle in* Ω, falls

$$|\partial^* E \cap K| \leqslant |\partial^* F \cap K| \tag{4.2}$$

für alle $F \supset E$ mit $F \setminus E \subset\subset \Omega$ und alle kompakten K mit $F \setminus E = F \triangle E \subset K$. Folgt aus Gleichheit in (4.2)

$$F \cap K = E \cap K \qquad \text{fast überall,}$$

so heißt E *strikt minimierende Hülle.*
Für eine messbare Menge E sei $E' = E'_\Omega$ der Durchschnitt aller strikt minimierenden Hüllen in Ω, die E enthalten. Dann ist E' selber strikt minimierende Hülle und offen. E' heißt die *strikt minimierende Hülle von* E *in* Ω.

Satz 4.2 *[HI98] M habe keine kompakte Komponente und u erfülle* (†)*. Dann gilt*

(i) Für $t > 0$ ist E_t minimierende Hülle in M.

(ii) Für $t \geqslant 0$ ist E_t^+ strikt minimierende Hülle in M.

(iii) Für $t \geqslant 0$ gilt $E'_t = E_t^+$, falls E_t^+ relativ kompakt ist.

(iv) Für $t > 0$ gilt $|\partial E_t| = |\partial E_t^+|$, falls E_t^+ relativ kompakt ist. Dies gilt auch für $t = 0$ genau dann, wenn E_0 minimierende Hülle ist.

Das Problem ist somit verwandt mit dem folgenden klassischen: Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$ und $\varphi, \psi : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ gegeben. Finde eine Funktion $u : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ mit $u \geqslant \psi$ in Ω und $u = \varphi$ auf $\partial\Omega$, so dass graph u die Oberfläche minimiert.
Unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen folgt, dass in

$$K = \{v \in C^{0,1}(\Omega) : v \geqslant \psi, v_{|\partial\Omega} = \varphi\}$$

eine $C^{1,1}$-Lösung existiert [Ge85]. Im Fall des IMCF werden Hindernis und Oberfläche gleichzeitig gesucht. Dennoch ist zu erwarten, dass man auch für die N_t und N_t^+ aus der schwachen Formulierung des IMCF $C^{1,1}$-Regularität erhält.

Vereinfacht läßt sich der schwache Fluss wie folgt beschreiben: Solange $\nabla u \neq 0$ gilt, bewegen sich die Flächen $N_t = N_t^+$ unter dem klassischen IMCF. Ein Sprung, charakterisiert durch $N_t \neq N_t^+$, tritt immer dann auf, wenn dadurch bei gleichbleibender Oberfläche zusätzliches Volumen eingeschlossen werden kann. Dieses Verhalten wird durch die Numerik und die daraus gewonnenen Bilder [Pa98] veranschaulicht. Da bei einem Sprung stets ein Gebiet endlichen Maßes überstrichen wird, kann es höchstens abzählbar viele solcher Sprünge geben.

Bemerkung 4.3 Sei u eine Lösung von (†). Regularitätsergebnisse aus der geometrischen Maßtheorie zeigen im Fall $n < 8$, dass die Flächen $N_t = \partial\{u < t\}$ und $N_t^+ = \partial\{u > t\}$ für $t > 0$ lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Abschätzungen besitzen, die nur von der lokalen Lipschitz-Schranke von u abhängen [HI98].

Eigenschaften des IMCF

Die folgenden Eigenschaften des IMCF sind von zentraler Bedeutung im Existenzbeweis einer schwachen Lösung. Zu den Beweisen siehe [HI98].

Theorem 4.4 (Kompaktheitssatz) *Sei u_i eine Folge von Lösungen von (4.1) in offenen Mengen $\Omega_i \subset M$, für die gilt*

$$u_i \to u\,, \qquad \Omega_i \to \Omega$$

lokal gleichmäßig. Zudem gelte für große i und jedes $K \subset\subset \Omega$

$$\sup_K |\nabla u_i| \leqslant C(K)$$

Dann ist u eine Lösung von (4.1) in Ω.

Bemerkung 4.5 Mit Mitteln der geometrischen Maßtheorie läßt sich zeigen:
(i) Klassische Lösungen des IMCF sind auch schwache Lösungen. Für glattes u mit $\nabla u \neq 0$ erhält man also insbesondere aus (2.2) nicht nur einen kritischen Punkt von (4.1) sondern einen echten Minimierer.
(ii) Ist u eine schwache Lösung von (2.2), so auch $\min(u, B)$ für jede Konstante B.

Dies bedeutet, dass die Fächen N_t gerne instantan nach Unendlich springen würden. Insbesondere erhält man ohne zusätzliche Bedingungen keine Eindeutigkeit. Daher sucht man nach Lösungen, für die gilt

$$\{s \leqslant u \leqslant t\} \qquad \text{kompakt} \quad \forall\, 0 \leqslant s < t \tag{4.3}$$

(iii) Sind $(E_t)_{t>0}$ und $(F_t)_{t>0}$ Lösungen von (††) in einer Mannigfaltigkeit M und gilt für die Anfangsbedingungen $E_0 \subseteq F_0$, so folgt $E_t \subseteq F_t$ solange E_t relativ kompakt in M ist. Daraus ergibt sich insbesondere, dass zu einem gegebenen E_0 höchstens eine Lösung u existiert, so dass die Mengen $E_t = \{u < t\}$ relativ kompakt sind.

Existenz einer schwachen Lösung

Um eine Lösung u zu erhalten, die (4.3) erfüllt und deren Flächen N_t somit nicht in endlicher Zeit ins Unendliche springen, benötigt man eine zusätzliche Voraussetzung. Es genügt die Existenz einer schwachen Sublösung $v \in C^{0,1}_{loc}(M)$ mit (4.3) und relativ kompakter Anfangsbedingung $F_0 = \{v < 0\}$. Die Flächen $\partial\{u < t\}$ haben dann $\partial\{v < t\}$ als Hindernis vor sich. Beachte, dass die Menge F_0 beliebig groß sein kann, da Probleme nur "weit draußen" auftreten. Zudem kann stets o.B.d.A $E_0 \subset F_0$ angenommen werden.

Bemerkung 4.6 Im Fall $M = \mathbf{R}^n$ existiert ein $R_0 > 0$ mit $E_0 \subset B_{R_0}(0)$. Eine glatte mögliche Sublösung ist dann $v(x) = n\,(\ln|x| - \ln R_0)$ mit Anfangsbedingung $F_0 = B_{R_0}(0)$. Für diese gilt $\nabla v \neq 0$.

Theorem 4.7 *[HI98] Sei $(M, \bar{g})$ eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension n. Es existiere eine Sublösung $v \in C^{0,1}_{loc}(M)$ mit (4.3) und relativ kompakter Anfangsbedingung $F_0 = \{v < 0\}$. Für jede nichtleere, relativ kompakte, glatte offene Teilmenge $E_0 \subset M$ existiert dann eine Lösung $u \in C^{0,1}_{loc}(M)$ von (†) mit (4.3) und Anfangsbedingung E_0, die in $M \setminus E_0$ eindeutig ist. Sie erfüllt für fast alle $x \in M \setminus E_0$ die Abschätzung*

$$|\nabla u(x)| \leqslant \sup_{\partial E_0 \cap B_r(x)} H_+ + \frac{C(n)}{r} \tag{4.4}$$

für jedes $0 < r \leqslant \sigma(x)$ (Definition 2.3). Dabei ist $H_+ = max\,(0, H_{\partial E_0})$.

4.2 Elliptische Regularisierung

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 4.7 erfüllt. Die degeneriert elliptische Gleichung (2.2) läßt sich durch eine Familie elliptischer Gleichungen approximieren. Die Lösungen u^ε dieser Familie liefern zusammen mit einem geeigneten Konvergenzbegriff die gesuchte Lösung. Für die gegebene Sublösung v und $L > 0$ setze $F_L = \{v < L\}$ und $\Omega_L = F_L \setminus \bar{E}_0$. Betrachte für $\varepsilon > 0$ die elliptische Gleichung

$$
(*)_\varepsilon \begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u^\varepsilon}{\sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2+\varepsilon^2}}\right) - \sqrt{|\nabla u^\varepsilon|^2+\varepsilon^2} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_L \\ \qquad\qquad u^\varepsilon = 0 \quad \text{auf} \quad \partial E_0 \\ \qquad\qquad u^\varepsilon = L-2 \quad \text{auf} \quad \partial F_L \end{cases}
$$

Der Grenzübergang $L \to \infty$ entspricht $\varepsilon \to 0$, siehe Bemerkung 4.9.

Geometrische Interpretation

Die Lösungen u^ε von $(*)_\varepsilon$ liefern glatte Lösungen des IMCF eine Dimension höher. Betrachte dazu die Graphen

$$
N_t^\varepsilon = \operatorname{graph}\left(\frac{u^\varepsilon(x)}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad -\infty < t < \infty
$$

Sie sind translatierende Lösungen des IMCF in $M \times \mathbb{R}$. Definiere

$$
U^\varepsilon(x,z) = u^\varepsilon(x) - \varepsilon z\,, \quad (x,z) \in \Omega_L \times \mathbb{R}
$$

Dann gilt $N_t^\varepsilon = \{U^\varepsilon = t\}$. Ist u^ε glatt, so genügt U^ε der Niveauflächenformulierung (2.2) in $\Omega_L \times \mathbb{R}$ genau dann, wenn u^ε $(*)_\varepsilon$ in Ω_L erfüllt.

Lemma 4.8 *[HI98] Die Sublösung v sei glatt mit $\nabla v \neq 0$. Dann gibt es zu jedem $L > 0$ ein $\varepsilon(L) > 0$, so dass für $\varepsilon \leqslant \varepsilon(L)$ eine glatte Lösung von $(*)_\varepsilon$ existiert. Für diese gilt*

$$
\begin{aligned}
&(i) && u^\varepsilon \geqslant -\varepsilon \quad \text{in} \quad \bar\Omega_L\,, \quad u^\varepsilon \geqslant v-2 \quad \text{in} \quad \bar F_L \setminus F_0 \\
&(ii) && |\nabla u^\varepsilon| \leqslant H_+ + \varepsilon \quad \text{auf} \quad \partial E_0 \\
& && |\nabla u^\varepsilon| \leqslant C(L) \quad \text{auf} \quad \partial F_L \\
&(iii) && |\nabla u^\varepsilon(x)| \leqslant \max_{\partial\Omega_L \cap B_r(x)} |\nabla u^\varepsilon| + \varepsilon + \frac{C(n)}{r}\,, \quad x \in \bar\Omega_L\,, \quad 0 < r \leqslant \sigma(x)
\end{aligned}
$$

Dabei ist $H_+ = \max(0, H_{\partial E_0})$.

Bemerkung 4.9 (i) Aus dem Beweis von Lemma 4.8 (siehe [HI98]) wird ersichtlich, dass $(*)_\varepsilon$ nur für $\varepsilon \leqslant \varepsilon(L)$ mit $\varepsilon(L) \to 0$ für $L \to \infty$ lösbar ist.
(ii) Im Folgenden sei stets $\varepsilon = \varepsilon(L)$.

Beweis von 4.7 (vgl. [HI98]) (i) Seien die Voraussetzungen von Lemma 4.8 erfüllt. $K \subset M \setminus E_0$ sei kompakt. In K gilt dann nach Lemma 4.8 für $L \gg 1$, $\varepsilon = \varepsilon(L) \leqslant 1$ und $\sigma = \min_K \sigma(x) > 0$

$$
\begin{aligned}
|\nabla u^\varepsilon(x)| &\leqslant \max_{\partial E_0 \cap B_\sigma(x)} H_+ + 2\varepsilon + \frac{C(n)}{\sigma} \\
&\leqslant \max_{\partial E_0} H_+ + 2 + \frac{C(n)}{\sigma} \leqslant C(K)
\end{aligned}
$$

Betrachte nun Folgen $L_i \to \infty$, $\varepsilon_i = \varepsilon(L_i)$ und $u_i = u^{\varepsilon_i}$. Nach dem Theorem von Arzela-Ascoli existiert eine Teilfolge u_i und eine lokale Lipschitz-Funktion u, so dass

$$u_i \to u \quad \text{lokal gleichmäßig auf} \quad M \setminus E_0$$

Aus Lemma 4.8 folgt zudem $u \geqslant 0$ in $M \setminus E_0$ und $u \to \infty$ für $x \to \infty$.
Definiere $U_i(x,z) = u_i(x) - \varepsilon_i z$ und die lokale Lipschitz-Funktion $U(x,z) = u(x)$. Dann gilt

$$U_i \to U \quad \text{lokal gleichmäßig auf} \quad (M \setminus E_0) \times \mathbb{R}$$

Die Mengen

$$N_t^i := \{U_i = t\} = \operatorname{graph}\left(\frac{u_i}{\varepsilon_i} - \frac{t}{\varepsilon_i}\right), \quad -\infty < t < \infty$$

sind glatte Lösungen des IMCF in $\Omega_{L_i} \times \mathbb{R}$ mit $H > 0$. Nach Bemerkung 4.5 lösen die U_i dann auch das schwache Problem (4.1) in $\Omega_{L_i} \times \mathbb{R}$. Aus dem Kompaktheitssatz 4.4 folgt, dass U eine Lösung von (4.1) in $(M \setminus E_0) \times \mathbb{R}$ ist.
Mit Hilfe geeigneter Testfunktionen zeigt man, dass u Lösung von (4.1) in $M \setminus E_0$ ist. Setze nun u negativ auf E_0 so fort, dass $E_0 = \{u < 0\}$.

(ii) v sei nun beliebig und $B > 0$. Wähle eine offene Menge W_B mit glattem Rand und $F_B \subset\subset W_B \subset\subset M$. Nahe ∂W_B ändert man die Metrik in W_B derart, dass eine vollständige Metrik $\bar{g}_B$ auf W_B entsteht, für die gilt:

$$\bar{g}_B = \bar{g} \quad \text{auf} \quad F_B\,, \quad \bar{g}_B \geqslant \bar{g} \quad \text{auf} \quad W_B$$

und in der Nähe von ∂W_B ist $\bar{g}_B$ isometrisch zu einem Riemannschen Kegel der Form

$$\bar{g}_B = Cs^2 g_{\partial W_B} + ds^2 \qquad \text{in} \quad \partial W_B \times [C, \infty)$$

Dann existiert ein $\alpha > 0$, so dass $\alpha \log s$ eine glatte Sublösung von (4.1) auf $\partial W_B \times [C, \infty)$ ist. Nach (i) gibt es dann eine Lösung u_B von (†) in $(M_B, \bar{g}_B)$ mit (4.3) und Anfangsbedingung E_0. Aus (4.4) folgt, dass für jedes $B > 0$ und fast alle $x \in F_B$ gilt

$$|\nabla u_B(x)| \leqslant \sup_{\partial E_0 \cap B_r(x)} H_+ + \frac{C(n)}{r}\,, \quad r \leqslant \sigma(x)$$

Daher existiert eine Folge $B_i \to \infty$ und eine lokale Lipschitz-Funktion u mit $u_{B_i} \to u$ lokal gleichmäßig auf $M \setminus E_0$. Nach Theorem 4.4 ist u dann auch Lösung von (4.1) in M, für die (4.4) erfüllt ist.
Zeige noch $u \geqslant v$ in M. Nach Bemerkung 4.5 ist $\min(v, B)$ schwache Sublösung von (2.2) in W_B bezüglich $\bar{g}$. Wegen $\bar{g} = \bar{g}_B$ für $v < B$ und $\bar{g}_B \geqslant \bar{g}$ in W_B ist $\min(v, B)$ auch schwache Sublösung von (2.2) in W_B bezüglich $\bar{g}_B$. Aus Bemerkung 4.5 (iii) folgt, dass $u_B \geqslant v$ in F_B für alle B, d.h. $u \geqslant v$. Die Eindeutigkeit liefert wieder Bemerkung 4.5.

$\square$

4.3 $|A|^2$-Schranken der Flächen N_t^ε ($M = \mathbf{R}^n$)

Die $C^{1,1}$-Regularität der Flächen N_t und N_t^+ ist eine Konsequenz gleichmäßiger $|A|^2$-Schranken der Flächen N_t^ε, die $N_t \times \mathbf{R}$ im Fall $N_t = N_t^+$ approximieren.
Es sei $M = \mathbf{R}^n$ und für $E_0 \subset \mathbf{R}^n$ seien die Voraussetzungen für Theorem 4.7 erfüllt. Dann existieren nach Bemerkung 4.6 eine geeignete Sublösung v und somit eine Lösung $u \in C^{1,0}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ von (†) mit (4.3), die durch glatte Lösungen u^ε von $(\star)_\varepsilon$ approximiert wird.
Um die innere $|A|^2$-Schranke aus Theorem 3.6 für ein festes ε auf die Flächen $N_t^\varepsilon \cap B_\rho^{n+1}(q)$ anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass sie gleichmäßig sternförmig bezüglich einem von t unabhängigen $z \in \mathbf{R}^{n+1}$ sind. Dies folgt aus lokal gleichmäßigen $C^{1,\alpha}$-Schranken, die ausreichen, die Normalen an die Flächen N_t^ε zu kontrollieren.

Mit lokal gleichmäßigen $C^{1,\alpha}$-Schranken der Flächen N_t^ε in t und ε sei im Folgenden gemeint: *Für alle $q \in (\boldsymbol{R}^n \setminus \bar{E}_0) \times \boldsymbol{R}$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für $d = dist(q, \partial E_0 \times \boldsymbol{R})$ und alle t, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ die Flächenstücke $N_t^\varepsilon \cap B_d^{n+1}(q)$ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε besitzen. Insbesondere soll $B_d^{n+1}(q) \subset \Omega_{L_0} \times \boldsymbol{R}$ gelten.*

Sei obige Bedingung erfüllt und $q \in (\mathbf{R}^n \setminus \bar{E}_0) \times \mathbf{R}$ gegeben. Dann existiert ein $R_0 \in (0, \frac{d}{2})$ und ein $K < \infty$, so dass für t, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ und $p \in N_t^\varepsilon \cap B_{\frac{d}{2}}^{n+1}(q)$ gilt: Das Flächenstück $N_t^\varepsilon \cap B_{R_0}^{n+1}(p)$ läßt sich als Graph einer $C^{1,\alpha}$-Funktion w_p über $T_pN_t^\varepsilon$ schreiben mit

$$w_p(0) = 0\,, \quad Dw_p(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|w_p\|_{1,\alpha} \leqslant K \tag{4.5}$$

Nach Lemma 4.8 sind die w_p sogar glatte Funktionen. Eine $|A|^2$-Schranke an die Flächen N_t^ε entspricht somit einer C^2-Schranke an die Funktionen w_p.

Lokale Sternförmigkeit

Mit Hilfe von (4.5) soll zunächst gezeigt werden, dass für geeignetes $\rho > 0$

$$\langle \nu(p), \nu(q) \rangle \geqslant \gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{in} \quad B_\rho^{n+1}(q)$$

Aus dieser Abschätzung folgt dann unmittelbar die lokale Sternförmigkeit der Flächen N_t^ε bezüglich einem $z \in \mathbf{R}^{n+1}$, das auf der durch $\nu(q)$ bestimmten Geraden liegt.

Für $(y, w_p(y)) \in N_t^\varepsilon \cap B_{R_0}^{n+1}(p)$ mit einem $y \in T_pN_t^\varepsilon \cap B_{R_0}^n(0)$ gilt

$$|Dw_p(y)| = |Dw_p(y) - Dw_p(0)| \leqslant K|y|^\alpha$$

Wähle o.B.d.A. R_0 so klein, dass $KR_0^\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Damit erhält man für $(y, w_p(y)) \in N_t^\varepsilon \cap B_{R_0}^{n+1}(p) : |w_p(y)| \leqslant \frac{1}{2}R_0$. Sei nun $R = \frac{\sqrt{3}}{2}R_0$. Dann gilt:

Für alle $p \in N_t^\varepsilon \cap B_{\frac{d}{2}}^{n+1}(q)$ kann N_t^ε lokal um p als Graph einer $C^{1,\alpha}$-Funktion $w_p : T_pN_t^\varepsilon \cap B_R^n(0) \to \mathbf{R}$ geschrieben werden, für die gilt

$$w_p(0) = 0\,, \quad Dw_p(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|w_p\|_{1,\alpha} \leqslant K$$

Sei o.B.d.A. R_0 jetzt zusätzlich so klein, dass $|Dw_p(y)| \leqslant \frac{1}{100}$ in $T_pN_t^\varepsilon \cap B_R^n(0)$. Für $y \in T_pN_t^\varepsilon \cap B_R^n(0)$ gilt dann

$$|w_p(y)| \leqslant \delta \qquad \text{mit} \quad \delta := \frac{1}{100}R$$

d.h. $\operatorname{graph} w_p$ über $T_pN_t^\varepsilon \cap B_R^n(0)$ liegt zwischen zwei Ebenen, die parallel zu $T_pN_t^\varepsilon$ um $+\delta$ bzw. $-\delta$ verschoben sind.

Sei nun $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ fest. Dann existiert genau ein t_ε mit $q \in N_{t_\varepsilon}^\varepsilon$. Wähle q als Ursprung von $\mathbf{R}^{n+1}$ und $\nu(q)$ als τ_{n+1}-Richtung. Für $p \in B_{\frac{R}{10}}^{n+1}(q)$ existiert genau ein t mit $p \in N_t^\varepsilon$. Wähle die Normale $\nu_+(p)$ an N_t^ε so, dass

$$\gamma := \langle \nu_+(p), \tau_{n+1} \rangle \geqslant 0$$

Dann gilt $\nu_+(p) = \pm\nu(p)$. Zeige $\gamma \geqslant \gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $B_{\frac{R}{10}}^{n+1}(q)$.
Im Fall $t = t_\varepsilon$ gilt mit $p = (y, w_q(y))$

$$\nu_+(p) = \frac{\langle -Dw_q(y), 1 \rangle}{\sqrt{1 + |Dw_q(y)|^2}}$$

also $\langle \nu_+(p), \tau_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|Dw_q(y)|^2}} > \frac{100}{101}$.
Im Fall $t \neq t_\varepsilon$ kann o.B.d.A. $\gamma < 1$ angenommen werden, da eine obere Schranke an γ gesucht wird.
τ_1 sei so gewählt, dass $\nu_+(p) = \sqrt{1-\gamma^2}\tau_1 + \gamma\tau_{n+1}$, also insbesondere $\langle \tau_1, \tau_{n+1} \rangle = 0$. Dann liegt

$$\begin{gathered} \operatorname{graph} w_p \subset N_t^\varepsilon \text{ über } T_pN_t^\varepsilon \cap B_R^n(0) \text{ zwischen } A \text{ und } B \\ \operatorname{graph} w_q \subset N_{t_\varepsilon}^\varepsilon \text{ über } T_qN_{t_\varepsilon}^\varepsilon \cap B_R^n(0) \text{ zwischen } C \text{ und } D \end{gathered}$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \langle x, \nu_+(p) \rangle = \langle p, \nu_+(p) \rangle + \delta\} \\ B &= \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \langle x, \nu_+(p) \rangle = \langle p, \nu_+(p) \rangle - \delta\} \\ C &= \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \langle x, \tau_{n+1} \rangle = \delta\} \\ D &= \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : \langle x, \tau_{n+1} \rangle = -\delta\} \end{aligned}$$

(siehe Skizze; $\tilde{p}$ bezeichnet die Projektion von p auf die (τ_1, τ_{n+1})-Ebene).

Ein Schnittpunkt von A und D ist

$$a = \alpha\tau_1 - \delta\tau_{n+1} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\langle p, \nu_+(p)\rangle + \delta(\gamma+1)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

B und C schneiden sich in

$$b = \beta\tau_1 + \delta\tau_{n+1} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{\langle p, \nu_+(p)\rangle - \delta(\gamma+1)}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

Gilt nun $\gamma < \gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so folgt

$$|\alpha|, |\beta|, |p - \tilde{a}|, |p - \tilde{b}| < R \qquad \text{mit}$$

$$\tilde{a} = a - \delta\nu_+(p)\ , \quad \tilde{b} = b + \delta\nu_+(p) \quad \in T_p N_t^\varepsilon$$

Dies bedeutet, dass sich N_t^ε und $N_{t_\varepsilon}^\varepsilon$ schneiden, was im Widerspruch zu $t \neq t_\varepsilon$ steht. Es muss noch $\nu_+(p) = \nu(p)$ gezeigt werden. Sei dazu $p \in B^{n+1}_{\frac{1}{10}R}(q)$ beliebig und $\eta : [0,1] \to B^{n+1}_{\frac{1}{10}R}(q)$ sei Weg von q nach p. Dann ist die Funktion $s \to \langle \nu(\eta(s)), \tau_{n+1}\rangle$ stetig und kann somit wegen $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$ ihr Vorzeichen nicht ändern.

Sei $z = -m\tau_{n+1}$ mit $m = \frac{1}{5}\gamma_0^{-1}R$. Dann gilt in $N_t^\varepsilon \cap B^{n+1}_{\frac{1}{10}R}(q)$

$$\frac{1}{10}R \leqslant \langle p - z, \nu(p)\rangle \leqslant \frac{1}{10}\left(1 + 2\gamma_0^{-1}\right)R$$

Damit ist gezeigt

Lemma 4.10 *Besitzen die Flächen N_t^ε lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε, so existieren zu jedem $q \in (\boldsymbol{R}^n \setminus \bar{E}_0) \times \boldsymbol{R}$ Konstanten ε_0, $\rho > 0$, so dass gilt: zu jedem $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ findet man ein $z \in \boldsymbol{R}^n$ mit $|z|$ unabhängig von ε und*

$$0 < \beta_1\rho \leqslant \langle p - z, \nu(p)\rangle \leqslant \beta_2\rho \quad \text{in} \quad N_t^\varepsilon \cap B_\rho^{n+1}(q)$$

Dabei sind β_1 und β_2 absolute Konstanten und ρ hängt nur von der lokalen $C^{1,\alpha}$-Schranke der Flächen N_t^ε ab.

Korollar 4.11 *Besitzen die Flächen N_t^ε lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε, so ist $|A|^2$ auf N_t^ε lokal gleichmäßig beschränkt, d.h. für alle $q \in (\boldsymbol{R}^n \setminus \bar{E}_0) \times \boldsymbol{R}$ existieren ε_0, $\rho > 0$, so dass für alle t und $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ gilt*

$$|A|^2 \leqslant \frac{c(n)}{\rho^2} \quad \text{in} \quad B_\rho^{n+1}(q) \cap N_t^\varepsilon$$

ρ hängt dabei nur von der lokalen $C^{1,\alpha}$-Schranke der Flächen N_t^ε ab.

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 4.10 und Theorem 3.6 bzw. Bemerkung 3.7 mit $\theta = \frac{1}{2}$. Beachte, dass der Fluss der Flächen N_t^ε zu jedem Zeitpunkt schon unendlich lange existiert.

□

Bemerkung 4.12 Aus der Konstruktion von ρ folgt, dass ein $C_1 < \infty$ existiert, so dass sich für alle t, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ und $p \in N_t^\varepsilon \cap B_{\frac{\rho}{2}}^{n+1}(q)$ das Flächenstück $N_t^\varepsilon \cap B_{\frac{\rho}{2}}^{n+1}(p)$ als Graph einer C^2-Funktion w_p über $T_pN_t^\varepsilon$ schreiben läßt, für die gilt

$$w_p(0) = 0\,, \quad Dw_p(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|w_p\|_{2,0} < C_1$$

4.4 $C^{1,1}$-Regularität der Flächen $N_t^{(+)}$ $(M = \mathbf{R}^n)$

Es sei wieder $M = \mathbf{R}^n$ und $E_0 \subset \mathbf{R}^n$ erfülle die Voraussetzungen von Theorem 4.7. Dann gilt für die Lösung u von (†) mit (4.3) das folgende Theorem.

Theorem 4.13 *Besitzen die Flächen N_t^ε lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε und sind die Flächen N_t und N_t^+ für $t > 0$ in C^1 und können lokal gleichmäßig als Graph geschrieben werden, so besitzen die Flächen N_t und N_t^+ für $t > 0$ lokal gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken, d.h. für alle $y \in \boldsymbol{R}^n \setminus \bar{E}_0$ existiert ein $\rho > 0$, so dass für $t > 0$ die Flächenstücke*

$$N_t \cap B_\rho^n(y) \qquad \text{und} \qquad N_t^+ \cap B_\rho^n(y)$$

gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken besitzen.

Beweis: Sei $y \in \mathbf{R}^n \setminus \bar{E}_0$ und $Y = (y, 0) \in (\mathbf{R}^n \setminus \bar{E}_0) \times \mathbf{R}$. Nach Voraussetzung existieren $\varepsilon_0 > 0$, $C_1 < \infty$, $\rho > 0$ und $R > 0$, so dass gilt

- Für alle $t > 0$, $x \in N_t^{(+)} \cap B_\rho^n(y)$ kann $N_t^{(+)}$ lokal um x als Graph einer Funktion

  $$s_x : T_xN_t^{(+)} \cap B_R^{n-1}(0) \longrightarrow \mathbf{R}$$

  geschrieben werden.

- Für alle t, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ und $p \in N_t^\varepsilon \cap B_\rho^{n+1}(Y)$ kann $N_t^\varepsilon \cap B_R^{n+1}(p)$ als Graph einer C^2-Funktion w_p über $T_pN_t^\varepsilon$ geschrieben werden, für die gilt

  $$w_p(0) = 0\,, \quad Dw_p(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|w_p\|_{2,0} < C_1$$

(i) Sei $x_0 \in N_{t_0} \cap B^n_\rho(y)$ mit $N_{t_0} = N^+_{t_0}$. Betrachte eine Folge $\varepsilon_i \to 0$ mit $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_0$, für die die Lösungen $u_i = u^{\varepsilon_i}$ des regularisierten Problems auf $M \setminus E_0$ lokal gleichmäßig gegen u konvergieren. Zu jedem ε_i existiert genau ein t_i mit $X_0 = (x_0, 0) \in N^{\varepsilon_i}_{t_i} \cap B^{n+1}_\rho(Y)$. Dann gilt $u_i(x_0) = t_i$ für alle i. Aus $u_i \to u$ und $u(x_0) = t_0$ folgt dann

$$\lim_{i\to\infty} t_i = t_0$$

Für jedes i läßt sich $N^{\varepsilon_i}_{t_i} \cap B^{n+1}_R(X_0)$ als Graph einer C^2-Funktion w_i über $T_{X_0}N^{\varepsilon_i}_{t_i}$ schreiben, für die gilt

$$w_i(0) = 0\,, \quad Dw_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|w_i\|_{2,0} < C_1$$

Die Normalen ν_i an $N^{\varepsilon_i}_{t_i}$ im Punkt X_0 bilden eine Folge in S^n. Es existiert also ein $\tilde\nu \in S^n$ und eine Teilfolge - wieder mit ν_i bezeichnet - mit $\nu_i \to \tilde\nu$. Für $i \gg 1$ läßt sich dann $N^{\varepsilon_i}_{t_i} \cap B^{n+1}_R(X_0)$ als Graph einer C^2-Funktion $\tilde w_i$ über

$$\tilde T = \{\langle X, \tilde\nu\rangle = \langle X_0, \tilde\nu\rangle\}$$

schreiben mit

$$\tilde w_i(0) = 0\,, \quad D\tilde w_i(0) \to 0 \quad \text{und} \quad \|\tilde w_i\|_{2,0} \leqslant 2C_1$$

Dabei sei X_0 mit $0 \in \tilde T$ identifiziert. Unabhängig von x_0 kann R so verkleinert werden, dass gilt (vgl. Beweis von Lemma 4.11): für $i \gg 1$ läßt sich $N^{\varepsilon_i}_{t_i}$ lokal um X_0 als Graph einer C^2-Funktion

$$\tilde w_i : \tilde T \cap B^n_R(0) \longrightarrow \mathbf{R}$$

schreiben, für die gilt

$$\tilde w_i(0) = 0\,, \quad D\tilde w_i(0) \to 0 \quad \text{und} \quad \|\tilde w_i\|_{2,0} \leqslant 2C_1$$

Nach Arzela-Ascoli existiert eine weitere Teilfoge - auch mit $\tilde w_i$ bezeichnet - und eine C^1-Funktion $\tilde w : \tilde T \cap B^n_R(0) \to \mathbf{R}$ mit

$$\tilde w_i \longrightarrow \tilde w \quad \text{in} \quad C^1(\tilde T \cap B^n_R(0))$$

und damit $\tilde w(0) = 0$ und $D\tilde w(0) = 0$. Daraus folgt $X_0 \in \operatorname{graph} \tilde w$ und $\tilde T = T_{X_0} \operatorname{graph} \tilde w$. Wegen von i unabhängigen C^2-Schranken gilt sogar

$$\tilde w \in C^{1,1}(\tilde T \cap B^n_R(0)) \quad \text{mit} \quad \|\tilde w\|_{1,1} \leqslant 2C_1$$

Nach Voraussetzung ist $\{U = t_0\} = N_{t_0} \times \mathbf{R}$ eine C^1-Fläche und kann lokal um X_0 als Graph von

$$S_{X_0} : T_{X_0}\{U = t_0\} \cap B^n_R(0) \longrightarrow \mathbf{R}$$

geschrieben werden. Zeige nun: $\operatorname{graph} \tilde w = \operatorname{graph} S_{X_0}$.

Sei $p \in \operatorname{graph} \tilde{w}$. Dann existiert eine Folge $p_i \in \operatorname{graph} \tilde{w}_i \subset N_{t_i}^{\varepsilon_i}$ mit $\lim_{i\to\infty} p_i = p$. Damit folgt

$$
\begin{aligned}
|U^i(p_i) - U(p)| &\leqslant |U^i(p_i) - U^i(p)| + |U^i(p) - U(p)| \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

wegen der gleichgradigen Stetigkeit der U^i und der Konvergenz $U^i \to U$. Mit $U^i(p_i) = t_i$ folgt dann

$$
U(p) = \lim_{i\to\infty} U^i(p_i) = \lim_{i\to\infty} t_i = t_0
$$

d.h. $\operatorname{graph} \tilde{w} \subset \{U = t_0\}$ und damit auch $\tilde{T} = T_{X_0}\{U = t_0\}$. Dann muss aber auch $\operatorname{graph} \tilde{w} = \operatorname{graph} S_{X_0}$ gelten. Wegen $\{U = t_0\} = N_{t_0} \times \mathbf{R}$ gilt dann: N_{t_0} kann lokal um x_0 als Graph einer $C^{1,1}$-Funktion

$$
\tilde{w} : T_{x_0} N_{t_0} \cap B_R^{n-1}(0) \longrightarrow \mathbf{R}
$$

geschrieben werden, für die gilt

$$
\tilde{w}(0) = 0\,, \quad D\tilde{w}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|\tilde{w}\|_{1,1} \leqslant 2C_1
$$

Sowohl R als auch C_1 hängen von y aber nicht x_0 ab.

(ii) Sei nun $x_0 \in N_{t_0}^+ \cap B_\rho^n(y)$ mit $N_{t_0}^+ \neq N_{t_0}$. Da es nur abzählbar viele solcher t_0 gibt, existiert eine Folge $x_i \in N_{t_i} \cap B_\rho^n(y)$ mit $t_i > t_0$, $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$ und damit $\lim_{i\to\infty} t_i = t_0$. Für $i \gg 1$ gilt zudem $N_{t_i} = N_{t_i}^+$. Nach (i) lassen sich die Flächenstücke $N_{t_i} \cap B_R^n(x_i)$ als Graph einer $C^{1,1}$-Funktion $\tilde{w}_i$ über $T_{x_i} N_{t_i}$ schreiben, für die gilt

$$
\tilde{w}_i(0) = 0\,, \quad D\tilde{w}_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|\tilde{w}_i\|_{1,1} \leqslant 2C_1
$$

Betrachte die Folge der Normalen $\tilde{\nu}_i \in S^{n-1}$ an N_{t_i} im Punkt x_i. Dann existiert ein $\hat{\nu} \in S^{n-1}$ und eine Teilfolge - mit $\tilde{\nu}_i$ bezeichnet - mit $\tilde{\nu}_i \to \hat{\nu}$. Für $i \gg 1$ lassen sich dann die $N_{t_i} \cap B_R^n(x_i)$ als Graph einer $C^{1,1}$-Funktion $\hat{w}_i$ über

$$
\hat{T} = \{\langle x, \hat{\nu}\rangle = \langle x_0, \hat{\nu}\rangle\}
$$

schreiben mit

$$
\hat{w}_i(0) \to 0\,, \quad D\hat{w}_i(0) \to 0 \quad \text{und} \quad \|\hat{w}_i\|_{1,1} \leqslant 3C_1
$$

Dann lassen sich die N_{t_i} für $i \gg 1$ lokal um x_i als Graph einer $C^{1,1}$-Funktion

$$
\hat{w}_i : \hat{T} \cap B_{\frac{R}{2}}^{n-1}(0) \longrightarrow \mathbf{R}
$$

schreiben mit

$$
\hat{w}_i(0) \to 0\,, \quad D\hat{w}_i(0) \to 0 \quad \text{und} \quad \|\hat{w}_i\|_{1,1} \leqslant 3C_1
$$

Somit existiert eine weitere Teilfolge - wieder $\hat{w}_i$ - und eine C^1-Funktion $\hat{w} : \hat{T} \cap B^{n-1}_{\frac{R}{2}}(0) \to \mathbf{R}$ mit

$$\hat{w}_i \longrightarrow \hat{w} \quad \text{in} \quad C^1(\hat{T} \cap B^{n-1}_{\frac{R}{2}}(0))$$

und $\hat{w}(0) = 0$, $D\hat{w}(0) = 0$. Damit gilt $x_0 \in \operatorname{graph} \hat{w}$ und $\hat{T} = T_{x_0}\operatorname{graph} \hat{w}$. Wegen gleichmäßiger $C^{1,1}$-Schranken für die $\hat{w}_i$ gilt sogar

$$\hat{w} \in C^{1,1}(\hat{T} \cap B^{n-1}_{\frac{R}{2}}(0)) \quad \text{mit} \quad \|\hat{w}\|_{1,1} \leqslant 3C_1$$

Auch $N^+_{t_0}$ läßt sich lokal um x_0 als Graph von

$$s_{x_0} : T_{x_0}N^+_{t_0} \cap B^{n-1}_{\frac{R}{2}}(0) \longrightarrow \mathbf{R}$$

schreiben. Zeige: $\operatorname{graph} \hat{w} = \operatorname{graph} s_{x_0}$.

Sei $z \in \operatorname{graph} \hat{w}$. Dann existiert eine Folge $z_i \in \operatorname{graph} \hat{w}_i \subset N_{t_i}$ mit $z_i \to z$. Aus $u(z_i) = t_i$ folgt dann $u(z) = t_0$. Angenommen $z \in E^+_{t_0}$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $B^n_\delta(z) \subset E^+_{t_0}$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $z_i \in N_{t_i}$ mit $t_i > t_0$. Also gilt $\operatorname{graph} \hat{w} \subset N^+_{t_0}$. Wie in (i) folgt dann $\hat{T} = T_{x_0}N^+_{t_0}$ und $\hat{w} = s_{x_0}$.

(iii) Der Fall $x_0 \in N_{t_0}$ mit $N_{t_0} \neq N^+_{t_0}$ wird analog zu (ii) behandelt.

□

Korollar 4.14 *Sei $n < 7$. Dann besitzen die Flächen N_t und N^+_t lokal gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken.*

Beweis: Sei $q = (q', q'') \in (\mathbf{R}^n \setminus \bar{E}_0) \times \mathbf{R}$ beliebig und $d = dist(q, \partial E_0 \times \mathbf{R}) = dist(q', \partial E_0)$. Wähle $L_0 > 0$ so groß, dass $B^n_{2d}(q') \subset F_{L_0}$. Nach Bemerkung 4.6 und Lemma 4.8 gilt dann für $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \varepsilon(L_0)$ in $B^n_d(q')$

$$|\nabla u^\varepsilon| \leqslant H_+ + 2\varepsilon_0 + \frac{C(n)}{d}$$

und damit

$$|\nabla U^\varepsilon| \leqslant H_+ + 3\varepsilon_0 + \frac{C(n)}{d} \qquad \text{in} \quad B^{n+1}_d(q)$$

Bemerkung 4.3 liefert dann, dass die Flächen $N^\varepsilon_t \cap B^{n+1}_d(q)$ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε besitzen.
Weiter gilt nach Theorem 4.7 fast überall in $B^n_d(q')$

$$|\nabla u| \leqslant H_+ + \frac{C(n)}{d},$$

woraus wieder nach Bemerkung 4.3 lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken der Flächen N_t und N^+_t folgen. Insbesondere sind somit die Voraussetzungen von Theorem 4.13 erfüllt.

□

5 Verallgemeinerung

Die Aussagen und Beweise der vorangehenden Kapitel für den Fall $M = \mathbf{R}^n$ sind alle von lokaler Natur. Es ist daher zu erwarten, dass analoge Resultate für eine beliebige Hintergrundmannigfaltigkeit M gelten. $|A|^2$-Schranken für die Flächen N_t einer glatten Lösung des IMCF erhält man nur im Fall lokaler Sternförmigkeit. Das Positionsvektorfeld $x \in \mathbf{R}^n$ wird in Theorem 5.1 durch ein geeignetes Vektorfeld X auf M ersetzt. Entscheidend für die modifizierten Evolutionsgleichungen im Beweis der $|A|^2$-Schranke ist, dass $|A|$ nach Lemma 1.5 in zusätzliche Terme von $\triangle\langle X, \nu\rangle$ nur linear eingeht.

$(M^n, \bar{g})$ sei eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqslant 2$.

5.1 $|A|^2$-Schranke

Für ein $y_0 \in M$ bezeichne $\iota(y_0)$ den Injektivitätsradius von y_0 in M. Für $R \leqslant \iota(y_0)$ sei $B_R^M(y_0) \subset M$ die geodätische Kugel vom Radius R um y_0 in M und

$$\varphi = exp_{y_0}^{-1} : B_R^M(y_0) \longrightarrow T_{y_0}M \cap B_R^n(0)$$

seien Normalkoordinaten. Dann gilt für $q \in B_R^M(y_0)$:

$$r(q) = d^2(q, y_0) = |\varphi(q)|^2_{\mathbf{R}^n} \tag{5.1}$$

Für einen Tensor $\bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$ auf M setze

$$\bar{T}_{max}(y_0, R) = \sup_{B_R^M(y_0)} |\bar{T}_{\alpha\beta\gamma}|$$

Theorem 5.1 *Sei $F : N \times [0, T) \to M$ glatte Lösung des IMCF, $y_0 \in M$ und $R \leqslant \iota(y_0)$ so klein, dass*

$$|\bar{\nabla} r| \leqslant 3R\,, \quad \bar{\nabla}^2 r \leqslant 3\bar{g} \qquad \text{in} \quad B_R^M(y_0)$$

Für $t \in [0, T)$ habe N_t in $B_R^M(y_0)$ keinen Rand. Weiter existiere ein glattes Vektorfeld X auf $B_R^M(y_0)$ mit

$$0 < \beta_1 R \leqslant \langle X, \nu\rangle \leqslant \beta_2 R \qquad \text{in} \quad N_t \cap B_R^M(y_0)$$

und es sei

$$H_{max}(y_0, R) = \sup_{t\geqslant 0} \sup_{N_t \cap B_R^M(y_0)} H < \infty$$

Dann gilt für $\theta \in (0, 1)$ in $N_t \cap B_{\theta R}^M(y_0)$

$$\lambda_{max}^2 \leqslant c_{20} \cdot (1 - \theta^2)^{-2} \max\{\sup_{N_0 \cap B_R^M(y_0)} \lambda_{max}^2, [(R^{-2} + H_{max}R^{-1} + C_{21})^2 + C_{22}]^{\frac{1}{2}}\}$$

Dabei sind Konstanten c skalierungsinvariant und hängen nur von n, β_1 und β_2 ab. Konstanten C hängen zusätzlich von H_{max}, $\bar{R}_{max}$, $(\bar{\nabla}\bar{R})_{max}$, $(\mathcal{L}_X\bar{g})_{max}$ und $(\bar{\nabla}\mathcal{L}_X\bar{g})_{max}$ ab und skalieren richtig mit dem Abstand.

Bemerkung 5.2 Es gelte $N_0 \cap B_{2R}^M(y_0) = \emptyset$ und N_t habe für $t > 0$ in $B_{2R}^M(y_0)$ keinen Rand. Setze

$$\sigma_0 = \min(\inf_{x \in B_R^M(y_0)} \sigma(x), R\,) > 0$$

mit $\sigma(x)$ aus Definition 2.3. Dann gilt nach Satz 2.5

$$H_{max}(y_0, R) \leqslant \frac{C(n)}{\sigma_0}$$

und damit

$$|A|^2 \leqslant C_{23} \cdot (1 - \theta^2)^{-2} \qquad \text{in} \quad N_t \cap B_{\theta R}^M(y_0)$$

C_{23} hängt von R, σ_0 und den oben genannten Größen ab.

Die folgenden Rechnungen gelten in $N_t \cap B_R^M(y_0)$ und sind analog zu denen in Abschnitt 3.2. Es werden insbesondere die Bezeichnungen von dort übernommen.

Die Evolutionsgleichung von $w = \varphi u^2$

Setze $\beta = \langle X, \nu \rangle$. Aus Lemma 1.5, Satz 2.1 (iii) und $\frac{\partial}{\partial t} X = \frac{1}{H}\bar{\nabla}_\nu X$ erhält man

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\beta = \frac{1}{H^2}\beta(|A|^2 + \bar{R}_{00}) + \frac{1}{H}\langle \bar{\nabla}_\nu X, \nu \rangle + \frac{1}{H^2}X(H_X)$$

und damit

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\beta^{-2} = &-\frac{3}{2}\frac{1}{H^2}\beta^2|\nabla\beta^{-2}|^2 - \frac{2}{H^2}\beta^{-2}(|A|^2 + \bar{R}_{00}) \\ &- \frac{2}{H^2}\beta^{-3}(H\langle \bar{\nabla}_\nu X, \nu\rangle + X(H_X))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{H^2}\triangle\right)\varphi(\beta^{-2}) = &-\frac{1}{H^2}(\frac{3}{2}\beta^2\varphi' + \varphi'')|\nabla\beta^{-2}|^2 - \frac{2}{H^2}\varphi'\beta^{-2}(|A|^2 + \bar{R}_{00}) \\ &- \frac{2}{H^2}\varphi'\beta^{-3}(H\langle \bar{\nabla}_\nu X, \nu\rangle + X(H_X))\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}a_j^i = &-\frac{2}{H}\bar{R}^i{}_{0j0} - \frac{2}{H^2}h^{km}\bar{R}_k{}^i{}_{jm} \\ &- \frac{1}{H^2}(h_j^m\bar{R}^{ki}{}_{km} + h^{im}\bar{R}_m{}^k{}_{jk} + \bar{\nabla}_k\bar{R}_{0j}{}^{ik} + \bar{\nabla}^i\bar{R}_0{}^k{}_{jk})\end{aligned}$$

gilt nach Korollar 2.2

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)h^i_j=-\frac{2}{H^3}\nabla^i H\nabla_j H+\frac{1}{H^2}h^i_j(|A|^2+\bar{R}_{00})-\frac{2}{H}h^i_p h^p_j+a^i_j$$

Wie in Abschnitt 3.2 findet man

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)u^2\leqslant\frac{2}{H^2}u^2(|A|^2+|\bar{R}_{00}|)-\frac{2}{H^2}|\nabla u|^2+2u\frac{\partial u}{\partial\sigma^i_j}a^i_j$$

und damit für $w=\varphi u^2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)w\leqslant&-\frac{2}{H^2}\varphi w|A|^2-\frac{2}{H^2}\varphi|\nabla u|^2-\frac{1}{H^2}u^2(\frac{3}{2}\beta^2\varphi'+\varphi'')|\nabla\beta^{-2}|^2\\&-\frac{2}{H^2}\nabla^i u^2\nabla_i\varphi+\frac{2}{H^2}u^2|\bar{R}_{00}|(\varphi+\varphi'\beta^{-2})\ +2u\varphi\frac{\partial u}{\partial\sigma^i_j}a^i_j\\&-\frac{2}{H^2}\varphi'u^2\beta^{-3}(H\langle\bar{\nabla}_\nu X,\nu\rangle+X(H_X))\end{aligned}$$

Analog zu (3.12) ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)w\leqslant&-\frac{2}{H^2}\varphi w|A|^2-\frac{\tau}{H^2}u^{-2}\nabla^i w\nabla_i u^2-\frac{\sigma}{H^2}\varphi^{-1}\nabla^i w\nabla_i\varphi\\&-\frac{c_1}{H^2}\varphi|\nabla u|^2-\frac{c_2}{H^2}R^4\varphi w|\nabla\beta^{-2}|^2+\frac{2}{H^2}u^2|\bar{R}_{00}|(\varphi+\varphi'\beta^{-2})\\&+2u\varphi\frac{\partial u}{\partial\sigma^i_j}a^i_j-\frac{2}{H^2}\varphi'u^2\beta^{-3}(H\langle\bar{\nabla}_\nu X,\nu\rangle+X(H_X))\end{aligned}$$

Die Abschneidefunktion η

Setze wieder $\eta(q)=(R^2-r(q))^2$ für $q\in B^M_R(y_0)$ mit r aus (5.1). In $N_t\cap B^M_R(y_0)$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}r&=\frac{1}{H}\bar{\nabla}_\nu r\\\triangle r&=\triangle^{N_t}r=\triangle^M r-(\bar{\nabla}^2 r)(\nu,\nu)-H\bar{\nabla}_\nu r\\&=\bar{g}^{ij}\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j r-H\bar{\nabla}_\nu r\end{aligned}$$

Daraus folgt nach Voraussetzung an R und r

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)\eta&=-2(R^2-r)\frac{\partial}{\partial t}r+\frac{2}{H^2}(R^2-r)\triangle r-\frac{2}{H^2}|\nabla r|^2\\&=-\frac{4}{H}(R^2-r)\bar{\nabla}_\nu r+\frac{2}{H^2}(R^2-r)\bar{g}^{ij}\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j r-\frac{2}{H^2}|\nabla r|^2\\&\leqslant\frac{12}{H}R^3+\frac{6}{H^2}(n-1)R^2-\frac{2}{H^2}|\nabla r|^2\end{aligned}$$

Die Evolution von ηw

Wie in (3.18) findet man

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)(\eta w)\leqslant&-\frac{2}{H^2}\varphi\eta w|A|^2\\&-\frac{1}{H^2}(2\eta^{-1}\nabla^i\eta+\tau u^{-2}\nabla^i u^2+\sigma\varphi^{-1}\nabla^i\varphi)\nabla_i(\eta w)\\&+\frac{c_5}{H^2}w|\nabla r|^2+\frac{12}{H}wR^3+\frac{6}{H^2}w(n-1)R^2+\frac{2}{H^2}\eta u^2|\bar{R}_{00}|(\varphi+\varphi'\beta^{-2})\\&+2\eta u\varphi\frac{\partial u}{\partial\sigma^i_j}a^i_j-\frac{2}{H^2}\varphi'\eta u^2\beta^{-3}(H\langle\bar{\nabla}_\nu X,\nu\rangle+X(H_X))\end{aligned}\tag{5.2}$$

Aus $H=\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}>0$ folgt $|A|\leqslant c(n)\cdot u$ und damit

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma^i_j}a^i_j\leqslant c_6\cdot\left(\frac{1}{H}\bar{R}_{max}+\frac{1}{H^2}u\bar{R}_{max}+\frac{1}{H^2}(\bar{\nabla}\bar{R})_{max}\right)\tag{5.3}$$

Zudem gilt nach Lemma 1.5

$$\begin{aligned}H\langle\bar{\nabla}_\nu X,\nu\rangle+X(H_X)&=\frac{1}{2}g^{ij}\bar{\nabla}_\nu(\mathcal{L}_X\bar{g})(e_i,e_j)-g^{ij}\bar{\nabla}_{e_i}(\mathcal{L}_X\bar{g})(\nu,e_j)\\&\qquad-h^{ij}\mathcal{L}_X\bar{g}(e_i,e_j)+H\mathcal{L}_X\bar{g}(\nu,\nu)\\&\leqslant c_7\cdot\big((\bar{\nabla}\mathcal{L}_X\bar{g})_{max}+|A|(\mathcal{L}_X\bar{g})_{max}\big)\end{aligned}\tag{5.4}$$

Beweis von Theorem 5.1

Sei $\delta>0$ beliebig. Setze $\eta(q)=((R^2-r(q))_+)^2$. Dann gilt für $t>0$ in $N_t\cap B^M_R(y_0)$ (5.2). Wie im Beweis von Theorem 3.6 definiere

$$\begin{aligned}L_\delta&=\sup_{N_0\cap B^M_R(y_0)}(\eta w)\geqslant 0\\L&=\sup_{N_0\cap B^M_R(y_0)}(\eta\varphi\lambda^2_{max})\leqslant R^4\sup_{N_0\cap B^M_R(y_0)}\lambda^2_{max}\end{aligned}$$

Sei $t_1>0$ erster Zeitpunkt mit $(\eta w)(x_1)=M>L_\delta$ für ein $x_1\in N_{t_1}$. Dann gilt $x_1\in N_{t_1}\cap B^M_R(y_0)$ und

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{H^2}\triangle\right)(\eta w)(x_1)\geqslant 0\,,\quad\nabla_i(\eta w)(x_1)=0$$

In x_1 gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{2}{H^2}\varphi\eta w|A|^2\leqslant&\frac{c_8}{H^2}wR^2+\frac{12}{H}wR^3+\frac{C_9}{H^2}\eta w+2\eta u\varphi\frac{\partial u}{\partial\sigma^i_j}a^i_j\\&-\frac{2}{H^2}\varphi'\varphi^{-1}\eta w\beta^{-3}(H\langle\bar{\nabla}_\nu X,\nu\rangle+X(H_X))\end{aligned}\tag{5.5}$$

Aus (5.3) und (5.4) folgt

$$2H^2 u \frac{\partial u}{\partial \sigma^i_j} a^i_j \leqslant C_{10} + C_{11} u^2$$

$$-2\varphi' \varphi^{-1} \beta^{-3} (H \langle \bar{\nabla}_\nu X, \nu \rangle + X(H_X)) \leqslant C_{12} + C_{13} |A|$$

Damit ergibt sich nach Multiplikation von (5.5) mit H^2

$$2\eta\varphi w |A|^2 \leqslant c_8 w R^2 + 12 H_{max} w R^3 + C_{14} \eta w + C_{13} \eta w |A| + C_{10} \eta \varphi$$

und mit

$$C_{13} \eta w |A| \leqslant \eta w \varphi |A|^2 + C_{15} \eta w$$

folgt

$$\eta\varphi w |A|^2 \leqslant (c_8 R^2 + 12 H_{max} R^3 + C_{16} \eta) w + C_{10} \eta \varphi$$

Multiplikation mit η, $\varphi \leqslant 1$ und $u^2 \leqslant 2|A|^2 + d(\delta)$ liefern

$$M^2 \leqslant M \left(2c_8 R^2 + 24 H_{max} R^3 + (2C_{16} + d(\delta))\eta \right) + 2C_{10} \eta^2$$

und daraus

$$M \leqslant \left[\left(c_{17} R^2 + 24 H_{max} R^3 + (C_{18} + d(\delta)) R^4 \right)^2 + C_{19} R^8 \right]^{\frac{1}{2}}$$

In $N_t \cap B^M_R(y_0)$ gilt somit

$$\eta\varphi u^2 \leqslant \max \left\{ L_\delta, \left[\left(c_{17} R^2 + 24 H_{max} R^3 + (C_{18} + d(\delta)) R^4 \right)^2 + C_{19} R^8 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Für $\delta \to 0$ folgt

$$\eta \lambda^2_{max} \leqslant \varphi_0^{-1} \cdot \max \left\{ L, \left[\left(c_{17} R^2 + 24 H_{max} R^3 + C_{18} R^4 \right)^2 + C_{19} R^8 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Für $\theta \in (0,1)$ gilt in $B^M_{\theta R}(y_0)$

$$\eta > (1 - \theta^2)^2 R^4$$

und damit in $N_t \cap B^M_{\theta R}(y_0)$

$$\lambda^2_{max} \leqslant (1-\theta^2)^{-2} \varphi_0^{-1} \cdot \max\{ \sup_{N_0 \cap B^M_R(y_0)} \lambda^2_{max}, \\ \left[(c_{17} R^{-2} + 24 H_{max} R^{-1} + C_{18})^2 + C_{19} \right]^{\frac{1}{2}} \}$$

$\square$

5.2 $C^{1,1}$-Regularität der Flächen $N_t^{(+)}$

Für den Beweis der $C^{1,1}$-Regularität der Flächen N_t und N_t^+ im Fall einer beliebigen Hintergrundmannigfaltigkeit M bleibt im Wesentlichen zu zeigen:

- Existenz eines geeigneten Vektorfeldes X lokal auf $M \times \mathbf{R}$ für die Verallgemeinerung der lokalen Sternförmigkeit
- lokale Konvergenz von Flächen N_t^ε gegen $N_t \times \mathbf{R}$

Im Fall $M = \mathbf{R}^n$ gehen in die Beweise lediglich die lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranke der Flächen N_t^ε, ihre Blätterungseigenschaft sowie die Eigenschaft der Flächen N_t und N_t^+, lokal gleichmäßig als Graph geschrieben werden zu können, ein. Dagegen wird nicht verwendet, dass es sich um eine Lösung des IMCF handelt. Die genannten Eigenschaften bleiben im Bild von Normalkoordinaten auf $M \times \mathbf{R}$ erhalten, so dass man mit Hilfe der Exponentialabbildung die Situation im Fall $M = \mathbf{R}^n$ erhält.

Eigenschaften der Exponentialabbildung

Für $y \in M$ und $R \leqslant \iota(y)$ betrachte die Exponentialabbildung

$$exp_y : T_yM \cap B_R^n(0) \longrightarrow B_R^M(y)$$

und die zugehörigen Normalkoordinaten $exp_y^{-1} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Setze $\bar{x} = exp_y^{-1}(x)$ für $x \in B_R^M(y)$. Ist $\tau_1, \ldots, \tau_n$ die Orthonormalbasis der Koordinatenrichtungen von $T_yM \cong \mathbf{R}^n$, so sind die Koordinatenvektorfelder auf $B_R^M(y)$ gegeben durch

$$\partial_\alpha|_x = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}|_x = (d_{\bar{x}} exp_y)(\tau_\alpha)$$

und für die Metrik gilt [Ch93]

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta}(x) &= \bar{g}(\partial_\alpha|_x, \partial_\beta|_x) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\langle \bar{R}(\bar{x}, \partial_\alpha|_x)\bar{x}, \partial_\beta|_x\rangle + o(|\bar{x}|^3) \end{aligned}$$

d.h. $d_0 exp_y$ ist eine Isometrie und auf kleinen Kugeln kann die Abweichung durch die Geometrie von M um y kontrolliert werden.

Für den Tangentialraum an $M \times \mathbf{R}$ im Punkt $q = (q', q'')$ gilt

$$T_q(M \times \mathbf{R}) = T_{q'}M \oplus T_{q''}\mathbf{R} = T_{q'}M \oplus \mathbf{R}$$

und die Exponentialabbildung hat die Form

$$exp_q(x', x'') = (exp_{q'}(x'), exp_{q''}(x'')) = (exp_{q'}(x'), x'')$$

Dies bedeutet, dass mit N_t^ε auch die Flächen

$$\tilde{N}_t^\varepsilon = exp_q^{-1}(N_t^\varepsilon \cap B_R^{M\times\mathbf{R}}(q)) \subset T_q(M \times \mathbf{R})$$

in Richtung von $\mathbf{R}$ translatieren. Für $p \in B_R^{M\times\mathbf{R}}(q)$ setze $\tilde{p} = exp_q^{-1}(p)$. Die Produktmetrik auf $M \times \mathbf{R}$ sei mit $\tilde{g}$ bezeichnet.

Ist M eine C^{k+2}-Mannigfaltigkeit, so folgt aus der Konstruktion und der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, dass exp_y eine C^k-Abbildung ist [Br81]. Die C^l-Norm von exp_y hängt dann nur von der Krümmung von M sowie deren Ableitungen ab. Eine $C^{1,\alpha}$-Schranke an $N_t^\varepsilon \cap B_R^{M\times\mathbf{R}}(q)$ ist somit äquivalent zu einer $C^{1,\alpha}$-Schranke an $\tilde{N}_t^\varepsilon$.

Lemma 5.3 *Es sei $y \in M$, $R \leqslant \iota(y)$ und $\bar{z}(\bar{x})$ ein konstantes Vektorfeld auf $T_yM \cap B_R^n(0)$. Dann gilt für $Z(x) = (d_{\bar{x}}exp_y)(\bar{z}(\bar{x}))$ in $B_R^M(y)$*

$$|\mathcal{L}_Z\bar{g}| \leqslant C_1 \cdot |\bar{z}|_{\boldsymbol{R}^n} \quad \textit{und} \quad |\bar{\nabla}\mathcal{L}_Z\bar{g}| \leqslant C_2 \cdot |\bar{z}|_{\boldsymbol{R}^n}$$

wobei C_1 und C_2 nur von der Geometrie von M in $B_R^M(y)$ abhängen.

Beweis: Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$\bar{z}(\bar{x}) = z^\alpha \tau_\alpha \quad \text{und} \quad Z(x) = z^\alpha \partial_\alpha|_x$$

mit $z^\alpha = const$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\alpha, \partial_\beta) &= \langle \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Z, \partial_\beta\rangle + \langle \partial_\alpha, \bar{\nabla}_{\partial_\beta} Z\rangle \\ &= z^\gamma(\bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\gamma}\bar{g}_{\delta\beta} + \bar{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma}\bar{g}_{\alpha\delta}) \\ &= z^\gamma \Sigma_{\gamma\alpha\beta} \end{aligned}$$

mit $\Sigma_{\gamma\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\gamma}\bar{g}_{\delta\beta} + \bar{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma}\bar{g}_{\alpha\delta}$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad |\mathcal{L}_Z\bar{g}|^2 &= \bar{g}^{\alpha\sigma}\bar{g}^{\beta\tau}\mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\alpha, \partial_\beta)\mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\sigma, \partial_\tau) \\ &= \bar{g}^{\alpha\sigma}\bar{g}^{\beta\tau} z^\gamma z^\delta \Sigma_{\gamma\alpha\beta}\Sigma_{\delta\sigma\tau} \leqslant C_1^2 \cdot |\bar{z}|^2_{\mathbf{R}^n} \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_\alpha}(\mathcal{L}_Z\bar{g})(\partial_\beta, \partial_\gamma) &= \bar{\nabla}_{\partial_\alpha}(\mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\beta, \partial_\gamma)) - \mathcal{L}_Z\bar{g}(\bar{\nabla}_{\partial_\alpha}\partial_\beta, \partial_\gamma) - \mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\beta, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha}\partial_\gamma) \\ &= z^\sigma\bar{\nabla}_{\partial_\alpha}(\Sigma_{\sigma\beta\gamma}) - \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta}\mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\delta, \partial_\gamma) - \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\gamma}\mathcal{L}_Z\bar{g}(\partial_\beta, \partial_\delta) \\ &= z^\sigma(\bar{\nabla}_{\partial_\alpha}(\Sigma_{\sigma\beta\gamma}) - \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\beta}\Sigma_{\sigma\delta\gamma} - \bar{\Gamma}^\delta_{\alpha\gamma}\Sigma_{\sigma\beta\delta}) \end{aligned}$$

und damit

$$|\bar{\nabla}\mathcal{L}_Z\bar{g}|^2 \leqslant C_2^2 \cdot |\bar{z}|^2_{\mathbf{R}^n}$$

□

Im Folgenden seien für $(M^n, \bar{g})$ und $E_0 \subset M$ die Voraussetzungen von Theorem 4.7 erfüllt. Dann existiert eine Sublösung v und eine Lösung $u \in C^{0,1}_{loc}(M)$ von (†) mit (4.3), die wie im Beweis von 4.7 konstruiert werden kann. Beachte, dass nur im Fall eines glatten v mit $\nabla v \neq 0$ Lösungen u^ε des regularisierten Problems und damit Flächen N_t^ε existieren. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so muss auf die Konstruktion aus dem Beweis (ii) von Theorem 4.7 zurückgegriffen werden.

Lemma 5.4 *Die Sublösung v sei glatt mit $\nabla v \neq 0$. Besitzen die Flächen N_t^ε lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε, so ist $|A|^2$ auf N_t^ε lokal gleichmäßig beschränkt. Diese Schranke hängt nur von der lokalen $C^{1,\alpha}$-Schranke und der lokalen Geometrie von M ab.*

Beweis: Sei $q \in (M \setminus \bar{E}_0) \times \mathbf{R}$ und $d = \min(\iota(q), dist(q, \partial E_0 \times \mathbf{R}))$. Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle t, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ die Flächenstücke $N_t^\varepsilon \cap B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε besitzen.
Betrachte die Exponentialabbildung

$$exp_q : T_q(M \times \mathbf{R}) \cap B_d^{n+1}(0) \longrightarrow B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$$

und setze

$$\tilde{N}_t^\varepsilon = exp_q^{-1}(N_t^\varepsilon \cap B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)) \subset T_q(M \times \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n+1}$$

Die Normale an $\tilde{N}_t^\varepsilon$ sei mit $\tilde{\nu}$ bezeichnet. Nach Voraussetzung ist exp_q eine C^2-Abbildung, so dass die Flächen $\tilde{N}_t^\varepsilon$ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε besitzen. Damit ist man in der Situation von $M = \mathbf{R}^n$ und es folgt: Es existiert ein $R \in (0, \frac{d}{20})$, so dass gilt

$$\langle \tilde{\nu}(\tilde{p}), \tau_{n+1} \rangle \geqslant \gamma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{auf} \quad \tilde{N}_t^\varepsilon \cap B_R^{n+1}(0)$$

mit $\tau_{n+1} = \tilde{\nu}(\tilde{q})$, wobei $\tilde{\nu}(\tilde{p})$ und τ_{n+1} von ε abhängen.
Sei nun $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ fest. Das Vektorfeld $\tilde{X}$ auf $T_q(M \times \mathbf{R}) \cap B_d^{n+1}(\tilde{q})$ wird analog zum Fall $M = \mathbf{R}^n$ definiert, woraus man über das Differential der Exponentialabbildung ein Vektorfeld X auf $B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$ erhält. Setze dazu

$$\tilde{z} = -m\tau_{n+1} \in T_q(M \times \mathbf{R}) \cap B_d^{n+1}(0) \qquad \text{mit} \quad m = 2\gamma_0^{-1}R$$

und $\tilde{X}(\tilde{p}) = \tilde{p} - \tilde{z}$. Dann gilt

$$\langle \tilde{X}(\tilde{p}), \tilde{\nu}(\tilde{p}) \rangle \geqslant R \qquad \text{auf} \quad \tilde{N}_t^\varepsilon \cap B_R^{n+1}(0)$$

Für $p \in B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$ definiere

$$X(p) = d_{\tilde{p}} exp_q(\tilde{X}(\tilde{p}))$$

und

$$\omega(\tilde{p}) = d_p exp_q^{-1}(\nu(p)) \in T_{\tilde{p}}(T_q(M \times \mathbf{R}))$$

Dabei bezeichnet $\nu(p)$ für $p \in N_t^\varepsilon$ die Normale an N_t^ε im Punkt p. $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ sei orthonormales n-Bein an $\tilde{N}_t^\varepsilon$ in $\tilde{p}$. Dann gilt

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{e}_i + \sigma \tilde{\nu} \qquad \text{mit} \quad |\sigma| = \left(|\omega|^2 - \sum_i \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Es gilt $e_i = d_{\tilde{p}} exp_q(\tilde{e}_i) \in T_p N_t^\varepsilon$ und damit $\langle e_i, \nu \rangle = 0$. Sei $\eta > 0$. Dann gilt für hinreichend kleines R in $T_q(M \times \mathbf{R}) \cap B_R^{n+1}(0)$

$$-\eta < \langle \tilde{e}_i, \omega \rangle < \eta \qquad \text{und} \qquad |\omega|^2 > 1 - \eta^2$$

Wegen $\omega \notin T_{\tilde{p}} \tilde{N}_t^\varepsilon$ in $T_q(M \times \mathbf{R}) \cap B_R^{n+1}(0)$ und $\omega(0) = \tilde{\nu}(0)$ gilt zudem $\sigma > 0$. Damit folgt in $\tilde{N}_t^\varepsilon \cap B_R^{n+1}(0)$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{X}, \omega \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \tilde{X}, \tilde{e}_i \rangle + \left(|\omega|^2 - \sum_i \lambda_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \langle \tilde{X}, \tilde{\nu} \rangle \\ &\geqslant -n\eta |\tilde{p} - \tilde{z}| + \sqrt{1 - (n+1)\eta^2} R \\ &\geqslant \left(\sqrt{1 - (n+1)\eta^2} - n\eta(1 + 2\gamma_0^{-1}) \right) R \\ &\geqslant \frac{1}{2} R \end{aligned}$$

für hinreichend kleines R und damit η. Nach eventueller Verkleinerung von R folgt dann

$$\langle X, \nu \rangle \geqslant \frac{1}{4} R \qquad \text{in} \quad N_t^\varepsilon \cap B_R^{M \times \mathbf{R}}(q).$$

und die geodätische Distanzfunktion r erfüllt die Voraussetzungen von Theorem 5.1. Beachte, dass die durchgeführten Verkleinerungen von R nur von der Geometrie von M um q abhängen, also unabhängig von t und ε sind.
Ist noch gezeigt, dass $(\mathcal{L}_X \tilde{g})_{max}$ und $(\tilde{\nabla} \mathcal{L}_X \tilde{g})_{max}$ unabhängig von ε beschränkt werden können, so folgt die Behauptung aus Theorem 5.1.

Setze $P(p) = d_{\tilde{p}} exp_q(\tilde{p})$ und für ein festes $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ sei $Z(p) = d_{\tilde{p}} exp_q(\tilde{z})$. Dann gilt $X(p) = P(p) - Z(p)$ sowie

$$\mathcal{L}_X \tilde{g} = \mathcal{L}_P \tilde{g} - \mathcal{L}_Z \tilde{g} \quad \text{und} \quad \tilde{\nabla} \mathcal{L}_X \tilde{g} = \tilde{\nabla} \mathcal{L}_P \tilde{g} - \tilde{\nabla} \mathcal{L}_Z \tilde{g}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_X \tilde{g}| &\leqslant |\mathcal{L}_P \tilde{g}| + |\mathcal{L}_Z \tilde{g}| \\ |\tilde{\nabla} \mathcal{L}_X \tilde{g}| &\leqslant |\tilde{\nabla} \mathcal{L}_P \tilde{g}| + |\tilde{\nabla} \mathcal{L}_Z \tilde{g}| \end{aligned}$$

Nun hängen weder P noch $|\tilde{z}|_{\mathbf{R}^n}$ von ε ab, so dass die Behauptung aus Lemma 5.3 folgt. $\square$

Existiert eine Sublösung v mit $\nabla v \neq 0$, so überträgt sich der Beweis von Theorem 4.13 im Bild von Normalkoordinaten und man erhält ein entsprechendes Theorem für eine beliebige Hintergrundmannigfaltigkeit. Ist die Voraussetzung $\nabla v \neq 0$ nicht erfüllt, so bedarf es einer weiteren Überlegung.

Zu $B > 0$ betrachte die Lösung u_B von $(\dagger)$ in $(M_B, \bar{g}_B)$ mit (4.3) und Anfangsbedingung E_0 wie im Beweis von 4.7. Zu jedem B gehören glatte Lösungen $u_{B,\varepsilon}$ des regularisierten Problems $(\star)_{B,\varepsilon}$ in $\Omega_{B,\varepsilon}$. Setze

$$N_t^{B,\varepsilon} = \{U^{B,\varepsilon} = t\} = \text{graph}\left(\frac{u^{B,\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken der Flächen $N_t^{B,\varepsilon}$ in B, t und ε bedeutet dann: *Zu jedem $q \in (M \setminus \bar{E}_0) \times \boldsymbol{R}$ existiert ein $B_0 > 0$, so dass für $d = dist(q, \partial E_0 \times \boldsymbol{R})$ und alle $B \geqslant B_0$ ein $\varepsilon_B > 0$ existiert mit: für alle t und $\varepsilon \leqslant \varepsilon_B$ besitzen die Flächenstücke $N_t^{B,\varepsilon} \cap B_d^{M\times\boldsymbol{R}}(q)$ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken. Insbesondere soll B_0 so groß sein, dass $B_d^{M\times\boldsymbol{R}}(q) \subset F_{B_0} \times \boldsymbol{R}$.*

Theorem 5.5 *Es sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

(i) Die Sublösung v ist glatt mit $\nabla v \neq 0$ und die Flächen N_t^ε besitzen lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in t und ε.

(ii) Die Flächen $N_t^{B,\varepsilon}$ besitzen lokal gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken in B, t und ε.

Gilt zudem, dass die Flächen N_t und N_t^+ in C^1 sind und im Bild von Normalkoordinaten lokal gleichmäßig als Graph geschrieben werden können, so besitzen die Flächen N_t und N_t^+ lokal gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken.

Beweis: Sei $y \in M \setminus \bar{E}_0$ und $Y = (y, 0) \in (M \setminus \bar{E}_0) \times \mathbf{R}$. Setze

$$\begin{aligned} d &= \min(\iota(Y), dist(Y, \partial E_0 \times \mathbf{R})) \\ &= \min(\iota(y), dist(y, \partial E_0)) \end{aligned}$$

und betrachte die Exponentialabbildung

$$exp_Y = (\exp_y, id_{\mathbf{R}}) : T_Y(M \times \mathbf{R}) \cap B_d^{n+1}(0) \longrightarrow B_d^{M\times\mathbf{R}}(Y)$$

(i) Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \circ exp_y \\ \tilde{u}^\varepsilon &= u^\varepsilon \circ exp_y \\ \tilde{U}^\varepsilon &= U^\varepsilon \circ exp_Y = \tilde{u}^\varepsilon - \varepsilon id_{\mathbf{R}} \\ \tilde{N}_t^{(+)} &= exp_y^{-1}(N_t^{(+)} \cap B_d^M(y)) \subset T_y M \\ \tilde{N}_t^\varepsilon &= exp_Y^{-1}(N_t^\varepsilon \cap B_d^{M\times\mathbf{R}}(Y)) \subset T_Y(M \times \mathbf{R}) = T_y M \oplus \mathbf{R} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{N}_t = \partial\{\tilde{u} < t\}\,, \qquad \tilde{N}_t^+ = \partial\,\mathrm{int}\{\tilde{u} \leqslant t\}\,, \qquad \tilde{N}_t^\varepsilon = \{\tilde{U}^\varepsilon = t\}$$

Nach Voraussetzung existieren $\varepsilon_0 > 0$, $C_1 < \infty$, $\rho > 0$ und $R > 0$ mit $R + \rho \leqslant d$, so dass nach Lemma 5.4 gilt

- Für alle $t > 0$, $\tilde{x} \in \tilde{N}_t^{(+)} \cap B_\rho^n(0)$ kann $\tilde{N}_t^{(+)}$ lokal um $\tilde{x}$ als Graph einer Funktion

  $$s_{\tilde{x}} : T_{\tilde{x}}\tilde{N}_t^{(+)} \cap B_R^{n-1}(0) \longrightarrow \mathbf{R}$$

  geschrieben werden.

- Für alle t, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ und $\tilde{p} \in \tilde{N}_t^\varepsilon \cap B_\rho^{n+1}(0)$ kann $\tilde{N}_t^\varepsilon \cap B_R^{n+1}(\tilde{p})$ als Graph einer C^2-Funktion $w_{\tilde{p}}$ über $T_{\tilde{p}}\tilde{N}_t^\varepsilon$ geschrieben werden, für die gilt

  $$w_{\tilde{p}}(0) = 0\,, \quad Dw_{\tilde{p}}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \|w_{\tilde{p}}\|_{2,0} < C_1$$

Konvergieren $u^{\varepsilon_i} \to u$ lokal gleichmäßig, so konvergieren $\tilde{u}^{\varepsilon_i} \to \tilde{u}$ gleichmäßig auf $B_d^n(0) \subset T_yM$. Wie im Fall $M = \mathbf{R}^n$ folgt, dass die Flächenstücke $\tilde{N}_t \cap B_\rho^n(0)$ und $\tilde{N}_t^+ \cap B_\rho^n(0)$ gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken besitzen. Dann existieren aber auch für die Flächenstücke

$$N_t \cap B_\rho^M(y) \qquad \text{und} \qquad N_t^+ \cap B_\rho^M(y)$$

gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken.

(ii) Seien $B_0 > 0$ und $\varepsilon_B > 0$ für $B \geqslant B_0$ so gewählt, dass für alle t und $\varepsilon \leqslant \varepsilon_B$ die Flächenstücke $N_t^{B,\varepsilon} \cap B_d^{M\times\mathbf{R}}(Y)$ gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranken besitzen. Nach Lemma 5.4 existiert dann ein $r > 0$, so dass die Flächenstücke $N_t^{B,\varepsilon} \cap B_r^{M\times\mathbf{R}}(Y)$ für $B \geqslant B_0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_B$ gleichmäßige $C^{2,0}$-Schranken in B, ε und t haben.

Sei $B_j \to \infty$ Folge mit $B_j \geqslant B_0$ und $u_{B_j} \to u$ lokal gleichmäßig, insbesondere also $u_{B_j} \to u$ gleichmäßig auf $B_r^M(y)$. Zu jedem j existiert eine Folge $\varepsilon_{ji} \to 0$ mit $\varepsilon_{ji} \leqslant \varepsilon_{B_j}$ und $u^{\varepsilon_{ji}} \to u_{B_j}$ lokal gleichmäßig, also $u^{\varepsilon_{ji}} \to u_{B_j}$ gleichmäßig auf $B_r^M(y)$. Weiter gibt es zu jedem j ein i_j, so dass mit $\hat{\varepsilon}_j = \varepsilon_{ji_j}$ gilt

$$\sup_{B_r^M(y)} |u^{\hat{\varepsilon}_j} - u_{B_j}| < \sup_{B_r^M(y)} |u_{B_j} - u|$$

Dann gilt $u^{\hat{\varepsilon}_j} \to u$ gleichmäßig in $B_r^M(y)$. Zudem haben die Flächen $N_t^{B_j\hat{\varepsilon}_j} \cap B_r^{M\times\mathbf{R}}(Y)$ gleichmäßige $C^{2,0}$-Schranken in j und t.

Wie in (i) beweist man mit Hilfe der Exponentialabbildung gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken für die Flächen $\tilde{N}_t^{(+)} \cap B_\rho^n(0)$ mit $\tilde{N}_t^{(+)} = exp_y^{-1}(N_t^{(+)} \cap B_d^M(y))$. Damit besitzen auch in diesem Fall die Flächen N_t und $N_t^{(+)}$ für $t > 0$ lokal gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken. □

Korollar 5.6 *Sei $n < 7$. Dann besitzen die Flächen N_t und N_t^+ für $t > 0$ lokal gleichmäßige $C^{1,1}$-Schranken.*

Beweis: Sei $q = (q', q'') \in (M \setminus \bar{E}_0) \times \mathbf{R}$ und $d = dist(q, \partial E_0 \times \mathbf{R})$. Wähle $L_0 = B_0 > 0$ so groß, dass $B_{2d}^M(q') \subset F_{L_0}$ und setze

$$\sigma_0 = \min\left(d, \inf_{B_d^M(q')} \sigma\right) > 0$$

(i) Die Sublösung v sei glatt mit $\nabla v \neq 0$. Nach Lemma 4.8 gilt dann für $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \varepsilon(L_0)$

$$|\nabla U^\varepsilon| \leqslant H_+ + 3\varepsilon_0 + \frac{C(n)}{\sigma_0} \qquad \text{in} \quad B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$$

Aus Bemerkung 4.3 folgt dann die gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranke der Flächen $N_t^\varepsilon \cap B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$.

(ii) Sei v nun beliebig. Zu $B \geqslant B_0$ existiert ein $L_B > 0$ mit $F_{B_0} \subset F_{B,L_B}$ und $\varepsilon_B = \varepsilon(L_B) \leqslant 1$. Dann gilt für $\varepsilon \leqslant \varepsilon_B$ in $B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$

$$|\nabla U^{B,\varepsilon}| \leqslant H_+ + 3 + \frac{C(n)}{\sigma_0}$$

Wieder folgt die gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranke der Flächen $N_t^{B,\varepsilon} \cap B_d^{M\times\mathbf{R}}(q)$ aus Bemerkung 4.3.

In beiden Fällen gilt nach Theorem 4.7 fast überall in $B_d^M(q')$

$$|\nabla u| \leqslant H_+ + \frac{C(n)}{\sigma_0}$$

woraus die gleichmäßige $C^{1,\alpha}$-Schranke der Flächen $N_t \cap B_d^M(q')$ und $N_t^+ \cap B_d^M(q')$ folgt.

□

Literatur

[An94] B. Andrews: *Contraction of convex hypersurfaces in Euclidian space*, Calc. Var. **2**, 151-171 (1994)

[ADM] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner: *Coordinate Invariance and Energy Expressions in General Relativity*, Phys. Rev. **122**, 997-1006 (1961)

[Ba84] R. Bartnik: *Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes*, Com. Math, Phys. **94**, 155-175 (1984)

[Br81] H. Brauner: *Differentialgeometrie*, Vieweg 1981

[Ch93] I. Chavel: *Riemannian Geometry: A modern introduction*, Cambridge university Press, 1993

[CGG] Y.-G. Chen, Y. Giga, S. Goto: *Uniqueness and Existence of Viscosity Solutions of Generalized Mean Curvature Flow Equations*, JDG **33** 749-786 (1991)

[CNS] L. Carffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck: *The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. **155**, 261-301 (1985)

[EH89] K. Ecker, G. Huisken: *Immersed hypersurfaces with constant Weingarten curvature*, Math. Ann. **283**, 329-332 (1989)

[EH91] K. Ecker, G. Huisken: *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, Invent. math. **105**, 547-569 (1991)

[ES] L.C. Evans, J.Spruck: *Motion of Level Sets by Mean Curvature I*, JDG **33** 635-681 (1991)

[Ge85] C. Gerhardt: *Global $C^{1,1}$-Regularity of Solutions of Quasilinear Variational Inequalities*, Arch. Ration. Mech. Anal. **89**, 83-92 (1985)

[Ge90] C. Gerhardt: *Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres*, JDG **32**, 299-314 (1990)

[G73] R. Geroch: *Energy Extraction*, Ann. New York Acad. Sci. **224** 108-117 (1973)

[GT] D. Gilbard, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Third Printing 1998

[Ha82] R. Hamilton: *Three-Manifolds with positive Ricci curvature*, JDG **17**, 255-306 (1982)

[Ho97] M. Holder: *Contracting Spacelike Hypersurfaces by their Inverse Mean Curvature*, Preprint SFB 382 Tübingen Nr. 57, 1997

[Ho99] M. Holder: *Geometrische Evolutionsgleichungen in Kosmologischen Raumzeiten*, Dissertation Universität Tübingen, 1999

[Hu84] G. Huisken: *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, JDG **20**, 237-266 (1984)

[Hu99] G. Huisken, Vorlesung Princeton University, Herbst 1999

[Hu01] G. Huisken: *Evolution Equations in Geometry*, in: B. Engquist, W. Schmid ed., Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, Springer 2001

[HI97] G. Huisken, T. Ilmanen: *The Riemannian Penrose inequality*, Int. Math. Res. Mot. no.20, 1045-1058 (1997)

[HI98] G. Huisken, T. Ilmanen: *The Inverse Mean Curvature Flow and the Riemannian Penrose Inequality*, Preprint SFB 382 Tübingen, Nr.93, (1998); to appear: JDG

[HP96] G. Huisken, A. Polden: *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, CIME Lectures of Cetraro of 1996, Springer

[JW77] P.S. Jang, R.M. Wald:*The Positive Energy Conjecture and the Cosmic Censor Hypothesis*, J. Math, Phys. **18**, 41-44 (1977)

[Pa97] E. Pasch, *The level set method for the mean curvature flow on* $(\boldsymbol{R}^3, g)$, Preprint SFB 382 Tübingen Nr. 63, 1997

[Pa98] E. Pasch: *Numerische Verfahren zur Berechnung von Krümmungsflüssen*, Dissertation Universität Tübingen, 1998

[PW] M.H. Protter, H.F. Weinberger: *Maximum principles in differential equations*, Prentice Hall, 1967

[Si83] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Centre of Mathematical Analysis, Australian National University, 1983

[Sm98] K. Smoczyk: *Remarks on the inverse mean curvature flow*, Preprint 1998

[Ur90] J. I.E. Urbas: *On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principle curvatures*, Math. Z. **205**, 355-372 (1990)

Lebenslauf

	Mirjam Elisabeth Heidusch geb. Wißkirchen verheiratet mit Heiko Heidusch
05.10.1973	geboren in Köln
1980 - 1993	Grundschule und Gymnasium in Pulheim bei Köln
06/1993	Abitur
WS 1993/94 - SS 1996	Studium der Mathematik und Physik, Universität zu Köln
WS 1996/97 - WS 1998/99	Studium an der Eberhard-Karls Universität Tübingen
05/1999	Erstes Staatsexamen in Mathematik und Physik wissenschaftliche Arbeit in Physik über photoinduzierte Pionproduktion am Deuteron
seit 06/1999	Doktorandin und wissenschaftliche Angestellte (SFB 382) an der Universität Tübingen
09-12/1999 und 03/2000	Princeton University, Princeton NJ, USA